Schrödinger's cut

La logique à la lumière du quantique

Jean-Yves Girard

18 février 2021

Je n'ai jamais accepté la séparation entre le monde physique et celui des idées. D'où ma constante fascination pour les phénomènes quantiques qui s'accordent si peu à notre rationalité occidentale. Pour dire les choses crûment, nous vivons dans une dichotomie Objet/Sujet : l'opposition sémantique/syntaxe, que l'on complète parfois en Trinité grâce au méta, sorte de plombier chargé de colmater les fuites. Alors que le quantique, centré sur la notion de *mesure*, s'oppose à l'idée d'un monde objectif que nous, pauvres sujets, regarderions à travers un trou de serrure : non seulement la mesure influe sur la réalité, mais elle la crèe !

Ce hiatus explique la profonde incapacité de la logique traditionnelle – le réalisme axiomatique – à rendre compte du quantique. Que nous a-t-on en effet proposé, sinon des sémantiques abracadabrantesques, autrement dit des tables de vérité trafiquées ? Cherchant à préserver la balançoire Objet/Sujet au moyen de réalités *ad hoc*, ces logiques tordues qui sont une insulte à la rationalité creusent le fossé entre idées et réalité alors qu'il faudrait le réduire.

L'apparition, en 1986, de la *logique linéaire* fournit les outils adéquats. Avec un nécessaire temps de latence pour apprendre à se libérer des réflexes réalistes et éviter d'être comme le cocher de la fable qui, devenu chauffeur de taxi, fit ferrer son automobile. Logique *linéaire*, l'adjectif est de trop, car il s'agit de logique tout court, débarrassée de certaines contraintes inutiles. Si la logique était l'art culinaire, celle que l'on connaissait jusqu'alors nous obligeait à soumettre la viande au feu, ; le linéaire autorise le steak tartare et permet de libérer une variété de saveurs, jusque-là oblitérées par la cuisson. Sans pour autant interdire cette dernière puisqu'il n'exclut pas le « classique ». Logique *linéaire* est une expression malvenue qui suggère un système de plus alors qu'il s'agit de la clef permettant de tous les abandonner [3, 4, 5].

L'analogue logique de la cuisson est le principe de *contraction*, autrement dit l'idempotence $A \Rightarrow A \wedge A$ qui pérennise A, un peu comme une poterie qu'on ne pourra plus modeler une fois cuite. La révolution linéaire n'interdit pas ce principe, éminemment utile et important, elle le relativise. D'universel (« structurel » dans la terminologie de Gentzen), il est devenu contingent : il ne vaut plus que dans le cas de l'*exponentielle* $!A$

1 Superposition et « par »

Le tiers exclu (le *tertium non datur* des cuistres) $A \vee \neg A$ est équivalent au raisonnement par l'absurde $\neg\neg A \Rightarrow A$, ou *méthode de Corleone* – « Une proposition qu'on ne peut pas refuser ». Une littérature impressionnante a été consacrée à ces principes mais, comme on ne voit jamais les murs de la prison, personne avant 1986 ne s'était avisé que l'infortunée disjonction classique n'a ces propriétés, utiles et néanmoins contingentes, que cuite à 180° : libéré de la contraction, le « ou » classique devient le connecteur « par » (comme *partage*), noté [1] $A \parr B$ (A par B) : dénotant la superposition, il a un parfum quantique, encore ne faut-il pas le recuire dans un four sémantique.

L'exemple typique d'un « par » est fourni par $A \parr \sim A$, version du *tertium non datur* où la négation « classique » $\neg A$ – qui mènerait au principe de Corleone – a été remplacée par sa version « crue », la négation linéaire $\sim A$, laquelle, correspondant à l'idée de dualité, est fondamentalement involutive ($\sim\sim A \equiv A$) sans que cela n'ait aucune conséquence douteuse. Elle correspond à des couples lire/écrire, donner/recevoir, entrée/sortie, etc. Ainsi, fourniture/consommation de courant éléctrique : A peut représenter 220V, et $\sim A$ un appareil qui les utilise. $A \parr \sim A$ est alors la superposition des deux, non pas comme un chat mort et un chat vivant dans la cage quantique de Schrödinger, mais sous la forme d'une rallonge électrique qui relie une demande et sa satisfaction de façon purement potentielle : si je branche le côté A à une prise, je me retrouve avec le seul $\sim A$ qui me fournit du courant, si je branche le côté $\sim A$ à un appareil, le A restant devient (à peu près) cet appareil. Autrement dit, chacun des « superposés » ne se manifeste que quand l'autre a été neutralisé.

On remarquera d'ailleurs que ces deux participants sont évanescents au point d'être ambigus : ne serait-ce pas plutôt 12V du côté A ? Est-ce un rasoir

1. Pour la distinguer du « ou » intuitionniste, noté $A \oplus B$ (A plus B).

électrique ou une cafetière du côté $\sim A$? De même, le spin d'un électron n'est pas une superposition N/S, il peut se lire E/O voire devant/derrière et j'en passe un continuum. Derrière cette indétermination des participants se cache une nuance essentielle, la distinction entre synthétique et analytique [2], autrement dit typé et non typé.

Analytique De ce point de vue, A et $\sim A$ ne sont que des « lieux » où pourront, éventuellement, se manifester les partenaires. S'il s'agissait d'une rallonge physique, il faudrait imaginer un fil nu que l'on branche au moyen d'épissures. Rien ne nous empêche donc de mettre l'appareil du côté A et la source du côté $\sim A$. Avec, en perspective, de réjouissants incidents : courts-circuits, électrocutions et incendies.

Synthétique C'est le mode d'emploi, le surmoi qui régule le « ça » analytique. En logique, ce surmoi est représenté par des énoncés, des textes pédants, des règles qui restreignent, *in fine*, les branchements licites. Dans l'industrie, on se contente d'une approximation de ces spécifications au moyen de la distinction mâle/femelle qui évite les erreurs les plus grossières, e.g., brancher du courant sur du courant : il s'agit bien d'une attitude normative, puisqu'il serait plus économe d'employer des prises hermaphrodites avec un plot mâle et un femelle. Cette normativité est renforcée par un choix de formes : les incompatibilités entre prises interdisent ainsi de brancher une liseuse 12V sur le 220 [3].

La dialectique entre analytique et synthétique est au cœur de la logique. Elle repose bizarrement sur les travaux des frères ennemis Brouwer et Hilbert qui se disputaient le bébé de Salomon dont ils tenaient, sans le savoir, chacun un pied. Débarrassés de leur gangue, ils représentent le futur antérieur de la logique, à l'opposé de la tradition scientiste et totalitaire (pardon pour le pléonasme) incarnée par Bertrand Russell, responsable de l'obscurantisme de la « philosophie » analytique. Mon jugement n'est bien sûr qu'une relecture mais le passé est une constante réinvention [4] : nous ne pourrions vivre sans le modifier constamment. C'est peut-être aussi une sorte de « par » qu'il nous faudrait pour le comprendre.

---

2. La terminologie reflète mon admiration pour la pensée kantienne. Bien entendu, 200 ans après, les histoires de sujet et de prédicat sont un peu folkloriques et il faut reconstituer les mots de la tribu.

3. Mais hélas aussi, le branchement d'un produit `Apple` sur celui d'une autre marque sans raison autre que mercantile.

4. *Le fait est que chaque écrivain* crèe *ses propres précurseurs. Son apport modifie notre perception du passé aussi bien que du futur.* (Borges au sujet de Kafka)

2 Preuve et fonction d'onde

La logique déréaliste – j'entends par là le résultat des traditions antagonistes du constructivisme de Brouwer et de la Théorie de la démonstration de Hilbert – met en avant la notion de *preuve* comme processus analytique autonome, programme informatique *ante litteram*. Un processus qui préexiste à sa spécification tout comme l'existence à l'essence ; ainsi, la rallonge qui prouve $A \parr \sim A$ fonctionnait bien avant qu'on ne l'ait munie de prises, obstacles à la fois inévitables et contingents à sa libre utilisation.

Le quantique est basé sur une idée tout aussi déréaliste, celle de *fonction d'onde*. Si le « par » est la superposition quantique, la preuve devient la fonction d'onde logique. Encore faudra-t-il adapter un peu nos outils (annexes) pour que cette lumineuse assimilation soit plus qu'un feu follet.

La *Syntaxe Transcendantale* [2] est basée sur un substrat analytique, les *étoiles* et *constellations* (ann. B). Une étoile prend la forme $\llbracket t_1, \ldots, t_k \rrbracket$, ce que l'on pourrait lire, dans l'esprit quantique de superposition, $\llbracket t_1 + \ldots + t_k \rrbracket$. Autrement dit, le quantique nous interdit de considérer les rayons $t_1, \ldots, t_k$ comme autre chose qu'une commodité. Il faut admettre des coefficients complexes, ce qui fait que $\llbracket t \rrbracket$ pourra être lu comme $\llbracket (t+u)/2, (t-u)/2 \rrbracket$. La ST tient ainsi compte de l'ambiguïté quantique en présentant un vecteur comme le « par » de ses projections selon des axes orthogonaux.

3 Mesure et coupure

La coupure logique est l'explicitation d'une démonstration, i.e., elle fournit des valeurs. Elle est donc homogène à la notion de *mesure*. Y a-t-il ici quoi que ce soit en harmonie avec le célèbre non-déterminisme quantique ?

Chaque étoile utilise des variables bien définies qui permettent la réutilisation, donc une forme de « pérennité » : $\llbracket g(x), \boxed{f(x)} \rrbracket$ pourra se raccorder avec $\llbracket f(t_1), u_1 \rrbracket$ et $\llbracket f(t_2), u_2 \rrbracket$ pour donner $\llbracket g(t_1), u_1 \rrbracket$ et $\llbracket g(t_2), u_2 \rrbracket$ sans préjuger de potentiels raccordements à des $\llbracket f(t_i), u_i \rrbracket$. Mais un rayon sans variable est totalement labile : on ne peut s'en servir qu'une fois.

C'est comme le spin d'une particule qui ne nous attend pas après avoir été mesuré. Par contre, le *résultat* de cette mesure n'est plus labile du moment qu'on en a pris note. La différence entre le monde quantique microscopique et le classique macroscopique pourrait être dû à l'absence de variables dans le premier cas. Et un appareil de mesure, transformant une donnée labile en une autre pérenne, serait alors une sorte d'étoile aux variables hétérogènes, par exemple $\llbracket\, a, f(x) \,\rrbracket$ à laquelle on aurait du mal à associer un opérateur – et à plus forte raison un de ceux admis dans l'algèbre $\mathbb{U}$ (annexe A.2).

Ce type d'étoile a été exclu de l'analytique logique car il conduit à des absurdités, comme l'implication incorrecte $A \multimap\, !A$ (A un jour, A toujours) : la pérennisation nécessite en effet l'introduction d'une variable supplémentaire. Mais l'analogie avec le processus de mesure quantique nous amène à reconsidérer cette interdiction.

Le raccordement brutal entre étoiles hétérogènes donnerait lieu à des absurdités, ainsi $\llbracket\, f(x), \boxed{a} \,\rrbracket$ et $\llbracket\, a, g(y) \,\rrbracket$ qui produiraient $\llbracket\, f(x), g(y) \,\rrbracket$, sorte de superposition mal fichue, résultat d'une coupure (cut) mal normalisée, le « Schrödinger cut » en quelque sorte.

Si l'on admet la nécessité d'étoiles non homogènes, il nous faut adapter la procédure de normalisation à ce cas. L'idée générale est que la présence d'étoiles hétérogènes gèle le processus de normalisation et qu'il nous faut les faire disparaître pour retrouver un monde logique mieux balisé.

L'exemple typique d'une « coupure de Schrödinger » est donné par la combinaison d'une étoile close (sans variable) $\llbracket\, \boxed{t_1}, \ldots, \boxed{t_k} \,\rrbracket$ et d'un appareil de mesure formé des étoiles hétérogènes $\llbracket\, t_i, u_i \,\rrbracket$ où les u_i utilisent des variables distinctes – puisque issues d'étoiles différentes. La mesure consiste à normaliser, i.e., expliciter, cette constellation en évitant la formation du chat de Schrödinger $\llbracket\, u_1, \ldots, u_k \,\rrbracket$. La solution est non déterministe : elle consiste à choisir un des rayons, disons $\boxed{t_1}$, ce qui donne pour résultat $\llbracket\, u_1 \,\rrbracket$.

Quid des probabilités ? $\llbracket\, \boxed{t_1}, \ldots, \boxed{t_k} \,\rrbracket$ correspond à une décomposition selon des axes orthogonaux ($t_i^* \cdot t_j = 0$) et chaque $t_i t_i^*$ s'écrit $|\lambda_i|^2 \pi_i$ où π_i est un projecteur. La probabilité de choisir t_1 est donnée par $|\lambda_1|^2/(|\lambda_1|^2 + \ldots, |\lambda_k|^2)$.

Incidemment, le chat de Schrödinger correspond au principe fautif « Mix » $A \otimes B \vdash A \parr B$.

4 Envoi

Tout ça n'est qu'une ébauche jetée sur le papier que je n'ai pas l'énergie de développer seul. Je me suis contenté du seul aspect analytique, laissant les aspects purement logiques, i.e., synthétiques, de côté.

Je confesse n'avoir pas d'idée aussi convaincante quant aux phénomènes d'indiscernabilité. Ce qui s'en approche le plus en logique est la notion d'exponentielle $!A$ qui produit des sortes de copies basées sur le même moule. Elle a donc un parfum bosonique, mais *quid* de l'antisymétrie des fermions ?

A L'algèbre stellaire d'unification

Ou comment réorganiser la syntaxe transcendantale pour admettre des superpositions à coefficients complexes.

A.1 L'unification

Considérons un langage formel permettant de fabriquer des *termes* à partir de variables $x_1, x_2, x_3, \ldots$ à l'aide d'un nombre fini de symboles fonctionnels d'arités quelconques[5] : constantes $a_1, a_2, a_3, \ldots$, fonctions unaires $f_1(\cdot), f_2(\cdot), f_3(\cdot), \ldots$, binaires $g_1(\cdot,\cdot), g_2(\cdot,\cdot), g_3(\cdot,\cdot), \ldots$, etc. Sous peine d'illisibilité, on oublie les indices et utilise $x, y, z, \ldots$ pour les variables, $a, b, c, \ldots$ pour les constantes et $f, g, h, \ldots$ pour les fonctions d'arité non nulle sans se préoccuper du nombre d'arguments.

L'*unification* consiste à résoudre une équation $t = u$ entre termes. Comme il s'agit d'expressions formelles, l'égalité est celle, littérale, des expressions, i.e., correspond à l'identité. Résoudre le système consiste à donner des valeurs $\mathbf{v}$ $(= v_1, v_2, v_3, \ldots)$ aux variables $\mathbf{x}$ $(= x_1, x_2, x_3, \ldots)$ de nos termes de telle façon que la substitution des v_i pour les x_i égalise t et u :

$$t[\mathbf{x} \hookleftarrow \mathbf{v}] = u[\mathbf{x} \hookleftarrow \mathbf{v}] \tag{1}$$

Un célèbre résultat de Herbrand (1930) énonce que, de deux choses l'une :

— Ou bien le système n'a pas de solution : l'unification *échoue*.

— Sinon une des solution est plus générale que les autres ; cette mère de toutes les unifications est appelée unificateur *principal* (PGCU).

Ce PGCU n'est unique qu'à un isomorphisme – lui-même unique dans un certain sens assez abscons. Concrètement, le PGCU est défini aux variables près : par exemple $f(x) = g(f(y))$ peut s'unifier au moyen de $x \hookleftarrow f(a), y \hookleftarrow a$ ou $x \hookleftarrow f(b), y \hookleftarrow b$, toutes deux dérivées de $x \hookleftarrow f(z), y \hookleftarrow z$, un PGCU qui aurait pu s'écrire $x \hookleftarrow f(z'), y \hookleftarrow z'$.

Cas particulier d'unification, le *filtrage* : il s'agit d'équations d'unification où les variables occurrant à gauche, disons $\mathbf{x}$ sont distinctes de celles occurrant à droite, $\mathbf{y}$. L'unification prend alors la forme particulière :

$$t[\mathbf{x} \hookleftarrow \mathbf{v}] = u[\mathbf{y} \hookleftarrow \mathbf{w}] \tag{2}$$

5. Si l'on vise à l'économie, il est possible de se restreindre à une constante et deux fonctions binaires ; mais cela manque d'élégance.

Toute variable est potentiellement muette, i.e., n'acquiert d'individualité qu'au sein d'un contexte. Celui formé des t et u pour l'unification, ceux, disjoints, de t ou u dans le cas du filtrage. L'opération principale qui va nous intéresser est le filtrage et les contraintes de lisibilité nous empêchent d'assurer que les variables sont toujours distinctes. Pour filtrer $t[x]$ et $u[x]$, on commence par renommer les variables avant de résoudre, disons, $t[x] = u[y]$.

Deux termes t et u sont dits *disjoints* quand ils sont non filtrables. Ce qui est strictement plus restrictif que non unifiables ; ainsi, x et $f(x)$, non unifiables car $x = f(x)$ échoue, ne sont-ils pas disjoints.

A.2 L'algèbre $\mathbb{U}$

Nous définissons $\mathbb{U}$ comme l'espace vectoriel complexe engendré par les expressions tu^* où t, u sont des termes d'un langage fonctionnel fixé (voir *supra*). t et u sont censés dépendre exactement des mêmes variables dont le choix n'importe pas. Autrement dit, $f(x)g^*(x,y)$, $f(x)g^*(a,a)$ sont interdits et $f(x)g^*(x,x)$ est identifié à $f(y)g^*(y,y)$.

Pour définir la *composition* de tu^* et vw^*, on commence par changer les variables pour les rendre distinctes, disons que t, u dépendent de $\mathbf{x}$, v, w de $\mathbf{y}$. Si u et v sont disjoints, alors $tu^* \cdot vw^* := 0$. Sinon, soit θ, ξ le PCGU de u, v, i.e., la solution la plus générale de $u[\mathbf{x} \hookleftarrow \theta] = v[\mathbf{y} \hookleftarrow \xi]$. On définit

$$tu^* \cdot vw^* \quad := \quad (t[\mathbf{x} \hookleftarrow \theta])(w[\mathbf{y} \hookleftarrow \xi])^* \tag{3}$$

La composition est étendue aux combinaisons linéaires par bilinarité :

$$\sum_i (\lambda_i \cdot t_i u_i^*) \cdot \sum_j (\mu_j \cdot v_j w_j^*) \quad := \quad \sum_{ij} \lambda_i \mu_j \cdot (t_i u_i^* \cdot v_j w_j^*) \tag{4}$$

De plus l'algèbre est munie d'une opération $(\cdot)^*$, l'*adjonction* :

$$(\sum_i \lambda_i \cdot t_i u_i^*)^* \quad := \quad \sum_i \overline{\lambda}_i \cdot u_i t_i^* \tag{5}$$

vérifiant $(\lambda \cdot U + \mu \cdot V)^* = \overline{\lambda} \cdot U^* + \overline{\mu} \cdot V^*$, $(U \cdot V)^* = V^* \cdot U^*$ et $U^{**} = U$.

Fixons une connstante a. Si $\mathbb{H}$ est l'espace de Hilbert engendré par les ta^* où t est clos, alors $\mathbb{U}$ opère sur $\mathbb{H}$ au moyen de $uv^*(\sum_n \lambda_n \cdot t_n a^*) := \sum_n \lambda_n \cdot uv^* \cdot t_n a^*$ ce qui permet de représenter $\mathbb{U}$ comme une sous-algèbre de $\mathcal{B}(\mathbb{H})$, etc. Et donc de la compléter pour en faire une algèbre stellaire.

Cette complétion qui va à l'encontre de la finitude logique n'a qu'un intérêt limité. Mais son existence nous assure que la partie algébrique a un sens mathématique plus que robuste.

B Étoiles et constellations

B.1 Étoiles

La *Syntaxe Transcendantale* [2] est le résultat de la « révolution kantienne » qui m'a amené à mettre en avant les *conditions de possibilité* du langage et donc de m'éloigner – pour un temps – des opérateurs des algèbres stellaires. Tout repose sur la notion d'*étoile* $[\![t_1, \ldots, t_k]\!]$ ($k \neq 0$) où $t_1, \ldots, t_k$ sont des termes fonctionnels (*rayons*) utilisant exactement les mêmes variables. Je libéralise la notion en admettant des coefficients complexes [6], soit $[\![\lambda_1 \cdot t_1, \ldots, \lambda_k \cdot t_k]\!]$, i.e., $(\lambda_1 \cdot t_1 + \ldots \lambda_k \cdot t_k)(\overline{\lambda}_1 \cdot t_1^* + \ldots \overline{\lambda}_k \cdot t_k^*)$ dont la version rigoureuse est :

$$[\![\lambda_1 \cdot t_1, \ldots, \lambda_k \cdot t_k]\!] := \sum_{i,j} \lambda_i \overline{\lambda}_j \cdot t_i t_j^* \tag{6}$$

Les coefficients λ_i sont considérés à la multiplication par un scalaire multiplicatif près, autrement dit on pourrait les remplacer par $\theta\lambda_i$ ($\theta \neq 0$). On peut donc supposer que $|\lambda_1|^2 + \ldots + |\lambda_n|^2 = 1$, ce qui a pour vertu de rendre uniques les $\lambda_i \overline{\lambda}_j$. Si les coefficients sont renormalisés, alors $[\![\lambda_1 \cdot t_1, \ldots, \lambda_k \cdot t_k]\!]$ devient un projecteur de $\mathbb{U}$.

Ambiguïté fondamentale, $[\![t]\!]$ peut se lire $[\![(t+u)/2, (t-u)/2]\!]$, autrement dit nos étoiles n'ont plus de rayons bien définis. C'est d'ailleurs ce qui permet de mesurer un spin selon une direction oblique.

B.2 Constellations

Une constellation est un ensemble fini d'étoiles deux à deux disjointes. Cela a un sens précis vu que les étoiles sont (à peu près) des projecteurs : on demande donc que leurs produits soient deux à deux nuls. On peut voir une constellation $\mathcal{C}$ comme un sous-espace de $\mathbb{H}$.

Un choix de couleurs complémentaires – en fait des fonctions unaires spécialisées – permet de raccorder les étoiles : étant donnés $[\![t_1, \ldots, t_m, \boxed{t}]\!]$ et $[\![u, u_1, \ldots, u_n]\!]$ où les rayons $\boxed{t}$ et u sont de couleurs complémentaires vert et magenta. Des termes de couleurs différentes sont automatiquement disjoints comme ils le sont des termes incolores. En présence de couleurs, une contrainte supplémentaire est nécessaire : si $[\![\boxed{t}, u]\!], [\![\boxed{t'}, u']\!] \in \mathcal{C}$ et u, u'

6. Algébriques pour éviter les embrouilles calculatoires.

n'utilisent pas la couleur $\boxed{\text{vert}}$, alors t, t' sont disjoints, *idem* pour les autres couleurs.

La normalisation de $\mathcal{C}$ utilisant les couleurs $\boxed{\text{vert}}$ et magenta se définit de façon très simple. $\mathcal{C}$ décrit en fait un sous-espace de $\mathbb{H}$ auquel je peux ajouter celui correspondant à l'étoile $\llbracket\, \boxed{x}, -x \,\rrbracket$ et former ainsi $\mathcal{C}' = \mathcal{C} + \llbracket\, \boxed{x}, -x \,\rrbracket$. La *forme normale* est la partie incolore de $\mathcal{C}'$. C'est un sous-espace qui n'a de sens que s'il s'écrit sous la forme d'une constellation, i.e., sous la forme d'un ensemble *fini* d'étoiles.

Le calcul de la forme normale se ramène à des systèmes d'équations d'unification appelés *diagrammes* dans [2]. Même situation ici, je donne un exemple : supposons que $\mathcal{C}$ contienne les étoiles suivantes :

$$\llbracket\, \boxed{f(f(x))}, 2 \cdot \boxed{f(g(x))}, h(x) \,\rrbracket$$
$$\llbracket\, \boxed{g(f(y))}, 2 \cdot \boxed{g(g(y))}, k(y) \,\rrbracket$$
$$\llbracket\, f(f(a)), \boxed{g(f(a))}, b \,\rrbracket$$
$$\llbracket\, f(g(z)), \boxed{g(g(z))}, l(z) \,\rrbracket$$

L'ajout de $\llbracket\, \boxed{w}, -w \,\rrbracket$ nous amène à résoudre l'équation :

$$\lambda \cdot (f(f(x)) + 2 \cdot f(g(x))) + \mu \cdot (g(f(y)) + 2 \cdot g(g(y))) =$$
$$\theta \cdot (f(f(a)) + g(f(a))) + \xi \cdot (f(g(z)) + g(g(z)))$$

ce qui est possible avec $x = y = z = a$ et $\lambda = \mu = \theta = \lambda = \xi/2$. La solution de cette équation produit un résidu incolore $\llbracket\, h(a), k(a), -b, -l(a) \,\rrbracket$.

Contrairement à ce qu'il se passait dans [2], la structure n'est plus celle d'un diagramme arborescent : il y a une sorte de cycle entre ff, fg, gf, gg, ce qui introduit des contraintes au niveau des coefficients. Ainsi, l'équation n'a plus de solution si l'on remplace 2 par 3 dans la première étoile.

B.3 GdI vs. ST

La version présentée ici est le point de rencontre entre la *Géométrie de l'Interaction* (GdI) et la *Syntaxe transcendantale* (ST). Le fait que $\mathbb{U}$ soit une algèbre stellaire rend le rapprochement possible. La différence principale est que la GdI était basée sur une équation de *rétroaction* [1] entre opérateurs du genre isométrie partielle, rarement des projecteurs : la rétroaction, appliquée à des projecteurs n'est pas très intéressante sauf à supposer qu'ils commutent. La ST nouvelle version ne traite que de projecteurs mais les gère au moyen d'une intersection et non au moyen d'une équation entrée/sortie. C'est pourquoi des projecteurs ne commutant pas peuvent donner naissance à des projecteurs.

Prenons l'exemple des identités $\vdash A, \sim A$, nommées axiomes par antiphrase puisqu'ils ne sont pas arbitraires. En GdI, elles s'expriment sous la forme de symétries partielles de la forme $tu^* + ut^*$ dont le raccordement à $uv^* + vu^*$ produit le résultat $tv^* + vt^*$. On pourrait tenter de les remplacer par des projecteurs, typiquement $1/2(tt^* - tu^* - ut^* + uu^*)$ dont le raccordement au moyen de la GdI à $1/2(uu^* - uv^* - vu^* + vv^*)$ donne le résultat déconcertant $2tt^*/3 - tv^*/3 - vt^*/3 + 2vv^*/3$, alors que l'on aurait attendu le projecteur $1/2(tt^* - tv^* - vt^* + vv^*)$.

En ST, les identités s'expriment sous la forme de différences de rayons, e.g., $[\![\, 1/2(t-u) \,]\!] = 1/2(tt^* - tu^* - ut^* + uu^*)$. Le raccordement d'indentités s'exprime au moyen des étoiles :

$$[\![\, \sqrt{2}/2(t - \boxed{u}) \,]\!]$$
$$[\![\, \sqrt{2}/2(u - v) \,]\!]$$
$$[\![\, \sqrt{2}/2(\boxed{x} - x) \,]\!]$$

qui produisent, par combinaison linéaire et filtrage,

$$\sqrt{2}/2(t - v) = \sqrt{2}/2(t - \boxed{u}) + \sqrt{2}/2(u - v) + \sqrt{2}/2(\boxed{u} - u)$$

autrement dit $[\![\, \sqrt{2}/2(t-v) \,]\!] = 1/2(tt^* - tv^* - vt^* + vv^*)$.

Si $U := 2tt^*/3 - tv^*/3 - vt^*/3 + 2vv^*/3, V := 1/2(tt^* - tv^* - vt^* + vv^*)$, alors $U = 2/3V + (tt^* + vv^*)/3$. La GdI produit en fait le résultat correct V, mais un peu jivarisé du fait qu'il n'a pas pu exploiter $(tt^* + vv^*)/3$ resté tel quel comme le grabon d'une soudure imparfaite.

La parabole du cocher qui fit ferrer son taxi s'applique donc aussi à la GdI, qui avait eu l'intuition, dès 1987, de se servir des opérateurs sans pour autant trouver l'angle d'attaque idoine.

Références

[1] J.-Y. Girard. **Geometry of interaction IV : the feedback equation**. In Stoltenberg-Hansen and Väänänen, editors, *Logic Colloquium '03*, pages 76 – 117. Association for Symbolic Logic, 2006.

[2] J.-Y. Girard. **Transcendental syntax 1 : deterministic case**. *Mathematical Structures in Computer Science*, pages 1–23, 2015. *Computing with lambda-terms. A special issue dedicated to Corrado Böhm for his 90th birthday.*

[3] J.-Y. Girard. **Un tract anti-système**. Technical report, http ://girard.perso.math.cnrs.fr/systeme.pdf, 2019.

[4] J.-Y. Girard. **Transcendental syntax 4 : logic without systems**. Technical report, http ://girard.perso.math.cnrs.fr/trsy4.pdf, 2020.

[5] J.-Y. Girard. **Un tract anti-système II : le monstre de Gila**. Technical report, http ://girard.perso.math.cnrs.fr/gila.pdf, 2020.

Jean-Yves Girard
Directeur de Recherches émérite
jeanygirard@gmail.com

vitam impendere logicæ