# Schrödinger's cut III

**Les univers parallèles**

**Jean-Yves Girard**

29 décembre 2022

La notion d'univers parallèle n'a guère donné lieu qu'à de laborieuses pièces montées, des empilages de modèles à la Kripke. De deux choses l'une, soit c'est une (sympathique) ânerie de science-fiction, soit c'est quelque chose de fondamental qui ne peut pas être traité sur le mode du bricolage.

Ces univers apparaissent avec la disjonction constructive, le « ou » intuitionniste ou encore le « plus » additif qui en est la version épurée.

Dans le cas intuitionniste, ce sont les prémisses mineures de l'élimination

$$\dfrac{\begin{matrix} \vdots \\ A\vee B\end{matrix}\qquad \begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ C\end{matrix}\qquad \begin{matrix}[B]\\ \vdots\\ C\end{matrix}}{C}$$

qui jouent le rôle d'univers parallèles. Dont la stabilité est garantie par de fausses règles de normalisation, dites « commutatives », e.g.,

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ C\end{matrix}\qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\A\vee B\end{matrix}\quad\begin{matrix}[A]\\\vdots\\C\Rightarrow D\end{matrix}\quad\begin{matrix}[B]\\\vdots\\C\Rightarrow D\end{matrix}}{C\Rightarrow D}}{D} \quad\rightsquigarrow\quad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\A\vee B\end{matrix}\qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\C\end{matrix}\quad\begin{matrix}[A]\\\vdots\\C\Rightarrow D\end{matrix}}{D}\qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\C\end{matrix}\quad\begin{matrix}[B]\\\vdots\\C\Rightarrow D\end{matrix}}{D}}{D}$$

*Idem* pour le connecteur linéaire $\oplus$ dont les règles d'élimination, et donc d'introduction de son dual & demandent des « boîtes », ou plutôt des multiboîtes [2] pour gérer la commutation &/&.

La nouveauté introduite dans [1] permet d'éviter toute forme de commutation en utilisant les poids complémentaires $\downarrow\mathfrak{a}$ et $\uparrow\mathfrak{a}$. Les univers parallèles existent donc bien, mais un peu en sursis : un « & » a pour vocation d'être « coupé » avec un « $\oplus$ », ce qui se traduit par le restauration d'une démonstration « pleine » à partir d'une des deux « tranches » parallèles.

L'idée fondamentale est que le quantique crèe des cas où cette restauration n'a pas lieu. Souvenons-nous de [1] et du cas, induit par des étoiles d'arité $> 2$, où sont créés des poids $\epsilon\mathfrak{a}$ où $\mathfrak{a}$ n'est pas un terme clos du langage $\mathcal{L}$ mais une combinaison linéaire. Le problème n'est pas tout à fait où on le croit, la structure obtenue continuant à observer les contraintes de compatibilité. Il est par contre dans le conflit possible au niveau des poids $\epsilon\boxed{\mathfrak{a}}$ et $\eta\mathfrak{b}$ : dès que $< \mathfrak{a}\omega \mid \mathfrak{b}\omega > \neq 0, 1$, ces deux poids ne sont plus dans une position franche.

Se superpose une autre difficulté, celle où $\epsilon$ et $\eta$ se positionnent obliquement l'un par rapport à l'autre : car $\downarrow$ et $\uparrow$ ne sont que les pôles N et S d'une « direction » de la forme $\epsilon = 1/2 \cdot \begin{pmatrix} 1+\sin x & e^{iz}\cos x \\ e^{-iz}\cos x & 1-\sin x \end{pmatrix}$ avec $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ (déclinaison) et $0 \leq z < 2\pi$ (ascension droite). Ce qui le situe ainsi sur une sphère ; son antipode $\widetilde{\epsilon}$ correspond à $-x, z \pm \pi$, soit $1/2 \cdot \begin{pmatrix} 1-\sin x & -e^{iz}\cos x \\ -e^{-iz}\cos x & 1+\sin x \end{pmatrix}$. On vérifie que $\epsilon = \epsilon^* = \epsilon^2$ et $\mathrm{tr}(\epsilon) = 1$ ; $\epsilon$ est donc le projecteur d'un sous-espace de dimension 1 ; son antipode $\widetilde{\epsilon}$ correspond à $I - \epsilon$, projecteur du sous-espace orthogonal à l'image de $\epsilon$. L'angle entre deux directions $\epsilon$ et $\eta$ est donné par son cosinus $2\mathrm{tr}(\epsilon\eta) - 1$.

Les notions de [1] sont libéralisées ainsi :

— Une tranche est un produit $\epsilon_1\mathfrak{a}_1 \cdot \ldots \cdot \epsilon_k\mathfrak{a}_k$ où les $\epsilon_i$ sont des directions et les $\mathfrak{a}_i$ sont deux à deux orthogonaux. On peut, comme précédemment, admettre des répétitions $\epsilon_i\mathfrak{a}_i = \epsilon_j\mathfrak{a}_j$, ce qui ne change rien mais rend la formulation plus souple. Deux tranches sont *compatibles* quand leur produit est encore une tranche. Deux tranches $\epsilon_1\mathfrak{a}_1 \cdot \ldots \cdot \epsilon_k\mathfrak{a}_k$ et $\eta_1\mathfrak{b}_1 \cdot \ldots \cdot \eta_l\mathfrak{b}_l$ sont *adverses* quand leur produit est nul ; ce qui veut dire qu'un $\eta_j\mathfrak{b}_\mathfrak{j}$ est égal à un $\widetilde{\epsilon_i}\mathfrak{a}_i$.

— Les étoiles $[\![\, \lambda_1 t_1 + \ldots + \lambda_n t_n \,|\, \epsilon_1\mathfrak{a}_1 \cdot \ldots \cdot \epsilon_k\mathfrak{a}_k \,]\!]$ ou $[\![\, \epsilon\mathfrak{a} \,|\, \epsilon_1\mathfrak{a}_1 \cdot \ldots \cdot \epsilon_k\mathfrak{a}_k \,]\!]$ sont définies comme précédemment, avec une contrainte : les $\mathfrak{a}_i\omega$ doivent être orthogonaux au sous-espace associé à $\lambda_1 t_1 + \ldots + \lambda_n t_n$ ou à $\mathfrak{a}\omega$ selon le cas.

La compatibilité entre étoiles distingue le cas des tranches adverses, auquel cas les étoiles sont toujours compatibles, et celui des tranches compatibles :

— $[\![\, \lambda_1 t_1 + \cdots + \lambda_n t_n \,|\, \epsilon_1\mathfrak{a}_1 \cdot \ldots \cdot \epsilon_k\mathfrak{a}_k \,]\!]$ et $[\![\, \mu_1 u_1 + \ldots + \mu_p u_p \,|\, \eta_1\mathfrak{b}_1 \cdot \ldots \cdot \eta_l\mathfrak{b}_l \,]\!]$

où les les $t_i$ sont disjoints des $u_j$.

— $[\![\, \lambda_1 t_1 + \cdots + \lambda_n t_n \mid \epsilon_1 \mathfrak{a}_1 \cdot \ldots \cdot \epsilon_k \mathfrak{a}_k \,]\!]$ et $[\![\, \eta \mathfrak{b} \mid \eta_1 \mathfrak{b}_1 \cdot \ldots \cdot \eta_l \mathfrak{b}_l \,]\!]$ où $\mathfrak{b}\omega$ est orthogonal à l'espace associé à $\lambda_1 t_1 + \cdots + \lambda_n t_n$.

— $[\![\, \epsilon \mathfrak{a} \mid \epsilon_1 \mathfrak{a}_1 \cdot \ldots \cdot \epsilon_k \mathfrak{a}_k \,]\!]$ et $[\![\, \eta \mathfrak{b} \mid \eta_1 \mathfrak{b}_1 \cdot \ldots \cdot \eta_l \mathfrak{b}_l \,]\!]$ avec $\mathfrak{a}\omega \perp \mathfrak{b}\omega$.

Reste à expliquer la normalisation dont le seul cas intéressant est celui d'une somme $[\![\, - | \epsilon_1 \mathfrak{a}_1 \cdot \ldots \cdot \epsilon_n \mathfrak{a}_n, \boxed{\epsilon \mathfrak{a}} \,]\!] \uplus [\![\, \eta \mathfrak{b} | \eta_1 \mathfrak{b}_1 \cdot \ldots \cdot \eta_l \mathfrak{b}_l \,]\!]$, et celui, symétrique, où les couleurs sont permutées.

La solution consiste à remplacer $\eta \mathfrak{b}$ par $\widetilde{\epsilon} \mathfrak{a}$ ; en quelque sorte, l'appareil « classique » ($\epsilon \boxed{\mathfrak{a}}$) a mesuré la particule ($\eta \mathfrak{b}$). Ce choix se fait avec une probabilité égale à $\mathrm{tr}(\widetilde{\epsilon}\eta) \cdot < \mathfrak{a}\omega \mid \mathfrak{b}\omega >^2$. Mais ce n'est pas tout, il faut encore le synchroniser avec les autres choix, par exemple l'opposition entre $\eta \mathfrak{b}$ et $\widetilde{\epsilon} \mathfrak{a}$ qui devrait se solder par un remplacement de $\eta \mathfrak{b}$ par $\epsilon \boxed{\mathfrak{a}}$ avec la probabilité $\mathrm{tr}(\epsilon\eta) \cdot < \mathfrak{a}\omega \mid \mathfrak{b}\omega >^2$. Compliqué, sauf à garder les tranches : on introduit la fonction unaire `mg` comme doublon non coloré de la couleur `magenta`. $[\![\, \eta \mathfrak{b} \mid \eta_1 \mathfrak{b}_1 \cdot \ldots \cdot \eta_l \mathfrak{b}_l \,]\!]$ est alors remplacé par $[\![\, \widetilde{\epsilon} \mathfrak{a} \mid \widetilde{\epsilon} \mathtt{mg}(\mathfrak{a}) \cdot \eta_1 \mathfrak{b}_1 \cdot \ldots \cdot \eta_l \mathfrak{b}_l \,]\!]$. Le choix s'effectue alors dans la tranche $\widetilde{\epsilon} \mathtt{mg}(\mathfrak{a})$ qui ne peut pas interagir avec celle de $\epsilon \mathtt{mg}(\mathfrak{a})$, etc. Cette tranche a l'épaisseur $\mathrm{tr}(\widetilde{\epsilon}\eta) \cdot < \mathfrak{a}\omega | \mathfrak{b}\omega >^2$, soit 100% au cas où $\eta \mathfrak{b}$ est déjà dans la bonne position $\widetilde{\epsilon} \mathfrak{a}$. En cas de compatibilité, ces épaisseurs se combinent par produit.

Vu de l'extérieur, on est bien dans une situation d'univers parallèles. Ils sont gouvernés par la structure logique de l'élimination des coupures et non par un diktat du réalisme axiomatique. Je m'arrête faute de recul...

# Références


[1] J.-Y. Girard. **Schrödinger's cut II : les additifs à la lumière du quantique**. Technical report, http ://girard.perso.math.cnrs.fr/chat.pdf, 2022.

[2] L. Tortora de Falco. **The additive multiboxes**. *Annals of Pure and Applied Logic*, 120 :65 – 102, 2003.



Jean-Yves Girard
Directeur de Recherches émérite
jeanygirard@gmail.com


vitam impendere logicæ