LIX, 1er Juin 2004

NOUVELLES DU TROISIEME SOUS – SOL

Jean-Yves Girard

I-GÉNÉRALITÉS

I. 1-Les Fondements

- À l'ancienne : méta, métaméta,. . . Turtles all the way down.
- Nouveau régime sur trois sous-sols :

Niveau -1 : vrai/faux, prouvable/réfutable, cohérent/contradictoire ; théorème de Gödel.

Niveau -2 : fonctions, morphismes, catégories ; théorème de Church-Rosser, isomorphisme de Curry-Howard.

Niveau -3 : opérationalité, dynamique, exécution : ludique, géométrie de l'interaction.

- Le troisième sous-sol explique les autres niveaux :

Niveau -1 : à partir de la notion de gain.

Niveau -2 : à partir de l'associativité.

I. 2-La GoI

- **Interprétation à prétention universelle : logique du second ordre, λ-calcul pur.**

Preuve : **opérateur hermitien h sur un Hilbert $\mathcal{H}$: $\mathrm{h}^* = \mathrm{h}$, de norme au plus 1 : $\|\mathrm{h}\| \leq 1$.**

Coupure : **rétroaction σ. Une symétrie partielle : $\sigma^* = \sigma$, $\sigma^3 = \sigma$. σ induit une décomposition en somme directe $\mathcal{H} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{S}$ où $\mathcal{S}$ correspond au projecteur σ^2.**

Exécution : **solution de l'équation de rétroaction :**

$$\mathrm{h}(\mathrm{x} \oplus \mathrm{y}) = \mathrm{x}' \oplus \sigma(\mathrm{y})$$

entrée : x **sortie : x'** **calcul : y**

- **La forme normale est par définition $\sigma[\![\mathrm{h}]\!](\mathrm{x}) = \mathrm{x}'$.**

I. 3-L'INVERSIBILITÉ

- $\sigma[\![\mathbf{h}]\!]$ est un hermitien de $\mathcal{R}$ de norme au plus $\mathbf{1}$.
  $\|\mathbf{x}'\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}'\|^2 + \|\sigma(\mathbf{y})\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$. Unicité de la partie visible $\mathbf{x}'$.
- Si $\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^* \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$, alors $\sigma[\![\mathbf{h}]\!] = \mathbf{A} + \mathbf{B}^* \cdot (\sigma - \mathbf{C})^{-1} \cdot \mathbf{B} \quad \ldots$
- ... Pourvu que $\sigma - \mathbf{C}$ soit inversible.
- L'injectivité ne coûte rien : l'espace $\mathcal{Z} = \ker(\sigma - \mathbf{C})$ des cycles reste inaccessible. On remplace $\mathbf{C}$ par $\mathbf{C} - \mathcal{Z}$.
- On ne peut pas aller plus loin, sauf hypothèses logiques ad hoc (essentialistes) : $\sigma \cdot \mathbf{C}$ est nilpotent, d'où l'inversibilité.

$$(\sigma - \mathbf{C})^{-1} = \sigma + \sigma \cdot \mathbf{C} \cdot \sigma + \sigma \cdot \mathbf{C} \cdot \sigma \cdot \mathbf{C}\sigma + \ldots$$

I. 4-La Solution Générale

- Ne peut pas être littérale.
- Se base sur le cas inversible.
- Étendue par sup et inf au cas semi-inversible.
- Étendue par associativité au cas général.
- « Solution » valable dans toute algèbre de von Neumann.
- Revoir la GoI dans certaines algèbres (par exemple le facteur hyperfini de type $\mathbf{II}_1$).
- Nouvelle approche à $\mathbf{LLL}$?

II-LE GAIN

II. 1-Le Bipartisme

- Graphe bipartite non-commutatif. Généralise la notion ludique de parité.
- On se donne une décomposition de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{P} \oplus \mathcal{N}$.
- $\mathbf{h}$ est bipartite quand il s'écrit $\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q}^* \\ \mathbf{Q} & \mathbf{N} \end{bmatrix}$, avec $\mathbf{P} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{N} \leq \mathbf{0}$.
- Fait : l'inverse d'un bipartite est bipartite.
- Si $\mathbf{h}, \boldsymbol{\sigma}$ sont bipartites, de même pour $\boldsymbol{\sigma}[\![\mathbf{h}]\!]$.
- Utilisation du Principe de la Tortue.

II. 2-Le Premier Sous-Sol

- $\mathbf{h}$ bipartite est gagnant quand les coefficients $\mathbf{P}$ et $\mathbf{N}$ sont nuls.
- Exemple typique : un Fax : $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{u}^* \\ \mathbf{u} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, où $\mathbf{u}$ est une isométrie de $\mathbf{P}$ sur $\mathbf{N}$.
- Gagner : rester bipartite quand on échange $\mathbf{P}$ et $\mathbf{N}$.
- Le gain est préservé par forme normale.
- Questions de cohérence, de vérité, etc.

III-L'ORDRE PONCTUEL

III. 1-Rappels

- Un opérateur $\mathbf{h}$ est **hermitien** quand $\langle \mathbf{h}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x}\rangle \in \mathbb{R}$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$.
- Il est **positif** quand $\langle \mathbf{h}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x}\rangle \geq \mathbf{0}$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$.
- $\mathbf{h}$ est positif ss'il est de la forme $\mathbf{u}\mathbf{u}^*$. On peut même supposer $\mathbf{u}$ positif : $\mathbf{h} = (\sqrt{\mathbf{h}})^{\mathbf{2}}$.
- L'ordre **ponctuel** $\mathbf{f} \leq \mathbf{g}$ entre hermitiens est défini par $\mathbf{g} - \mathbf{f} \geq \mathbf{0}$.
- Pas un treillis : deux hermitiens ont un sup quand ils sont comparables !
- Toute partie filtrante bornée a un sup.
- La plupart des opérations ne sont pas croissantes (e.g. le carré). Mais la racine carrée est croissante.

III. 2-BONIFICATIONS

- Quid du statut topologique des sups filtrants ?
- Dana Scott : mauvaise topologie (jamais séparée).
- J.-Y. G. (espaces cohérents) : limites directes.
- Meilleure idée : bonificateur.
- Exemple, le théorème de Dini : si une suite croissante de fonctions continues sur un compact converge simplement vers une limite continue, la convergence est uniforme.
- Application (Lebesgue) : extension de l'intégrale des fonctions continues aux fonctions s.c.i. par passage au sup.
- De meme l'ordre ponctuel permet de bonifier une convergence faible en convergence forte.

III. 3-Plusieurs Topologies

- Trois principales topologies, qui diffèrent quant à la continuité du produit. Plus une topologie est faible, moins elle a d'ouverts, et plus facilement on converge.

  Norme : $\|u_i - u\| \longrightarrow 0$. Le produit, l'adjoint sont continus, mais topologie « trop forte ».

  Forte : $\|u_i(x) - u(x)\| \longrightarrow 0$. L'adjoint n'est pas continu, mais le produit l'est, pourvu que les arguments restent bornés.

  Faible : $\langle u_i(x) - u(x) \mid y\rangle \longrightarrow 0$. L'adjoint est continu, mais pas le produit. Par contre la boule unité est compacte.

- Bonification : un sup filtrant (et donc limite faible) est en fait une limite forte.

III. 4-Le Cas Semi-Inversible

- **Semi-inversible inférieurement (supérieurement) : sup (inf) filtrant d'inversibles.**
- **Inversible = s.i.i. $\cap$ s.i.s.**
- **La forme normale dans le cas inversible est croissante : développement en série entière.**
- **Par bonification : elle commute aux sups filtrants.**
- **On peut donc l'étendre à tous les s.i.i. par sups.**
- **Idem pour les s.i.s. par infs.**

III. 5-La Fin des Haricots

- **Lebesgue : l'extension aux s.c.i. par sups commute aux infs filtrants. On étend alors aux infs de s.c.i. et on a fini.**
- **Tout système $(\mathcal{H}, \mathrm{h}, \sigma)$ est un inf de systèmes s.i.i.**
- **Mais l'extension aus s.i.i. ne commute pas aux infs.**
- **Fin de la méthodologie « continuité par rapport à l'ordre ».**

IV-L'ORDRE STABLE

IV. 1-Une Autre Relation d'Ordre

- $(\mathcal{H}, \mathbf{g}, \boldsymbol{\sigma}) \sqsubset (\mathcal{H}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\sigma})$ **ssi** $\mathbf{k} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h}^2$ **et** $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{h}$.
- **De façon équivalente : s'il existe un sous-espace fermé** $\mathcal{E}$ **tel que** $\mathcal{E} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathcal{E}$ **et** $\mathbf{h} = \mathbf{k} \cdot \mathcal{E}$.
- **Existence de produits fibrés : si** $\mathbf{f}, \mathbf{g} \sqsubset \mathbf{h}$**, il existe un inf** $\mathbf{f} \sqcap \mathbf{g}$.
- **Le produit fibré distribue sur le sup ponctuel.**
- **La forme normale préserve** $\sqsubset$ **et** $\sqcap$.
- **Existence d'incarnations.**
- **Pas de relation entre les deux ordres :**

$$\mathbf{f} \leq \mathbf{g} \Rightarrow -\mathbf{g} \leq -\mathbf{f}$$

$$\mathbf{f} \sqsubset \mathbf{g} \Rightarrow -\mathbf{f} \sqsubset -\mathbf{g}$$

V-L’ASSOCIATIVITÉ

V. 1-Le Deuxième Sous-Sol

- **Retrouver un analogue de Church-Rosser, de la compositionalité.**
- **Deux coupures = une coupure, en d'autres termes, si σ, τ sont des rétroactions indépendantes, i.e., $\sigma \cdot \tau = 0$:**

$$\sigma[\![\tau[\![\mathbf{h}]\!]]\!] = (\sigma + \tau)[\![\mathbf{h}]\!]$$

- **L'associativité est vérifiée dans le cas inversible. S'étend par continuité aux sups dans le cas s.i.i.**
- **De même pour le cas s.i.s., mais l'associativité fait problème dans le cas semi-inversible (mélange de s.i.s. et s.i.i.).**

V. 2-Un Church-Rosser Quantique

- Ecrire σ comme $\pi + \nu$, avec $\pi^2 = \pi$, $\nu^2 = -\nu$, $\pi \cdot \nu = 0$. Décomposition « non-commutative ».
- $(\mathcal{H}, \mathrm{h}, \sigma)$ est s.i.i. ssi $(\mathcal{H}, \mathrm{h}, \nu)$ est inversible. En particulier, $(\mathcal{H}, \mathrm{h}, \pi)$ est toujours s.i.i.
- En particulier les problème est complètement résolu dans le cas biaisé.
- Reste à montrer que : (π biaisée > 0, ν biaisée < 0)

$$\pi[\![\nu[\![\mathrm{h}]\!]]\!] = \nu[\![\pi[\![\mathrm{h}]\!]]\!]$$

- Avec des techniques d'ordre on obtient facilement l'inégalité :

$$\pi[\![\nu[\![\mathrm{h}]\!]]\!] \leq \nu[\![\pi[\![\mathrm{h}]\!]]\!]$$

V. 3-LA RÉSOLVANTE

- Une formule explicite dans la cas biaisé permet de conclure.
- Si $\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^* \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$ on peut trouver un unique ψ tel que

$$\sqrt{\pi - \mathbf{C}} \cdot \psi = \mathbf{B}$$
$$\mathbf{dom}(\pi - \mathbf{C}) \cdot \psi = \psi$$

- On peut remplacer $\mathbf{h}$ par sa résolvante $\mathbf{res}(\mathbf{h}, \pi) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \psi^* \\ \psi & \mathbf{0} \end{bmatrix}$
- En effet, $\pi[\![\mathbf{h}]\!] = \pi[\![\mathbf{res}(\mathbf{h}, \pi)]\!]$.

V. 4-La Résolvante (suite et fin)

- **Dans le cas inversible,** $\boldsymbol{\psi = (\sigma - \mathrm{C})^{-1/2} \cdot \mathrm{B}}$
- **Alors res**$\boldsymbol{(\mathrm{h}, \pi) = \mathrm{A} + \psi^* \cdot \psi = \mathrm{A} + \mathrm{B}^* \cdot (\sigma - \mathrm{C})^{-1} \cdot \mathrm{B}}$