FRUMAM, 11 Décembre 2009

LA NEGATION

Jean-Yves Girard

D'après *Le point aveugle*
(Hermann 2006-2007, 2 volumes)

1 — La vertu falsificatrice

- **Molière : la vertu dormitive de l'opium.**
- **Tarski : la *vertu falsificatrice* de la négation.**
- ***Négation = complémentaire ;* en particulier :**
  Contravariance : si $A \Rightarrow B$, alors $\neg B \Rightarrow \neg A$.
  Involutivité : $\neg\neg A = A$.
- **Vision « complétée » par *implication = inclusion :***
  $$A \Rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B$$
  Łukasiewicz : la transivité de $\subset$ explique celle de $\Rightarrow$.
- **Tout cela est *tautologique* et à peu près dénué d'intérêt.**
  Mathématiques : ne sert à rien.
  Logique : ne nous apprend rien sur le *raisonnement.*
- **L'au-delà du point aveugle à chercher dans la *procéduralité.***

2 — PROCÉDURALITÉ DE LA NÉGATION

- **Du point de vue des *démonstrations.***
- **Échange *hypothèse/conclusion :* de $\Gamma, A \vdash B$ à $\Gamma, \neg B \vdash \neg A$.**
- **Justifie la *contravariance,* mais pas l'*involutivité :*Réutilisation d'hypothèse de $\Gamma, A, A \vdash B$ à $\Gamma, A \vdash B$.Dissymétrie hypothèse/conclusion, d'où $A \neq \neg\neg A$.**
- **Théorèmes *non-effectifs*, obtenus par *contraposition :* si $\neg B \Rightarrow \neg A$, alors $A \Rightarrow B$.$\exists m(A[m] \Rightarrow \forall n\, A[n])$ propose un choix non effectif pour m :**
  $m = 0$: ça passe… ou ça casse : $A[0]$, mais $\neg A[n_0]$.
  $m = n_0$: si ça casse, le témoin de l'échec du premier essai.
- **Sans contraposition, theorèmes effectifs, i.e., *calculables*.**

3 — Logiques procédurales

- **Logique *intuitionniste* (autour de Brouwer, $\sim$1930) :On ne définit pas la vérité, mais la *façon d'y accéder :*Démontrer $A \vee B$ c'est démontrer A ou démontrer B.Refuse le *tiers-exclu* $A \vee \neg A$ (= contraposition).Mais négation *non involutive.***
- **Logique *linéaire* ($\sim$1986) :Refuse la réutilisation, i.e., l'*idempotence* $A \wedge A = A$.Négation *linéaire* procéduralement involutive $\sim\sim A = A$.Implication *linéaire* $A \multimap B$: un seul usage de l'hypothèse.**
- ***Pérennisation :* $!A$ « A ad libitum » récupère l'idempotence.Fait le lien *intuitionniste/linéaire :***

  $A \Rightarrow B = !A \multimap B$ $\qquad\qquad$ $\neg A = \sim !A$

4 — Considérations subjectives

- La *subjectivité* s'oppose au subjectivisme.Physique quantique et processus de *mesure.*En logique, place centrale des *démonstrations.*
- Remplacer l'inclusion entre A et B par un *morphisme.*Qui représente la part du *sujet,* i.e., la démonstration.
- Transitivité de l'inclusion $\rightsquigarrow$ *composition* des morphismes : $A \overset{f}{\Rightarrow} B \overset{g}{\Rightarrow} C$
- Logique linéaire : interprétation en « algèbre linéaire » :
  Conjonction : produit *tensoriel* $A \otimes B$ ou *cartésien* $A \& B$.
  Négation linéaire : l'espace *dual.*
- Non idempotence : *linéaire* $\neq$ *quadratique.*$!A$ algèbre *symétrique :* $!(A \& B) = !A \otimes !B$.

5 — La négation comme dualité

- **La négation (linéaire) est une dualité *réflexive* qui échange :Conclure/supposer : les deux côtés de $\vdash$ .Produire/consommer : *paire* $a \times b$ vs. *projections* π_1, π_2.Écrire/lire : si $!A$ *mémorise,* $\sim!A$ *lit, duplique, efface.*Envoyer/recevoir : $A \multimap B$ vs. $\sim B \multimap \sim A$.**
- **N'apparaît jamais à l'état pur : *cohérence logique.*$A \multimap A$: s'écrit comme *concomitance* $\sim A \parr A$.Entre *destruction* $\sim A$ et *reconstruction* de A.**
- **Il s'agit en fait d'une dialectique *questions/réponses.***
- **Suggère une interprétation *ludique.*La logique comme *jeu.*La négation échange les joueurs *Moi* et *Toi.***

6 — La normativité

- Qui décide de la *règle du jeu ?*D'où viennent les *règles logiques ?*Tarski : les règles sont choisies parce qu'elles sont *correctes.*
- Interprétations linéaires : *normativité* régie par... la norme :*Boule unité :* $a \in A \;\Leftrightarrow\; \|a\| \leq 1$En fait norme d'*espace dual :*$\|a\| := \sup\{\langle a \mid b\rangle \;;\; b \in {\sim}A\}$.Sur $A \oplus B$ norme ℓ^1 *(disjonction)* vs. ℓ^∞ *(conjonction)* $\&$.
- En *ludique,* il n'y a pas de règle du jeu.Chacun « fait ce qu'il veut », mais la partie *doit* s'arrêter.La négation ${\sim}A$ prend valeur d'*interdiction* pour A.Réflexivement, A est l'*espace normatif* de ${\sim}A$.

7 — Géométrie de l'interaction

- **Espace ambiant : algèbres de *von Neumann*.Plus précisément, le *facteur hyperfini*.Possède une *trace* et donc un *déterminant*** $\det(a) \in \mathbb{R}^+$.
- **Dualité de base entre *hermitiens* de norme** ≤ 1 **:**
  $\det(I - ab) \neq 0, 1$ **Entre « preuves » de** A **et de** $\sim A$.
  $\sim A = \{a \,;\, \forall b \in A \quad \det(I - ab) \neq 0, 1\}$
  $\neq 1$ **: garant de la « vérité ».**
  $\neq 0$ **: garant de la « loi ».**
- **Vision *iconoclaste* de l'infini : Infini = Imparfait = *Pérenne =* Non terminé Mais la pérennité est-elle *pérenne ?*Vers la *complexité algorithmique. . .***