Normativité et vérité : récuser ou réfuter ?

Jean-Yves Girard

NORMES, Créteil 28–29 novembre 2024.

« La question ne sera pas posée » répétait, en 1898, le président Delegorgue lors du procès Zola. Cette *récusation* visait à interdire toute discussion sur l'affaire Dreyfus ; une *réfutation* de l'innocence du capitaine eût été préférable, mais vu la situation, il était plus sage d'empêcher qu'on évoquât le sujet. Cet exemple montre que le *normatif* est plus puissant que l'*aléthique* : par delà le vrai et le faux, il y a le licite et l'illicite. Nous allons traquer la relation entre récusation et réfutation dans le cadre désincarné de la Logique, une relation qui a longtemps été obscurcie par le réductionnisme fondationnel qui écrase les nuances jusqu'à produire des contresens. On pense au traducteur `Google` qui *réduit* tout à l'anglais, si bien que le français « ressort » transite par l'intermédiaire « spring » pour arriver à l'italien « primavera »!

Si l'on admet que le but du raisonnement est la production de vérités, la question est de savoir si elles sont dignes de foi. Il y a quelque part des normes à respecter.

Commençons avec la vérité tombée du Ciel : un infaillible décrète qu'il n'y a pas de réchauffement climatique – il a d'ailleurs ses propres chiffres qu'il serait déloyal de lui demander. Cela s'appelle post-vérité ou encore paraconsistance : il s'agit d'une affirmation gratuite à destination des débiles légers. Oublions Trump et imaginons une ampoule grillée, soigneusement rangée dans son emballage : un bel objet paraconsistant qui se comporte comme une véritable ampoule tant qu'on n'a pas l'idée saugrenue de la brancher sur le 220V. Idée fondamentale donc,

ce qui est vrai doit fonctionner,

autrement dit on peut en tirer des conséquences logiques ; et pas uniquement celles qui nous arrangent.

Ce gag totalitaire écarté, on se retrouve face à des *systèmes* basés sur des interdits ; tombés du Ciel ils ont cependant l'avantage de garantir le fonctionnement du raisonnement. Avec le danger de surnormer : c'est le cas des ukases religieux, par exemple celui qui interdit – on a oublié pourquoi – de mélanger viande et laitages, pour le plus grand bénéfice de `Whirlpool` qui vend deux lave-vaisselle quand un seul suffirait amplement. Quiconque se réclame de ce type de normativité se définit comme « celui qui ne ... pas ».

Exemple logique de normativité « identitaire », le refus par certains de l'involutivité du connecteur $\sim A$, au prétexte que, sur la base d'une critique du raisonnement par l'absurde [1], les textes sacrés du constructivisme refuseraient l'involutivité de la négation : le précepte survit à la disparition du danger. Cet ukase a donné lieu à un système parasitaire, la logique linéaire *intuitionniste*, sorte de double contrainte, de restriction gratuite. À vrai dire, quelle idée saugrenue avais-je eu d'appeller $\sim A$ « négation linéaire » ? J'ai finalement opté pour le mot « contraire » dont l'involutivité n'indispose aucune secte.

En arrivant, au terme d'un long processus [3], à me restreindre aux contraintes *nécessaires* et donc, à me passer totalement de systèmes, j'ai mis fin à des nuances inutiles dues à leur pesanteur, leur surnormativité. C'est ainsi que j'ai réussi à réconcilier deux disjonctions, l'intuitionniste $\vee$ et l'additive $\oplus$ que le calcul des séquents – meilleur de tous les systèmes, mais système tout de même – s'obstinait à distinguer.

Pour trouver une raison aux interdits des systèmes, la seule possibilité réside dans la recherche d'un « envers » du raisonnement, encore faut-il se garder des réponses hâtives. Première idée, le contre-modèle : d'un côté les démonstrations de A, de l'autre les modèles de $\neg A$. C'est pour le moins sommaire car il s'agit d'une sorte de duel à mort, l'un ou l'autre mais pas les deux. Une approche qui souffre de sa malhonnêteté, sa tendance à tricher, ainsi pourquoi donc les modèles sont-ils non vides ? Tout simplement parce que les pères fondateurs ont oublié de *déclarer* leurs variables, ce qui est le rôle du quantificateur $\forall x$ qui introduit x. En présence d'une variable z non déclarée, on peut écrire $\forall x\, A[x] \Rightarrow A[z]$ et $A[z] \Rightarrow \exists\, y A[y]$ et donc $\forall x\, A[x] \Rightarrow \exists\, y A[y]$ [2]. Cette erreur est détectée par le modèle vide dans lequel les $\forall$ sont tous vrais et les $\exists$ faux. D'où l'emploi de la peu glorieuse « méthode Al Capone », l'élimination (récusation) du témoin gênant.

L'envers cherché ne correspond pas à la négation $\neg A$, trop radicale, mais plutôt au contraire (cf. *supra*) $\sim A$, plus souple. Si la coexistence de A et $\neg A$ est une antinomie rédhibitoire, A n'exclut pas vraiment $\sim A$; il y a même des

1. Critique qui ne vaut pourtant qu'en présence de la règle de contraction qui permet de réutiliser des hypothèses.

2. On obtient la version correcte en déclarant z, soit $\forall z\, (\forall x\, A[x] \Rightarrow \exists\, y A[y])$

propositions auto-duales comme $\exists$ ($= \sim\exists$). Et donc la première idée est de chercher la norme de A à travers $\sim A$; idée développée en *ludique* [2] mais qui ne fonctionne pas sans un sévère resserrage de boulons : la norme de A est en fait donnée par $A \multimap \exists$. Ce ne sont que des nuances techniques – fondamentales pour mener à terme le travail de *désessentialisation* de la Loqique mais qu'on peut négliger en première approximation. La dualité consiste à faire interagir des preuves de A et $\sim A$ au moyen d'une procédure de *normalisation*. Laquelle se présente un peu comme un jeu ou un dialogue : idée due à Gentzen et développée mais un peu bousillée par Lorenzen dont la thèse est que A construit sa démonstration comme une stratégie gagnante. Face à un opposant que j'appelle $\sim A$ mais auquel la très réactionnaire « sémantique des jeux » refuse de donner un statut : il faut en effet être « intuitionniste » et l'échange des deux joueurs (le contraire involutif) sort du dogme. Même s'il n'a pas de statut, voyons comment fonctionne ce $\sim A$: il n'est autorisé à jouer que pour perdre, en cela il rappelle le contre-modèle $\neg A$ dont le seul droit était de ne pas exister. Mais où se trouve donc la règle du jeu ? Un arbitre qui supervise les actions des protagonistes décide de ce qui est ou non licite ; et A s'oppose à la fois à $\sim A$ et à l'arbitre, double peine ! Le bon sens nous dit qu'on devrait pouvoir se passer de règle du jeu mais c'est sans compter avec l'essentialisme ambiant, celui de la Théorie des Catégories.

Pour les Catégories, les objets naissent avec un pedigree qui gouverne leurs interactions en interdisant toute mésalliance. On pense à *L'Inde fantôme* de Louis Malle et à ce village où il y a un puits par caste alors qu'il serait plus raisonnable de n'en utiliser qu'un seul. Le principe logique le plus simple est l'implication $A \multimap A$ qui prend la forme d'une rallonge électrique avec aux extrémités des prises, l'une mâle (entrée A) l'autre femelle (sortie A). Ces embouts aux formes extrêmement variées, qui servent à enrichir `Apple` sous prétexte d'interdire des branchements erronés, ont leur analogue dans les Catégories et les sémantiques de jeux : une stratégie pour A ne peut être opposée qu'à une stratégie pour $\sim A$, sinon à quoi bon l'arbitre ?

Cette prégnance de la règle du jeu est remise en cause par les *réseaux de démonstration* [1]. Pour savoir si une prétendue démonstration $\mathfrak{D}$ de A en est bien une, on la soumet à des tests qui cherchent à fabriquer des boucles dans $\mathfrak{D}$: si le résultat est connexe et acyclique quel que soit le test, alors $\mathfrak{D}$ est correcte. Mais, en l'absence d'arbitre, les mêmes tests s'appliquent à des énoncés différents : on sort donc des castes. Par exemple, un test pour $A \parr (B \otimes C)$ en est aussi un pour $(A \parr B) \otimes C$ et, comme qui peut le plus peut le moins, une démonstration de $(A \parr B) \otimes C$ en devient une de $A \parr (B \otimes C)$, à condition de réarranger le parenthésage. Contrairement aux Catégories, les réseaux pensent que l'eau du puits est la même pour toutes les castes. Cette idée, convenablement développée, permet d'expulser définitivement les systèmes.

La normativité s'exprime au moyen d'une dualité entre démonstrations de A et démonstrations de son contraire $\sim A$. Il s'agit en fait d'une co-construction, ce qu'on se permet d'un côté devenant une norme qui brime l'autre côté. Une classe arbitraire de démonstrations définit un contraire, puis un bicontraire qui se révèle stable. C'est l'idée de base mais sa mise en œuvre a pris 35 ans. Le pivot logique originel était une constante $\perp$ telle que $\sim A = A \multimap \perp$; la dualité normative devenant la *coupure* – forme stable du *Modus Ponens* – qui fait passer de A et $A \multimap \perp$ à $\perp$. Hélas, il n'y a aucune condition de possibilité pour $\perp$ qui n'est qu'un ectoplasme sémantique. On aurait dû s'en apercevoir au tout début, la construction de réseaux pour cette constante s'avérant impossible ; mais le réalisme ambiant – la douteuse priorité du signifié sur le signifiant – présentait le langage comme la verbalisation d'une réalité sémantique préexistante. L'acte libératoire est, au contraire, d'affirmer l'antériorité du signifiant ! Et donc, si la syntaxe de $\perp$ ne fonctionne pas, c'est que ce machin n'existe pas. Il a fallu trouver un autre pivot, c'est $\Game$ (wo), sorte de version corrigée de $\perp$ qui donne un sens logique à la fabrication des tests des réseaux.

La sortie des systèmes permet de résoudre le problème le plus agaçant de la Logique, le fait que l'égalité – de loin le prédicat le plus important – n'ait jamais eu droit qu'à un strapontin : pas de calcul des séquents sauf des machins *ad hoc* qu'il vaut mieux oublier, sans parler de la calamiteuse définition due à Leibniz qui en fait, à peu près, la qualité de ce qui est égal : « Toute propriété de a est propriété de b ». En oubliant, ce qui est possible dans un système qui filtre les « bonnes » propriétés, que ces dernières doivent être compatibles avec... l'égalité : exercice utile, prendre comme propriété *être à gauche de* « *est* » dans la définition précédente. Objection réaliste, ma propriété serait illicite car elle n'est pas « sémantique » : elle devrait s'appliquer au signifié et non à son signifiant. Comment donc reconnaître un tel type de propriété ? Un seul critère, elle ne distingue pas les égaux ! Ayant galéré des dizaines d'années sur l'égalité, j'ai tardivement réalisé le *jailbreak* : les prétendus individus logiques tombés du Ciel sont en fait des propositions $a, b, \ldots$ et leur égalité l'équivalence $a \equiv b$, à condition de ne pas rester dans le cadre classique (ou même intuitionniste qui ne fait pas mieux ici). Découverte due à une expérimentation sauvage sur le réseau associé à « Leibniz », i.e., $\forall X\,(X(a) \multimap X(b))$: au lieu de lier $\sim X(a)$ et $X(b)$, j'avais oublié les X et lié $\sim a$ et b, simplification immédiate et miraculeuse. À quoi servait donc le foutu X ? Tout simplement à forcer une gestion linéaire des propositions $\sim a, b$: car, dans un cadre « classique » où l'on pourrait contracter les individus, il n'y en aurait plus que deux, le vrai et le faux. Si l'on veut, X est une espèce de condom qui évite les contaminations « classiques ».

Autre défaut agaçant des systèmes, le fait que l'arithmétique, pourtant

partie intégrante de la Logique, conserve deux axiomes :

$$Sx \neq 0 \tag{3}$$
$$Sx = Sx \quad \Rightarrow \quad x = y \tag{4}$$

les numéros 3 et 4 de l'axiomatique de Peano. Ici aussi, le bricolage axiomatique n'avait que trop duré et il fallait *démontrer* ces principes.

La solution, que je ne vais pas expliquer, plonge au plus profond de la vérité. Revenons à l'infortunée sémantique des jeux dont l'idée était de traiter la vérité (l'aléthique, donc) au moyen des stratégies gagnantes d'un jeu dont la règle tombait du Ciel. Tout a changé depuis que l'objet fondamental de l'interaction n'est plus de déterminer qui a raison ou tort mais de savoir ce qui est licite ou illicite : le « perdant » ne sortant jamais des clous, le cadre normatif se moque éperdument de la dimension aléthique. Du point de vue normatif, outre les démonstrations « visibles », les vraies, il y en a beaucoup d'autres qui ne convainquent pas et dont les systèmes formels n'ont même pas idée. Car elles ne sont en fait que des chiens de garde d'une normativité interne – et non pas externe –, juste bons à mordre mais qui n'entrent pas dans la maison du maître, celle de la vérité. Morphologiquement correctes, elles pâtissent d'une débauche de ressources qui les disqualifie.

Ça permet incidemment de régler un vieux compte. Pour Tarski, la vérité était la qualité de ce qui est vrai, d'où son infâme définition qui la présuppose : « A est vrai quand il est vrai que A ». Pour éviter la comparaison avec la vertu dormitive de l'opium ou une blague sur La Palice, on invoque le complaisant « méta » : « A est vrai quand il est méta-vrai que A ». Autrement dit, nous n'avons pas l'article demandé (le vrai) mais nous l'aurons (le méta-vrai) la semaine prochaine... où l'on se verra promettre du méta-méta-vrai. Pyramide de Ponzi intellectuelle, l'approche tarskienne mérite le plus profond mépris.

C'est bien pire qu'une pyramide de Ponzi car Tarski n'a même pas raison. Comme toujours on ne voit pas les murs de sa prison : c'était le cas pour les individus logiques tombés du Ciel, ce l'est aussi pour la vérité. La vérité, celle qui justifie l'axiome (4), est incompatible avec le pléonasme tarskien. En effet, si l'on peut toujours définir la vérité de A comme la présence d'une démonstration visible, il n'y a pas moyen d'en tirer de table de vérité : l'exercice agaçant consistant à réduire le raisonnement à un prétendu substrat classique devient impraticable : (4), réduit à son prétendu squelette classique, est faux.

En résumé, norme et vérité sont issus du même moule, celui des démonstrations. La plupart, invisibles, ne sont que des chiens de garde, contraintes hors système, arbitrage sans arbitraire. La partie visible est formée de celles ce que nous reconnaissons comme démonstrations, celles qui entraînent la conviction et dont on peut tirer des conséquences.

A Herbrand

La première étape dans la voie de la désessentialisation est due à Herbrand (1930) dont le célèbre théorème anticipe les réseaux de démonstration.

Herbrand analyse le calcul des prédicats classique à travers des énoncés de la forme $Q\,\vec{x}\,\vec{y}\,A[\vec{x},\vec{y}]$ où les quantificateurs ont été regroupés en préfixe (c'est la forme *prénexe*) $\vec{x} = x^1, \ldots, x^m$ correspondant aux universels, $\vec{y} = y^1, \ldots, y^n$ aux existentiels. Les universels sont des paramètres (entrées) alors que les existentiels correspondent à des valeurs (sorties) ; tandis que Q reflète l'ordre dans lequel les $\forall x^i$ et $\exists y^j$ se présentent.

La démonstration se réduit au choix de valeurs $\vec{t} = t^1, \ldots, t^n$, lesquelles, une fois substituées aux $\vec{y}$, doivent être telles que $A[\vec{x},\vec{t}]$. Du moins dans un monde « linéaire » qui n'a trouvé ses marques que vers 1985 avec la logique éponyme [1]. En 1930 il s'agissait de logique classique et ce n'est pas un choix de valeurs $\vec{t}$ qu'il fallait considérer mais un éventail de possibilités (principe de contraction) $\vec{t_1} = t_1^1, \ldots, t_1^n; \ldots; \vec{t_k} = t_k^1, \ldots, t_k^n$ où k n'est pas spécifié : c'est dans ce nombre, de taille non bornée, que Herbrand localisait cet infini qu'il cherchait à éliminer. La condition étant que la disjonction de Herbrand

$$A[\vec{x},\vec{t_1}] \vee \ldots \vee A[\vec{x},\vec{t_k}]$$

soit une tautologie propositionnelle.

Mais cette condition nécessaire n'est suffisante que pour des préfixes très particuliers, ceux où les $\forall$ précèdent les $\exists$, par exemple $\forall x\,\exists y$, en excluant ainsi $\exists y\,\forall x$, un préfixe qui énonce que y ne dépend pas de x.

Deux voies s'offrent, toutes deux intéressantes :

Méthode Gentzen : en calcul des séquents la disjonction de Herbrand devient le séquent médian (*midsequent*) $\vdash A[\vec{x},\vec{t_1}], \ldots, A[\vec{x},\vec{t_k}]$. La condition est que l'application des règles logiques (quantification et règles structurelles) permet d'obtenir la conclusion désirée. Ce qui ne va pas de soi, ainsi le cas universel :

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, \forall x\, A} \tag{5}$$

exige-t-il que l'*eigenvariable* x n'apparaisse pas dans le contexte Γ.

Méthode Herbrand : on va écrire les x comme des fonctions formelles des y précédents ; ainsi, dans $\exists y^1\,\forall x^1\,\exists y^2\,\forall x^2\,A[x^1,x^2,y^1,y^2]$, $x^1 = f(y^1)$, $x^2 = g(y^1,y^2)$; mais il faut que la substitution soit possible.

Par exemple, dans $\exists y\,\forall x\,A[x,y]$, une solution $A[x,t[x]]$ où $t[x]$ dépend de x est refusée par Gentzen car on ne peut pas passer de $\forall x A[x,t[x]]$ à $\exists y\,\forall x\,A[x,y]$;

refusée aussi par Herbrand car $x = f(t[x]) = f(t[f(t[x])])$, etc. Autrement dit, l'*unification* (introduite par Herbrand à cet effet) $x = f(t[x])$ échoue.

La transformation formelle qui exprime les $\vec{x}$ en fonction des $\vec{y}$ n'est rien d'autre que la construction d'une démonstration linéaire de la négation – ou plutôt du contraire pour ne pas me faire allumer. Ainsi, dans l'exemple $\exists y^1\, \forall x^1\, \exists y^2\, \forall x^2, x^1 = f(y^1), x^2 = g(y^1, y^2)$ correspond à une hypothétique démonstration de $\forall y^1\, \exists x^1\, \forall y^2\, \exists x^2 \sim A[x^1, x^2, y^1, y^2]$ et la contrainte d'unification à la possibilité d'éliminer la coupure entre cette dernière et celle que l'on teste.

Incidemment, le travail de Gentzen induit lui aussi une remise en cause des systèmes à travers sa *propriété de la sous-formule* : une démonstration sans coupures de A ne sollicite que ses constituants, en aucune façon les autres énoncés du système.

B Bousilleurs

Quiconque a réfléchi à la Logique a fatalement compris que la dichotomie vrai/faux est pour le moins discutable. C'est elle qui permet le raisonnement par l'absurde, sorte de 49.3 logique : « Je vais lui faire une proposition qu'il ne pourra refuser ». Cette observation, qui mène à la logique intuitionniste, se retrouve telle quelle dans le cadre linéaire. Mais les autodidactes n'ont pas leur pareil pour transformer une objection intéressante en ânerie : leur moteur est trop puissant pour leur train arrière. C'est ainsi que j'ai eu entre les mains, pour avis, une monographie dont le thème était : « 15 valeurs, sinon rien ! », l'auteure pensant ainsi échapper au tiers exclu. Quitte à adjoindre une valeur inutile on peut supposer qu'elles sont au nombre de $16 = 2^4$; une proposition A à 16 valeurs peut alors se traiter au moyen de A_1, A_2, A_3, A_4 où, disons, A_3 est vrai ou faux selon le troisième chiffre, depuis la droite, de l'écriture binaire de la valeur de A, vrai pour la valeur sept ($= 0\mathbf{1}11$), faux pour la valeur onze ($= 1\mathbf{0}11$). On croit sortir de la prison alors que, comme l'abbé Faria du *Comte de Monte Cristo*, on n'a fait que changer de cellule, i.e., reculer pour mieux sauter.

Autre remarque intéressante, les informaticiens ont observé qu'une banque n'a pas de fichier de ses non-clients ; et pourtant elle peut répondre « M. X n'est pas client dans notre succursale ». Idée tout de suite bousillée quand on veut la rendre déductive et remplacer « succursale » par « banque » voire inclure de possibles hétéronymes. Le résultat est un monstre « non monotone » qui déclare que si $\neg A$ n'est pas démontrable, alors A. Ce qui présage de beaux cafouillis au portillon de la vérité, $\neg A$ et A se disputant la priorité en cas d'indécidabilité ! Cerise sur le gâteau, *ne pas être démontrable* est tout sauf calculable, ce qui est un comble au vu des prétendues motivations

informatiques des « non-monotoneux » !

C'est il y a une cinquantaine d'années que j'ai eu connaissance des « logiques » déontiques. L'œil du (jeune) technicien a immédiatement repéré le caractère exsangue de ce Kamtchatka des déjà peu glorieuses logiques modales. Le vieil homme ajoute qu'une axiomatique (i.e., un arbitraire) ne correspond pas précisement au cahier des charges de la Logique, centré sur l'exploration de la Raison, en aucune façon la création de sectes.

Cependant, je ne me livrerai pas au facile exercice consistant à accabler ces axiomatiques du pauvre. J'ai été échaudé par mon expérience face à d'autres bricolages « philosophiques », un qualificatif à double tranchant qui exprime un complexe d'infériorité, « c'est philosophique » signifiant : « chat perché !, tu ne vas quand même brocarder mon incompétence technique ». Cette infériorité dissimule une supériorité cachée, l'humble philosophe se muant en Septimus façon *La marque jaune* : « ce que je fais est tellement génial, même s'il ne fonctionnera que dans des siècles, que toi, vulgaire technicien, n'en a pas la moindre idée ».

Autre angle d'approche, donc : voir ce que les bricoleurs « déontiques » ont vu mais bousillé. Ils ont effectivement introduit une distinction entre l'*aléthique* (le vrai, le faux) et le *déontique* (les interdits et leurs annexes, permissions et obligations). Mais en écrivant des propositions censées parler d'interdits, de permissions et d'obligations, ils postulent une réduction du normatif à l'aléthique, donc à quoi bon la distinction si une des deux notions est cas particulier de l'autre ?

Pour me résumer, la bonne idée est d'avoir vu la dimension normative de la Logique ; mais celle-ci ne s'exprime pas en termes de vérité : une interdiction n'est ni vraie ou fausse, elle est en vigueur ou non.

La normativité logique, telle qu'elle se présente à travers la dualité $A/\sim A$ (ou plutôt $A/A \multimap \exists$), est loin de recouvrir l'infortunée déontique. Sur laquelle on peut et doit réfléchir mais qui est définitivement incompatible avec la Logique. C'est d'ailleurs un travers scientiste que de penser que toute idée intéressante doive avoir un pendant logique... surtout quand on est juste bon à dessiner des moustaches sur le cas classique.

Pour terminer sur un exemple réjouissant, la causalité qui a inspiré moult conneries, dont le croquignolet « effet papillon »[3]. Selon certains, on devrait l'identifier à la conséquence logique. Ainsi si mes yeux sont marrons, c'est qu'un de mes géniteurs a des yeux de cette couleur ; mais la couleur de mes yeux n'est pas *cause* de celle de mon père ou ma mère.

3. Lequel des 453 députés qui ont voté – à une voix près – l'amendement Wallon de 1875 est-il à l'origine de la IIIe République ?

Références

[1] J.-Y. Girard. **Linear logic**. *Theoretical Computer Science*, 50 :1 – 102, 1987.

[2] J.-Y. Girard. **Locus Solum**. *Mathematical Structures in Computer Science*, 11 :301 – 506, 2001.

[3] J.-Y. Girard. **∃, clef de voûte logique**. Technical report, http ://girard.perso.math.cnrs.fr/wo.pdf, 2024.