Schrödinger's cut II

Les additifs à la lumière du quantique

Jean-Yves Girard

29 décembre 2022

À Thomas, dont les brillantes contributions
me réconcilieraient presque avec la sémantique.

La disjonction additive $A \oplus B$ se normalise, i.e., s'explicite, au moyen d'un choix entre A et B. Bien que déterministe, cette évaluation présente une analogie évidente avec la mesure (explicitation) quantique : le choix entre A et B rappelle celui entre « spin en haut » et « spin en bas ».

Les additifs $\oplus$ (*Plus*) et & (*Avec*) posent problème depuis leur création en 1986 [1] : la règle du calcul des séquents pour la conjonction &

$$\frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \,\&\, B}$$

passe mal dans les réseaux de démonstration car les deux occurrences de Γ doivent être superposées sans être écrasées. D'où les *boîtes* de conclusions $\Gamma, A \,\&\, B$, faux axiomes justifiés par les réseaux démontrant Γ, A et Γ, B. Ces boîtes introduisent une certaine séquentialité – un mot bien venu puisqu'il réfère aussi aux séquents – dans la structure asynchrone des réseaux.

Dans un style bilatère, cette règle est aussi celle, gauche, du dual $\oplus$ de &

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \oplus B \vdash \Delta}$$

ce qui montre incidemment que ce problème nous vient de l'ancêtre de $\oplus$, la disjonction intuitionniste dont la règle d'élimination en déduction naturelle

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ A \vee B\end{array} \qquad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B]\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}$$

achoppait sur la même question avec C dans le rôle du contexte Γ.

Sans être forcément mauvaises, les diverses améliorations des boîtes ne sont jamais LA solution : elles mènent toutes à une dégradation de la texture logique par rapport au cas multiplicatif. Critique qui s'applique à mon texte [4] qui complique de façon excessive les étoiles et constellations de [3] au moyen d'une structure d'espace cohérent : pièce montée en formation !

La superposition additive peut s'effectuer au moyen d'un *poids* booléen $\mathfrak{a} = \mathrm{G}/\mathrm{D}$ distinguant les prémisses Γ, A et Γ, B de la règle &. Mais ces booléens restent externes et s'intègrent mal à la structure déductive et à l'élimination des coupures : comment les crèe-t-on, les modifie-t-on ? La réponse a mis du temps à venir : ces poids sont en fait des entités susceptibles de deux positions comme le spin d'un électron. Dans [6] nous avions suggéré de représenter les artefacts « quantiques » par des rayons sans variable et proposé d'introduire des étoiles hétérogènes du genre $[\![\, p(x), \mathfrak{a} \,]\!]$ combinant des rayons macroscopiques, reconnaissables à leurs variables, à d'autres rayons, microscopiques et sans variable comme $\mathfrak{a}$. Mais la porte ouverte s'était immédiatement refermée car $[\![\, p(x), \mathfrak{a} \,]\!]$ n'a aucun sens en termes d'espace de Hilbert (cf. section 1.3) : la fonction $\varphi(p(x)) := \mathfrak{a}$ ne se prolonge pas en un opérateur de $\mathbb{H}$.

La difficulté de faire opérer un simple vecteur comme $\mathfrak{a}$ sur la totalité de l'espace est finalement résolue par le remplacement de l'espace de Hilbert $\mathbb{H}$ par l'espace de Fock antisymétrique $\Lambda\mathbb{H}$. Les démonstrations deviennent des projecteurs de $\Lambda\mathbb{H}$ dont on peut extraire des sous-projecteurs qui jouent le rôle de copies disjointes au moyen des *créateurs* κ_v et des *annihilateurs* α_v. On fera intervenir $\kappa_v\alpha_v$, projecteur du sous-espace « avec v » et son supplémentaire $\alpha_v\kappa_v$, le sous-espace « sans v ». Pour superposer les projecteurs E et F correspondant aux prémisses de la règle « & » en sommant, pour un v idoine, les « tranches » $E \cdot \kappa_v\alpha_v$ et $F \cdot \alpha_v\kappa_v$.

Le plaisir de résoudre ce vieux problème logique est si vif que je m'arrête en chemin à deux pas de la mesure quantique qui fera l'objet du prochain article [7]. Signe que je suis sur la bonne voie, le quantique n'est pas, comme trop souvent, prétexte au pire laisser-aller logique ; tout au contraire, il induit un resserrage des boulons.

1 Étoiles et constellations, premier jet

C'est, fondamentalement, une version améliorée de [3] avec une attention particulière à la représentation des constellations comme projecteurs d'espaces de Hilbert.

1.1 L'unification

Soit $\mathcal{L}$ un langage de *termes* construits à partir de variables $x_1, x_2, x_3, \ldots$, et d'un nombre fini de symboles fonctionnels, $a_i, f_j(\cdot), g_k(\cdot,\cdot)$, etc. ; on suppose que $\mathcal{L}$ contient au moins une constante et une fonction binaire. Sous peine d'illisibilité, on oublie les indices et utilise $x, y, z, \ldots$ pour les variables, $a, b, c, \ldots$ poour les constantes et $f, g, h, \ldots$ pour les fonctions d'arité non nulle sans se préoccuper du nombre d'arguments.

L'*unification* consiste à résoudre une équation $t = u$ entre termes. Comme il s'agit d'expressions formelles, l'égalité est celle, littérale, des expressions, i.e., correspond à l'identité. Résoudre le système consiste à donner des valeurs $\mathbf{v}$ $(= v_1, v_2, v_3, \ldots)$ aux variables $\mathbf{x}$ $(= x_1, x_2, x_3, \ldots)$ de nos termes de telle façon que la substitution des v_i pour les x_i égalise t et u :

$$t[\mathbf{x} \hookleftarrow \mathbf{v}] = u[\mathbf{x} \hookleftarrow \mathbf{v}] \tag{1}$$

Un célèbre résultat de Herbrand (1930) énonce que, de deux choses l'une :

— Ou bien le système n'a pas de solution et l'unification *échoue*.

— Sinon une des solutions est plus générale que les autres ; cette mère de toutes les unifications est appelée unificateur *principal* (PGCU).

Ce PGCU n'est unique qu'à un isomorphisme près, lui-même unique dans un certain sens assez abscons : concrètement, le PGCU est unique aux variables près. Par exemple $f(x) = g(f(y))$ peut s'unifier au moyen de $x \hookleftarrow f(a), y \hookleftarrow a$ ou $x \hookleftarrow f(b), y \hookleftarrow b$, toutes deux dérivées de $x \hookleftarrow f(z), y \hookleftarrow z$, un PGCU qui aurait pu s'écrire $x \hookleftarrow f(z'), y \hookleftarrow z'$.

Cas particulier d'unification, le *filtrage* : il s'agit d'une équation $t = u$ où les variables occurrant dans t, disons $\mathbf{x}$, sont distinctes de celles occurrant dans u, disons $\mathbf{y}$. L'unification prend alors la forme particulière :

$$t[\mathbf{x} \hookleftarrow \mathbf{v}] = u[\mathbf{y} \hookleftarrow \mathbf{w}] \tag{2}$$

Toute variable est potentiellement muette, i.e., n'acquiert d'individualité qu'au sein d'un contexte. Celui formé des t et u pour l'unification, ceux, disjoints, de t ou u dans le cas du filtrage, l'opération principale qui va nous intéresser ; les contraintes de lisibilité nous empêchent de choisir des variables distinctes. Pour filtrer $t[x]$ et $u[x]$, on commence par renommer les variables avant de résoudre, disons, $t[x] = u[y]$.

Deux termes t et u sont dits *disjoints* quand ils sont non filtrables. Ce qui est strictement plus restrictif que non unifiables ; ainsi, x et $f(x)$, non unifiables car $x = f(x)$ échoue, ne sont-ils pas disjoints.

1.2 L'algèbre $\mathbb{U}$

Soit $\mathbb{U}$ l'espace vectoriel complexe engendré par les expressions tu^* où $t, u \in \mathcal{L}$ dépendent exactement des mêmes variables ; ce qui interdit des expressions du genre $f(x)g^*(x, y)$ ou $f(x)g^*(a, a)$. Le choix de ces variables n'importe pas, autrement dit $f(x)g^*(x, x)$ est identifié à $f(y)g^*(y, y)$.

Pour définir la *composition* de tu^* et vw^*, on commence par changer les variables pour les rendre distinctes, disons que t et u dépendent de $\mathbf{x}$, v et w de $\mathbf{y}$. Si u et v sont disjoints, alors $tu^* \cdot vw^* := 0$. Sinon, soit θ le PCGU de u, v, i.e., la solution la plus générale de $u[\mathbf{x} \hookleftarrow \theta\mathbf{x}] = v[\mathbf{y} \hookleftarrow \theta\mathbf{y}]$. On définit

$$tu^* \cdot vw^* \quad := \quad (t\theta)(w\theta)^* \tag{3}$$

Opération d'élément neutre xx^*, la composition s'étend par bilinéarité :

$$(\sum_i \lambda_i t_i u_i^*) \cdot (\sum_j \mu_j v_j w_j^*) \quad := \quad \sum_{ij} \lambda_i \mu_j t_i u_i^* \cdot v_j w_j^* \tag{4}$$

L'algèbre est de plus munie d'une involution $(\cdot)^*$, l'*adjonction* :

$$(\sum_i \lambda_i t_i u_i^*)^* \quad := \quad \sum_i \overline{\lambda}_i u_i t_i^* \tag{5}$$

telle que $(\lambda U + \mu V)^* = \overline{\lambda} U^* + \overline{\mu} V^*$, $(U \cdot V)^* = V^* \cdot U^*$, $(xx^*)^* = xx^*$, $U^{**} = U$.

Soit $\mathcal{L}' \supset \mathcal{L}$ et ω un terme clos de $\mathcal{L}'$. $\mathbb{U}$ opère sur l'espace de Hilbert $\mathbb{H} = \ell^2(\mathcal{L}')$ engendré par les $t\omega^*$ (t terme clos de $\mathcal{L}'$) au moyen de $uv^*(\sum_n \lambda_n t_n \omega^*) := \sum_n \lambda_n uv^* \cdot t_n \omega^*$. Ce qui permet de représenter $\mathbb{U}$ comme une sous-algèbre de $\mathcal{B}(\mathbb{H})$. La complétion de $\mathbb{U}$ par rapport à la semi-norme induite par cette représentation en fait une algèbre stellaire. Qui est, dès que $\mathcal{L}' \neq \mathcal{L}$, l'algèbre stellaire « libre » engendrée par $\mathbb{U}$ car la représentation induit *la plus grande* semi-norme stellaire (i.e., telle que $\|uu^*\| = \|u\|^2$) possible[1] sur $\mathbb{U}$.

1. Si $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$ et $\mathcal{L}$ est réduit aux fonctions a et g, alors $\|xx^* - aa^* - g(x, y)g(x, y)^*\| = 0$.

1.3 Étoiles

La construction de $\mathbb{U}$ exploite de façon implicite l'existence, pour chaque terme t, d'un opérateur linéaire de $\mathbb{H} \otimes \ldots \otimes \mathbb{H}$ (un $\mathbb{H}$ par variable de t) dans $\mathbb{H}$, dont l'adjoint t^* est un opérateur de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{H} \otimes \ldots \otimes \mathbb{H}$. Ce qui s'étend aux sommes $\lambda_1 t_1 + \ldots + \lambda_n t_n$ où $t_1, \ldots, t_n$ ont exactement les mêmes variables et sont deux à deux disjoints. Ce qui suggère de considérer le produit

$$h := (\lambda_1 t_1 + \ldots + \lambda_n t_n)(\lambda_1 t_1 + \ldots + \lambda_n t_n)^* = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \lambda_i \overline{\lambda}_j t_i t_j^*$$

h est hermitien ; de plus, comme $t_i t_j^* t_j t_l^* = t_i t_l^*$, $t_i t_j^* t_k t_l^* = 0$ pour $j \neq k$, $h^2 = (\sum \lambda_i \overline{\lambda}_i) h$. Si $\sum \lambda_i \overline{\lambda}_i = 1$ h est alors un projecteur ($h = h^* = h^2$) qu'on peut identifier, au niveau de sa représentation, à un sous-espace clos de $\mathbb{H}$.

Une *étoile* est une expression formelle $[\![\lambda_1 t_1 + \ldots + \lambda_n t_n]\!]$ ($n \neq 0$) dont les *rayons* t_i sont deux à deux disjoints et dépendent des mêmes variables ; les coefficients λ_i sont supposés non nuls. $[\![\lambda_1 t_1 + \ldots + \lambda_n t_n]\!]$ dénote en fait le projecteur $(\sum \lambda_i \overline{\lambda}_i)^{-1} \sum \lambda_i \overline{\lambda}_j t_i t_j^*$. Les étoiles sont définies à un coefficient multiplicatif près, i.e., $[\![\lambda_1 t_1 + \ldots + \lambda_n t_n]\!] = [\![\mu\lambda_1 t_1 + \ldots + \mu\lambda_n t_n]\!]$; cette (commode) indétermination des coefficients est de même nature que la possibilité de renommer les variables. Une *constellation* est une somme d'étoiles dont les rayons sont tous disjoints.

Mêmes définitions que dans [3], les coefficients ne changeant pas grand-chose. On raccorde $[\![\lambda_1 t_1 + \ldots + \lambda_n t_n + \lambda_{n+1} \boxed{t_{n+1}}]\!]$ et $[\![\mu_0 u_0 + \mu_1 u_1 + \ldots + \mu_p u_p]\!]$ à travers des rayons de *couleurs* opposées $\boxed{t_{n+1}}$ et u_0 en unifiant t_{n+1} et u_0 mais aussi en égalant λ_{n+1} et $-\mu_0$, ce qui est facile vu l'indétermination des coefficients. On remplace donc λ_i par $\lambda_i \mu_0$ et μ_j par $-\lambda_{n+1}\mu_j$; le résultat peut donc s'écrire $[\![\lambda_1 \mu_0 t_1 \theta + \ldots + \lambda_n \mu_0 t_n \theta - \lambda_{n+1} \mu_1 u_1 \theta - \ldots - \lambda_{n+1} \mu_p u_p \theta]\!]$.

Exemple typique, le branchement de $[\![t - \boxed{t'}]\!]$ et $[\![t' - t'']\!]$ donne $[\![t - t'']\!]$.

1.4 Normalisation et sous-espaces

Les projecteurs de $\mathbb{U}$ associés aux étoiles d'une constellation étant deux à deux orthogonaux, leur somme est encore un projecteur de $\mathbb{U}$ que l'on peut représenter par un sous-espace clos $|\mathfrak{C}|$, son *graphe*. Si $\mathfrak{C}$, supposée utiliser les couleurs $\boxed{\texttt{vert}}$ et `magenta`, se normalise en $\mathfrak{D}$, il est facile de voir que

$$|\mathfrak{D}| = (|\mathfrak{C}| + |[\![\boxed{xx^*} - xx^*]\!]|) \cap |[\![\boxed{xx^*}]\!]|^\perp \cap |[\![xx^*]\!]|^\perp \tag{6}$$

où la somme $|\mathfrak{C}| + |[\![\, \boxed{xx^*} - xx^* \,]\!]|$ dénote la clôture du sous-espace engendré par les sommes $\mathfrak{c} + \boxed{t}\omega^* - t\omega^*$, $\mathfrak{c} \in |\mathfrak{C}|$, $t \in \mathcal{L}'$ clos. Le graphe de la forme normale est donc la partie incolore de cette clôture.

Par exemple, si $\mathfrak{C} = [\![\, \boxed{t} \,]\!] + [\![\, u - v \,]\!]$ où t, u ont pour PGCU θ, sa forme normale est $\mathfrak{D} = [\![\, v\theta \,]\!]$ dont le graphe $|\mathfrak{D}|$ est formé des $u\theta'\omega^*$ où θ' est moins général que θ. En fait, $u\theta'\omega^* = \boxed{t}\theta'\omega^* - (u\theta'\omega^* - v\theta'\omega^*) - (\boxed{t}\theta'\omega^* - u\theta'\omega^*)$.

Les conditions énoncées en [3] assurent que $\mathcal{F} \cap |[\![\, \boxed{xx^*} - xx^* \,]\!]| = 0$; il n'y a donc pas de « cycle coloré », ce qui implique qu'un vecteur de la forme normale s'écrit $c + f$ de façon unique. Le graphe φ d'une démonstration de $A \vdash B$ n'est pas fonctionnel ; pourtant, quand je le compose avec ψ celui d'une démonstration de $B \vdash C$, la formule (6) s'écrit bien
$\psi \circ \varphi \ = \ \{a + c \,;\, \exists b\, (a + b \in \varphi \text{ et } b + c \in \psi\}$, l'interpolant b étant en fait unique comme dans le cas de graphes fonctionnels !

2 Étoiles et constellations, second jet

2.1 Espace de Fock

L'espace de Fock antisymétrique $\Lambda\mathbb{H}$ est la somme hilbertienne

$$\Lambda\mathbb{H} := \mathbb{C} \oplus \mathbb{H} \oplus \Lambda^2(\mathbb{H}) \oplus \ldots \oplus \Lambda^n(\mathbb{H}) \oplus \ldots \tag{7}$$

$\Lambda^n(\mathbb{H})$, engendré par les $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$ ($x_i \in \mathbb{H}$), est muni de la forme sesquilinéaire

$$< x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \mid y_1 \wedge \ldots \wedge y_n >:= \det(< x_i \mid y_j >) \tag{8}$$

Un sous-espace clos $\mathcal{E}$ de $\mathbb{H}$ induit un sous-espace clos $\Lambda\mathcal{E}$ de $\Lambda\mathbb{H}$, celui engendré par $\mathbb{C}$, $\mathcal{E}$ et les $e \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$ ($e \in \mathcal{E}, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{H}$). Si π est le projecteur associé à $\mathcal{E}$ il est facile de calculer le projecteur $\Lambda\pi$ associé à $\Lambda\mathcal{E}$. Par exemple :

$$\begin{aligned}
\Lambda\pi(x \wedge y \wedge z) \quad = \quad & \pi(x) \wedge y \wedge z + x \wedge \pi(y) \wedge z + x \wedge y \wedge \pi(z) \\
& -\pi(x) \wedge \pi(y) \wedge z - \pi(x) \wedge y \wedge \pi(z) - x \wedge \pi(y) \wedge \pi(z) \\
& +\pi(x) \wedge \pi(y) \wedge \pi(z)
\end{aligned}$$

2.2 Créateurs et annihilateurs

Si $v \in \mathbb{H}$, le *créateur* κ_v est défini par

$$\kappa_v(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) := v \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \tag{9}$$

une formule qui se lit $\kappa_v(\lambda) := \lambda v$ pour $\lambda \in \mathbb{C} = \Lambda^0(\mathbb{H})$. κ_v envoie donc $\Lambda^n(\mathbb{H})$ dans $\Lambda^{n+1}(\mathbb{H})$. Un calcul standard montre que l'adjoint de κ_v n'est autre que l'*annihilateur* α_v

$$\alpha_v(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) := \sum (-1)^{i+1} < x_i \mid v > x_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{x_i} \wedge \ldots \wedge x_n \qquad (10)$$

et donc que $\kappa_v \alpha_v \kappa_v = <v \mid v> \kappa_v$. Si $\|v\| = 1$, κ_v et α_v sont des isométries partielles échangeant les espaces supplémentaires de projecteurs respectifs $\alpha_v \kappa_v$ (« sans v ») et $\kappa_v \alpha_v$ (« avec v »). $\alpha_v \kappa_v$ et $\kappa_v \alpha_v$ vont jouer le rôle des « poids » booléens nécessaires aux superpositions additives.

2.3 Normalisation

Les démonstrations sont désormais représentées par des projecteurs de l'espace de Fock $\Lambda\mathbb{H}$, moyennant le remplacement $\pi \rightsquigarrow \Lambda\pi$. La « rétroaction » $|[\![\boxed{xx^*} - xx^*]\!]|$ devenant ainsi $\Lambda|[\![\boxed{xx^*} - xx^*]\!]|$. La normalisation peut se voir comme une sorte de restriction d'un projecteur – ou d'un sous-espace clos $\mathcal{E}$ de $\Lambda\mathbb{H}$ – à $\Lambda\mathbb{H}_0$, où $\mathbb{H}_0$ est l'espace de Hilbert « incolore », i.e., celui engendré par les termes qui n'utilisent pas les couleurs `vert` et `magenta`. Si $\mathcal{G} := \mathcal{E} + \Lambda|[\![\boxed{xx^*} - xx^*]\!]|$ la forme normale $\mathcal{F}$ est définie par l'intersection

$$\mathcal{F} := \bigcap_A \alpha_{A\omega}(\mathcal{G}) \qquad (11)$$

où A varie parmi les ensembles finis de termes clos colorés $\{\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_\mathfrak{n}\}$; $\alpha_{A\omega}$ désignant le produit des annihilateurs des $\mathfrak{a}_i\omega$. Cette intersection a pour vertu de « raboter » les disparités entre tranches (*infra*) ; car v incolore ne subsiste que s'il apparaît dans *toutes* les tranches colorées, e.g., comme v et $v \wedge \boxed{\mathfrak{a}}\omega$.

2.4 Étoiles

Dans [3], les rayons étaient des termes quelconques. Dorénavant, nous allons considérer deux classes de rayons :

— Les rayons ordinaires (macroscopiques) qui sont des termes dépendant d'au moins une variable.

— Les *poids* de la forme $\downarrow \mathfrak{a}$ ou $\uparrow \mathfrak{a}$, où $\mathfrak{a}$ est un terme clos ; ils correspondent aux booléens qui nous manquaient jusque là.

On utilise le symbole $\widetilde{\cdot}$ pour la négation, $\widetilde{\uparrow} = \downarrow, \widetilde{\downarrow} = \uparrow$. Une *tranche* est un produit de poids $\epsilon_1\mathfrak{a}_1 \cdot \ldots \cdot \epsilon_k\mathfrak{a}_k$ ($k \geq 0$) défini à l'ordre près et en négligeant les répétitions, mais telle qu'aucun $\epsilon_i\mathfrak{a}_i$ ne soit égal à un $\widetilde{\epsilon_j}\mathfrak{a}_j$. Si un poids correspond à un choix G/D dans une boîte, un produit correspond à un choix dans des boîtes incrustées ou encore dans des multiboîtes [8].

Deux tranches $\epsilon_1\mathfrak{a}_1 \cdot \ldots \cdot \epsilon_k\mathfrak{a}_k$ et $\eta_1\mathfrak{b}_1 \cdot \ldots \cdot \eta_l\mathfrak{b}_l$ sont *compatibles* quand $\epsilon_1\mathfrak{a}_1 \cdot \ldots \cdot \epsilon_k\mathfrak{a}_k \cdot \eta_1\mathfrak{b}_1 \cdot \ldots \cdot \eta_l\mathfrak{b}_l$ est encore une tranche, i.e., quand aucun $\epsilon_i\mathfrak{a}_i$ n'est égal à un $\widetilde{\eta_j}\mathfrak{b}_j$.

On appelle *étoile* une expression de partie droite une tranche avec deux cas :

— $[\![\, \lambda_1 t_1 + \cdots + \lambda_n t_n \mid \epsilon_1\mathfrak{a}_1 \cdot \ldots \cdot \epsilon_k\mathfrak{a}_k \,]\!]$ $(n \neq 0)$ où les λ_i sont non nuls et les t_i, deux à deux disjoints, le sont aussi des $\mathfrak{a}_i$. Ils doivent avoir exactement les mêmes variables (au moins une).

— Les *marqueurs* $[\![\, \epsilon\mathfrak{a} \mid \epsilon_1\mathfrak{a}_1 \cdot \ldots \cdot \epsilon_k\mathfrak{a}_k \,]\!]$ où $\mathfrak{a}$ est disjoint des $\mathfrak{a}_i$.

Les sous-espaces associés aux poids et étoiles sont

$$\begin{array}{rcl}
|\downarrow\mathfrak{a}| & := & \kappa_{\mathfrak{a}\omega}\alpha_{\mathfrak{a}\omega} \\
|\uparrow\mathfrak{a}| & := & \alpha_{\mathfrak{a}\omega}\kappa_{\mathfrak{a}\omega} \\
|[\![\, \lambda_1 t_1 + \cdots + \lambda_n t_n \mid \epsilon_1\mathfrak{a}_1 \cdot \ldots \cdot \epsilon_k\mathfrak{a}_k \,]\!]| & := & \Lambda|[\![\, \lambda_1 t_1 + \cdots + \lambda_n t_n \,]\!]| \cap |\epsilon_1\mathfrak{a}_1| \cap \ldots \cap |\epsilon_k\mathfrak{a}_k| \\
|[\![\, \epsilon\mathfrak{a} \mid \epsilon_1\mathfrak{a}_1 \cdot \ldots \cdot \epsilon_k\mathfrak{a}_k \,]\!]| & := & |\epsilon\mathfrak{a}| \cap |\epsilon_1\mathfrak{a}_1| \cap \ldots \cap |\epsilon_k\mathfrak{a}_k|
\end{array}$$

Reste à redéfinir la notion de constellation comme ensemble d'étoiles deux à deux *compatibles*. Deux étoiles dont les tranches respectives sont incompatibles sont automatiquement compatibles ; intuition, elles viennent de prémisses distinctes d'un « & ». Sinon, les cas de compatibilité sont les suivants :

— $[\![\, \lambda_1 t_1 + \cdots + \lambda_n t_n \mid \epsilon_1\mathfrak{a}_1 \cdot \ldots \cdot \epsilon_k\mathfrak{a}_k \,]\!]$ et $[\![\, \mu_1 u_1 + \ldots + \mu_p u_p \mid \eta_1\mathfrak{b}_1 \cdot \ldots \cdot \eta_l\mathfrak{b}_l \,]\!]$ où les les t_i sont disjoints des u_j.

— $[\![\, \lambda_1 t_1 + \cdots + \lambda_n t_n \mid \epsilon_1\mathfrak{a}_1 \cdot \ldots \cdot \epsilon_k\mathfrak{a}_k \,]\!]$ et $[\![\, \eta\mathfrak{b} \mid \eta_1\mathfrak{b}_1 \cdot \ldots \cdot \eta_l\mathfrak{b}_l \,]\!]$ où les t_i sont disjoints de $\mathfrak{b}$.

— $[\![\, \epsilon\mathfrak{a} \mid \epsilon_1\mathfrak{a}_1 \cdot \ldots \cdot \epsilon_k\mathfrak{a}_k \,]\!]$ et $[\![\, \eta\mathfrak{b} \mid \eta_1\mathfrak{b}_1 \cdot \ldots \cdot \eta_l\mathfrak{b}_l \,]\!]$ avec $\eta\mathfrak{b} \neq \widetilde{\epsilon}\mathfrak{a}$.

Les projecteurs associés à des étoiles compatibles commutent sans être forcément disjoints. Dans le cas où les tranches sont compatibles, ils ne sont disjoints que si aucune des deux étoiles n'est un marqueur. Une constellation ne correspond donc pas à une somme de projecteurs, ce qui en ferait un hermitien positif, mais à une somme de sous-espaces. Cette somme peut s'écrire algébriquement, e.g., $[\![\, t+u| \,]\!] + [\![\, \downarrow\mathfrak{a}| \,]\!] - [\![\, t+u| \,]\!] \cdot [\![\, \downarrow\mathfrak{a}| \,]\!]$; je la note avec le symbole $\uplus$, e.g., $[\![\, t+u| \,]\!] \uplus [\![\, \downarrow\mathfrak{a}| \,]\!]$.

Les conditions de compatibilité distinguent $[\![\, \downarrow\mathfrak{a}|\uparrow\mathfrak{b} \,]\!]$ et $[\![\, \uparrow\mathfrak{b}|\downarrow\mathfrak{a} \,]\!]$. Si $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ correspondent (cf. *infra*) aux additifs $A = A' \,\&\, A''$, $B = B' \,\&\, B''$, le premier marque un Plus droit $(\sim A' \oplus \sim A'')$ dans la branche droite de B, le second un Plus gauche $(\sim B' \oplus \sim B'')$ dans la branche gauche de A.

2.5 Les additifs

On reprend les constructions de [4] avec trois constantes distinctes, $\mathtt{l}, \mathtt{r}, \mathtt{m}$. Si C est une combinaison additive $A \,\&\, B$ ou $A \oplus B$, on définit $p_A(x) := p_C(\mathtt{l} \cdot x), p_B(x) := p_C(\mathtt{r} \cdot x)$ ainsi que les poids $\epsilon\widehat{C} := \epsilon p_C(\mathtt{m})$.

& : si la démonstration π de $\vdash \Gamma, A \,\&\, B$ vient de démonstrations ν de $\vdash \Gamma, A$ et μ de $\vdash \Gamma, B$ interprétées par les constellations $\nu^\bullet$ et $\mu^\bullet$ alors $\pi^\bullet := \nu^\bullet \cdot {\downarrow}\widehat{C} \uplus \mu^\bullet \cdot {\uparrow}\widehat{C}$.

$\oplus_L$ (resp. $\oplus_R$) : si la démonstration π of $\vdash \Gamma, A \oplus B$ vient d'une démonstration ν of $\vdash \Gamma, A$ (resp. $\vdash \Gamma, B$), alors $\pi^\bullet := \nu^\bullet \uplus [\![{\uparrow}\widehat{C} | \,]\!]$ (resp. $\pi^\bullet := \nu^\bullet \uplus [\![{\downarrow}\widehat{C} | \,]\!]$).

Le cas du « & » superpose deux réseaux en discriminant ce qui vient de chaque prémisse : un poids ${\downarrow}\widehat{C}$ à gauche, un poids ${\uparrow}\widehat{C}$ à droite. Ce qui signifie qu'une étoile $[\![- \,|\, \epsilon_1\mathfrak{a}_1 \cdot \ldots \cdot \epsilon_k\mathfrak{a}_k]\!]$ devient $[\![- \,|\, \epsilon_1\mathfrak{a}_1 \cdot \ldots \cdot \epsilon_k\mathfrak{a}_k \cdot {\downarrow}\widehat{C}]\!]$ ou $[\![- \,|\, \epsilon_1\mathfrak{a}_1 \cdot \ldots \cdot \epsilon_k\mathfrak{a}_k \cdot {\uparrow}\widehat{C}]\!]$. Le cas du « Plus » utilise des marqueurs inattendus, e.g., un « $\uparrow$ » pour la règle gauche alors qu'on attendait « $\downarrow$ ».

Voyons comment tout cela fonctionne en restant le plus informel possible pour ne pas noyer les idées dans un déluge symbolique.

— L'introduction des poids $\epsilon\widehat{C}$ permet de construire des boîtes « ouvertes », capables de communiquer avec tout ce qui n'utilise pas $\widetilde{\epsilon}\widehat{C}$ comme poids. Cela évite d'avoir à reconstruire les boîtes dans de laborieuses « réductions commutatives ».

— Faisant partie de notre espace, $\epsilon\widehat{C}$ peut lui même changer lors de la normalisation, ce qui n'est pas le cas des booléens externes que seul un *Deus ex machina* pouvait modifier.

— Chose la plus importante, la normalisation de la coupure $\&/\oplus$, disons $\&/\oplus_L$: comment une « tranche » $\nu^\bullet \cdot {\downarrow}\widehat{C}$ peut-elle redevenir le $\nu^\bullet$ original ? En fait $\nu^\bullet = \nu^\bullet \cdot ({\downarrow}\widehat{C}) \uplus (\nu^\bullet \cdot {\uparrow}\widehat{C})$ alors que nous sommes en présence de $\nu^\bullet \cdot ({\downarrow}\widehat{C}) \uplus {\uparrow}\widehat{C}$, projecteur qui sera « raboté » (cf. 2.3) en $\nu^\bullet$. Le rabot n'utilise de ${\uparrow}\widehat{C}$ que sa partie $\nu^\bullet \cdot ({\downarrow}\widehat{C})$.

Tout ça se retrouve dans la normalisation des constellations colorées.

— $[\![\ldots + \lambda_i t_i + \ldots + \lambda_{n+1}\boxed{t_{n+1}} \,|\, T]\!] \uplus [\![\mu_0 u_0 + \ldots + \mu_k u_k + \ldots \,|\, U]\!]$ devient $[\![\ldots + \lambda_i \mu_0 t_i \theta + \ldots - \lambda_{n+1}\mu_k u_k \theta + \ldots \,|\, T, U]\!]$ pourvu que le PGCU θ de t_{n+1} et u_0 ne soit pas clos et que T et U soient compatibles.

— $[\![- \,|\, \epsilon_1\mathfrak{a}_1 \cdot \ldots \cdot \epsilon_n\mathfrak{a}_n, \boxed{\epsilon\mathfrak{a}}]\!] \uplus [\![\widetilde{\epsilon}\mathfrak{a} \,|\, \eta_1\mathfrak{b}_1 \cdot \ldots \cdot \eta_l\mathfrak{b}_l]\!]$ se normalise en $[\![- \,|\, \epsilon_1\mathfrak{a}_1 \cdot \ldots \cdot \epsilon_n\mathfrak{a}_n, \eta_1\mathfrak{b}_1 \cdot \ldots \cdot \eta_l\mathfrak{b}_l]\!]$ pourvu que les tranches respectives soient compatibles. *Idem* en échangeant `vert` et `magenta`.

2.6 Le rôdeur devant le seuil

Reste un cas, celui d'une coupure terme/poids, disons $\boxed{t}$ contre $\eta\mathfrak{b}$: $[\![\, \lambda_1 t_1 + \ldots + \lambda_n t_n + \lambda_{n+1}\boxed{t_{n+1}} \mid \epsilon_1\mathfrak{a}_1, \ldots, \epsilon_n\mathfrak{a}_n \,]\!] \uplus [\![\, \eta\mathfrak{b} \mid \eta_1\mathfrak{b}_1, \ldots, \eta_l\mathfrak{b}_l \,]\!]$. Si les tranches sont compatibles et si l'unification réussit, i.e., si $t_{n+1}\theta = \mathfrak{b}$, la forme normale s'écrit alors $[\![\, \eta(\lambda_1 t_1\theta + \ldots + \lambda_n t_n\theta) \mid \epsilon_1\mathfrak{a}_1, \ldots, \epsilon_n\mathfrak{a}_n, \eta_1\mathfrak{b}_1, \ldots, \eta_l\mathfrak{b}_l \,]\!]$.

$[\![\, \lambda_1 t_1 + \ldots + \lambda_n t_n + \lambda_{n+1}\boxed{t_{n+1}} \mid \epsilon_1\mathfrak{a}_1, \ldots, \epsilon_n\mathfrak{a}_n \,]\!] \uplus [\![\, - \mid \eta\mathfrak{b}, \eta_1\mathfrak{b}_1, \ldots, \eta_l\mathfrak{b}_l \,]\!]$ se normalise de même en $[\![\, - | \epsilon_1\mathfrak{a}_1, \ldots, \epsilon_n\mathfrak{a}_n, \eta(\lambda_1 t_1\theta + \ldots + \lambda_n t_n\theta), \eta_1\mathfrak{b}_1, \ldots, \eta_l\mathfrak{b}_l \,]\!]$.

Ça ne fonctionne pas à cause des $\eta(\lambda_1 t_1\theta + \ldots + \lambda_n t_n\theta)$ qui sortent du format ; en effet la définition nous restreint à des $\eta\mathfrak{a}$ où $\mathfrak{a}$ est un terme clos.

Le cas le plus fréquent est $n = 1$ (étoile binaire) où l'on se retrouve avec $\eta\lambda_1 t_1\theta$; il n'y a pas de mal car on peut négliger λ_1 qui était à l'origine défini à un scalaire multiplicatif près et utiliser $\eta t_1\theta$.

Le cas $n = 0$ qui mènerait à $\eta 0$ doit être considéré comme un échec de la normalisation, mais *quid* de $n = 2$? Les étoiles ternaires posent un problème qu'on est tenté d'évacuer par un simple resserrage de boulons, en décrétant que toutes les étoiles sont binaires. Ce qui s'accorde pourtant avec les restrictions venues de la tradition logique dont la seule véritable règle sans prémisse, l'identité $\vdash A, \sim A$, donne lieu à des étoiles binaires. On peut alors refermer la porte et produire des réseaux de démonstration incluant les additifs, version améliorée de ceux proposés dans [2], qui utilisaient des poids formés de sommes de monômes, i.e., de tranches dans le sens défini *supra.*

Ce faisant, nous nous privons d'acquis récents [5] qui rompaient avec le pénible essentialisme ambiant : la vérité comme qualité de ce qui est vrai (Tarski), l'égalité définie au second ordre (!) à partir des propriétés compatibles avec... l'égalité (Leibniz) et les entiers que les axiomes n$^{\text{os}}$ 3 et 4 de Peano font tomber du Ciel comme une quelconque notion algébrique.

Nous refermons temporairement cette porte pour des questions de lisibilité mais nous devrons la rouvrir bientôt et normaliser le cas $n \geq 2$. Que se cache-t-il donc derrière ? Ni plus ni moins que le quantique qui s'invite ainsi *naturellement* dans le débat logique ; je veux dire qu'il ne s'agit pas d'une erreur de la Physique coupable de désobéir à des diktats logiques centenaires. Sans rentrer dans le détail disons que $\eta(\lambda_1 t_1\theta + \lambda_2 t_2\theta)$ (avec $|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 = 1$) pourrait être compris de façon non déterministe comme $\eta t_1\theta$ ou $\eta t_2\theta$ avec les probabilités respectives $|\lambda_1|^2$ et $|\lambda_2|^2$; cf. [7].

A Questions à clarifier

Notre définition des constellations interdit de former $[\![t+u]\!]+[\![t-u]\!]$ bien que les projecteurs associés soient orthogonaux. De même, (6) fonctionnerait dans le cas de $[\![\boxed{t-u}]\!] + [\![t-u+v]\!]$ alors que les définitions de [3] rejettent ce cas, qui produit un cycle. On observera que le choix des coefficients est déterminant : $[\![t+u]\!]+[\![t+iu]\!]$ ne commutent pas et $[\![\boxed{t-u}]\!] + [\![t+u+v]\!]$ donne un résultat nul.

On ne peut pas repousser ce problème sous la carpette. Je tente donc une explication, qui vaut ce qu'elle vaut. C'est le point de vue logique qui doit être privilégié et donc tout doit être calculable, ce qui oblige à se restreindre à des coefficients algébriques comme $1/2, \sqrt{2}/2, i$ qui permettent des calculs exacts. D'autre part une certaine continuité est nécessaire, ce qui veut dire que ces coefficients pourraient être légèrement modifiés sans produire de changement majeur. Ce qui exclut $[\![t+u]\!] + [\![t-u]\!]$ car $[\![t+u]\!]$ et $[\![\lambda t - \lambda u]\!]$ ne sont plus orthogonaux dès que $\lambda \neq 1$.

Nous avons par ailleurs laissé de côté le cas des exponentielles $!A$ et $?A$. Elles sont basées sur la construction de copies indiscernables, ce qui suggère un lien avec fermions et bosons. À suivre...

Et n'oublions pas de dessiner, enfin, les réseaux pour le fragment multiplicatif/additif de la logique. Ils doivent contenir des marqueurs pour les règles « $\oplus$ » et des « multiliens » pour représenter les tranches, par exemple, si $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ correspondent à $A' \,\&\, A'', B' \,\&\, B''$, un lien coordonné vers A' et B'' pour parler de $\downarrow \mathfrak{a} \cdot \uparrow \mathfrak{b}$.

Références

[1] J.-Y. Girard. **Linear logic**. *Theoretical Computer Science*, 50 :1 – 102, 1987.

[2] J.-Y. Girard. **Proof-nets : the parallel syntax for proof-theory**. In Ursini and Agliano, editors, *Logic and Algebra*, New York, 1996. Marcel Dekker.

[3] J.-Y. Girard. **Transcendental syntax 1 : deterministic case**. *Mathematical Structures in Computer Science*, pages 1–23, 2015. *Computing with lambda-terms. A special issue dedicated to Corrado Böhm for his 90th birthday.*

[4] J.-Y. Girard. **Transcendental syntax 2 : non deterministic case**. *Logical Methods in Computer Science*, 2016. *Special issue dedicated to Pierre-Louis Curien for his 60th birthday.*

[5] J.-Y. Girard. **Transcendental syntax 4 : logic without systems**. Technical report, http ://girard.perso.math.cnrs.fr/trsy4.pdf, 2020.

[6] J.-Y. Girard. **Schrödinger's cut : la logique à la lumière du quantique**. Technical report, http ://girard.perso.math.cnrs.fr/chat.pdf, 2021.

[7] J.-Y. Girard. **Schrödinger's cut III : les univers parallèles**. Technical report, http ://girard.perso.math.cnrs.fr/chat.pdf, 2022.

[8] L. Tortora de Falco. **The additive multiboxes**. *Annals of Pure and Applied Logic*, 120 :65 – 102, 2003.

Jean-Yves Girard
Directeur de Recherches émérite
jeanygirard@gmail.com

vitam impendere logicæ