UTLS 17 Juin 2000

LES FONDEMENTS DES MATHEMATIQUES

Jean-Yves Girard

FORMALISMES

En mathématiques le XX$^{\text{ème}}$ siècle commence vers 1890. . .

1 La théorie des ensembles

1 La théorie des ensembles

- XIX$^{\text{ème}}$ siècle, réflexion sur l'analyse (fonctions, dérivées, intégrales). Passagers clandestins : « courbe » sans tangente. . .

1 La théorie des ensembles

- XIX$^{\text{ème}}$ siècle, réflexion sur l'analyse (fonctions, dérivées, intégrales). Passagers clandestins : « courbe » sans tangente. . .
- Qu'est-ce qu'un objet mathématique ? La Théorie des Ensembles de Cantor répond (?) à cette question. Les objets compliqués (nombres réels) reconstruits à partir des nombres entiers. . . qui sont eux-mêmes « définis » à partir de rien (?).

1 La théorie des ensembles

- XIXème siècle, réflexion sur l'analyse (fonctions, dérivées, intégrales). Passagers clandestins : « courbe » sans tangente...
- Qu'est-ce qu'un objet mathématique ? La Théorie des Ensembles de Cantor répond (?) à cette question. Les objets compliqués (nombres réels) reconstruits à partir des nombres entiers... qui sont eux-mêmes « définis » à partir de rien (?).
- La Physique, faite d'ilôts reliés par des passerelles incertaines. Par contre unité de principe de la mathématique. Analyse et algèbre (le calcul avec des lettres, des variables, des équations) ne se contredisent pas.

1 La théorie des ensembles

- XIX$^{\text{ème}}$ siècle, réflexion sur l'analyse (fonctions, dérivées, intégrales). Passagers clandestins : « courbe » sans tangente...
- Qu'est-ce qu'un objet mathématique ? La Théorie des Ensembles de Cantor répond (?) à cette question. Les objets compliqués (nombres réels) reconstruits à partir des nombres entiers... qui sont eux-mêmes « définis » à partir de rien (?).
- La Physique, faite d'ilôts reliés par des passerelles incertaines. Par contre unité de principe de la mathématique. Analyse et algèbre (le calcul avec des lettres, des variables, des équations) ne se contredisent pas.
- Rôle central dévolu aux entiers naturels ; l'arithmétique de Peano **AP**, un des premiers exemples de système formel.

2 L'arithmétique de Peano AP

2 L'arithmétique de Peano AP

Termes : 0 $x, y, z, \dots$ St $t + t'$ $t \times t'$

(zéro, variables, successeur (+1), somme, produit)

Exemple : $SSSSSS0$ représente 6. . . (comparer à IIIIII).

2 L'ARITHMÉTIQUE DE PEANO AP

Termes : $0 \qquad x, y, z, \ldots \qquad St \qquad t + t' \qquad t \times t'$

(zéro, variables, successeur (+1), somme, produit)

Propositions :

$$t = t' \quad \neg P \quad P \vee P' \quad P \wedge P' \quad P \Rightarrow P' \quad \forall x P \quad \exists x P$$

(égale, non, ou, et, implique, pour tout, il existe)

$$\forall x \forall y \forall z (x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z \neq 0) \Rightarrow (x \times (x \times x)) + (y \times (y \times y)) \neq z \times (z \times z))$$

avec $t \neq u :: \neg(t = u)$. Un cas du Théorème de Fermat.

2 L'arithmétique de Peano AP

Termes : 0 $x, y, z, \ldots$ St $t + t'$ $t \times t'$

(zéro, variables, successeur (+1), somme, produit)

Propositions :

$$t = t' \quad \neg P \quad P \vee P' \quad P \wedge P' \quad P \Rightarrow P' \quad \forall x P \quad \exists x P$$

(égale, non, ou, et, implique, pour tout, il existe)

Axiomes : $P \Rightarrow P$ $x = x$ $\ldots$ **(logique)**

$$x{+}0 = x \qquad x{+}Sy = S(x{+}y) \qquad x{\times}0 = 0 \qquad x{\times}Sy = (x{\times}y){+}x$$

$$Sx \neq 0 \qquad Sx = Sy \Rightarrow x = y$$ **(arithmétique)**.

2 L'ARITHMÉTIQUE DE PEANO AP

Termes : 0 $\quad x, y, z, \ldots$ $\quad St$ $\quad t + t'$ $\quad t \times t'$

(zéro, variables, successeur (+1), somme, produit)

Propositions :

$$t = t' \quad \neg P \quad P \vee P' \quad P \wedge P' \quad P \Rightarrow P' \quad \forall x P \quad \exists x P$$

(égale, non, ou, et, implique, pour tout, il existe)

Axiomes : $P \Rightarrow P$ $\quad x = x$ $\quad \ldots$ **(logique)**

$$x{+}0 = x \qquad x{+}Sy = S(x{+}y) \qquad x{\times}0 = 0 \qquad x{\times}Sy = (x{\times}y){+}x$$

$$Sx \neq 0 \qquad Sx = Sy \Rightarrow x = y$$ **(arithmétique)**.

Règles de démonstration :

$$\frac{P \quad P \Rightarrow Q}{Q}$$

(Modus Ponens)

$$\frac{P[0] \quad P[x] \Rightarrow P[Sx]}{P[y]}$$

(Récurrence ou Induction)

2 L'arithmétique de Peano AP

Termes : 0 $x, y, z, \ldots$ St $t + t'$ $t \times t'$

(zéro, variables, successeur (+1), somme, produit)

Propositions :

$$t = t' \quad \neg P \quad P \vee P' \quad P \wedge P' \quad P \Rightarrow P' \quad \forall x P \quad \exists x P$$

(égale, non, ou, et, implique, pour tout, il existe)

Axiomes : $P \Rightarrow P$ $x = x$ $\ldots$ **(logique)**

$$x+0 = x \qquad x+Sy = S(x+y) \qquad x\times 0 = 0 \qquad x\times Sy = (x\times y)+x$$

$Sx \neq 0$ $Sx = Sy \Rightarrow x = y$ **(arithmétique)**.

Règles de démonstration :

$$\frac{P \quad P \Rightarrow Q}{Q} \qquad\qquad \frac{P[0] \quad P[x] \Rightarrow P[Sx]}{P[y]}$$

Théorèmes : $SSS0 + SS0 = SSSSS0$ $\forall x\ (0 + x = x)$

3 Mathématiques vs. Informatique

3 Mathématiques vs. Informatique

- Les mathématiques ne sont pas formelles, elles sont seulement formalisables, vérifiables (mais pas réalisables) sur machine.

3 Mathématiques vs. Informatique

- Les mathématiques ne sont pas formelles, elles sont seulement formalisables, vérifiables (mais pas réalisables) sur machine.

- L'activité de l'ordinateur est purement formelle : **`syntax error Une erreur fatale est apparue à 0028:C000BCED dans le VXD VMM(01) + 0000ACED`**.

3 Mathématiques vs. Informatique

- Les mathématiques ne sont pas formelles, elles sont seulement formalisables, vérifiables (mais pas réalisables) sur machine.
- L'activité de l'ordinateur est purement formelle : `syntax error`.
- Le langage mathématique est un langage informatique exécuté en appliquant les règles de déduction. Analogie précieuse qui ne concerne que l'aspect formel des mathématiques.

3 Mathématiques vs. Informatique

- Les mathématiques ne sont pas formelles, elles sont seulement formalisables, vérifiables (mais pas réalisables) sur machine.
- L'activité de l'ordinateur est purement formelle : **`syntax error`**.
- Le langage mathématique est un langage informatique exécuté en appliquant les règles de déduction. Analogie précieuse qui ne concerne que l'aspect formel des mathématiques.
- Le dilemme du bus : attendre ou rentrer à pied ? Le problème de l'arrêt des programmes. La machine peut-elle tester sa « mise en boucle » (le programme mouline à l'infini, sans résultat visible) ?

3 Mathématiques vs. Informatique

- Les mathématiques ne sont pas formelles, elles sont seulement formalisables, vérifiables (mais pas réalisables) sur machine.
- L'activité de l'ordinateur est purement formelle : **`syntax error`**.
- Le langage mathématique est un langage informatique exécuté en appliquant les règles de déduction. Analogie précieuse qui ne concerne que l'aspect formel des mathématiques.
- Le dilemme du bus : attendre ou rentrer à pied ? Le problème de l'arrêt des programmes. La machine peut-elle tester sa « mise en boucle » (le programme mouline à l'infini, sans résultat visible) ?
- Réponse négative :

Ne pas savoir $\neq$ Savoir que non

Récessif $\neq$ Expansif

PARADOXES

Est-ce grave, Docteur ?

4 La diagonale de Cantor

4 La diagonale de Cantor

- Le paradoxe natif ~ 1880 ; ($\delta\acute{o}\xi\alpha$: dogme, opinion, intuition. . .).

4 La diagonale de Cantor

- Le paradoxe natif ~ 1880 ; ($\delta\acute{o}\xi\alpha$: dogme, opinion, intuition. . .).
- Liste *finie* de tous les mots de la langue française.

4 La diagonale de Cantor

- Le paradoxe natif ~ 1880 ; ($\delta\acute{o}\xi\alpha$: dogme, opinion, intuition. . .).
- Liste *finie* de tous les mots de la langue française.
- Liste *infinie* des entiers pairs : $0, 2, 4, 6, \ldots$.

4 La diagonale de Cantor

- Le paradoxe natif ~ 1880 ; ($\delta\acute{o}\xi\alpha$: dogme, opinion, intuition…).
- Liste *finie* de tous les mots de la langue française.
- Liste *infinie* des entiers pairs : $0, 2, 4, 6, \ldots$.
- Liste *infinie* de tous les programmes d'un langage :

Taille : Rangés par taille croissante.

Dictionnaire : À taille donnée, rangée dans l'ordre lexicographique.

4 La diagonale de Cantor

- Le paradoxe natif ~ 1880 ; ($\delta\acute{o}\xi\alpha$: dogme, opinion, intuition...).
- Liste *finie* de tous les mots de la langue française.
- Liste *infinie* des entiers pairs : $0, 2, 4, 6, \ldots$.
- Liste *infinie* de tous les programmes d'un langage :

  Taille : Rangés par taille croissante.

  Dictionnaire : À taille donnée, rangée dans l'ordre lexicographique.

- Liste de toutes les listes infinies de zéros et de uns ? Impossible, à cause de l'argument diagonal. Soient $L_1, L_2, L_3, \ldots$ toutes les listes infinies ; on les range l'une sur l'autre, et...

4 La diagonale de Cantor

0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 0 . . .
0 1 1 0 1 0 1 0 0 1 1 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 . . .
0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 . . .
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 . . .
1 0 1 1 1 0 0 1 0 0 0 1 1 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0 . . .
0 1 1 0 1 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 . . .
0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1 . . .
1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 . . .
0 1 1 1 1 0 0 1 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0 . . .
0 1 1 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 1 1 0 0 1 . . .
0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 0 1 0 0 1 . . .
1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 . . .
1 0 1 1 1 0 0 1 0 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 0 . . .
0 1 1 0 1 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 . . .
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 1 . . .
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 . . .
1 0 1 1 1 0 0 1 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 0 1 0 1 0 . . .
0 1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0 1 0 . . .
0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 . . .
1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 . . .
1 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1 0 1 0 0 1 1 1 0 . . .
0 1 1 0 0 0 1 0 0 1 1 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 . . .
0 1 1 1 1 0 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 . . .

UTLS 17 Juin 2000

4 La diagonale de Cantor

0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 0 . . .
0 1 1 0 1 0 1 0 0 1 1 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 . . .
0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 . . .
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 . . .
1 0 1 1 1 0 0 1 0 0 0 1 1 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0 . . .
0 1 1 0 1 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 . . .
0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1 . . .
1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 . . .
0 1 1 1 1 0 0 1 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0 . . .
0 1 1 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 1 1 0 0 1 . . .
0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 0 1 0 0 1 . . .
1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 . . .
1 0 1 1 1 0 0 1 0 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 0 . . .
0 1 1 0 1 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 . . .
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 1 . . .
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 . . .
1 0 1 1 1 0 0 1 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 0 1 0 1 0 . . .
0 1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0 1 0 . . .
0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 . . .
1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 . . .
1 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1 0 1 0 0 1 1 1 0 . . .
0 1 1 0 0 0 1 0 0 1 1 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 . . .
0 1 1 1 1 0 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 . . .

4 La diagonale de Cantor

1 0 1 1 1 0 0 1 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 0 ...
0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 ...
0 1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 ...
1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 ...
1 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0 ...
0 1 1 0 1 1 1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 ...
0 1 1 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1 ...
1 1 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 ...
0 1 1 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0 ...
0 1 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 1 0 0 1 ...
0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1 0 1 0 0 1 ...
1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 ...
1 0 1 1 1 0 0 1 0 1 0 1 0 1 1 0 0 0 0 1 1 1 0 ...
0 1 1 0 1 0 1 0 0 1 0 1 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 ...
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 0 0 0 1 0 0 1 1 ...
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 ...
1 0 1 1 1 0 0 1 0 0 0 0 1 1 1 0 0 1 0 1 0 1 0 ...
0 1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 ...
0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 1 ...
1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 ...
1 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1 0 1 0 0 1 0 1 0 ...
0 1 1 0 0 0 1 0 0 1 1 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0 1 0 ...
0 1 1 1 1 0 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 0 ...

4 La diagonale de Cantor

```
1 0 1 1 1 0 0 1 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 0 . . .
0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 . . .
0 1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 . . .
1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 . . .
1 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0 . . .
0 1 1 0 1 1 1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 . . .
0 1 1 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1 . . .
1 1 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 . . .
0 1 1 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0 . . .
0 1 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 1 0 0 1 . . .
0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1 0 1 0 0 1 . . .
1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 . . .
1 0 1 1 1 0 0 1 0 1 0 1 0 1 1 0 0 0 0 1 1 1 0 . . .
0 1 1 0 1 0 1 0 0 1 0 1 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 . . .
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 0 0 0 1 0 0 1 1 . . .
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 . . .
1 0 1 1 1 0 0 1 0 0 0 0 1 1 1 0 0 1 0 1 0 1 0 . . .
0 1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 . . .
0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 1 . . .
1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 . . .
1 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1 0 1 0 0 1 0 1 0 . . .
0 1 1 0 0 0 1 0 0 1 1 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0 1 0 . . .
0 1 1 1 1 0 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 0 . . .
```

5 L'EXPANSIVITÉ

5 L'EXPANSIVITÉ

- Peut-on traiter des informations négatives (absentes) ?

5 L'EXPANSIVITÉ

- Peut-on traiter des informations négatives (absentes) ?
- Argument « pour » : cases optionnelles non remplies, lues comme **non**.

5 L'EXPANSIVITÉ

- Peut-on traiter des informations négatives (absentes) ?
- Argument « pour » : cases optionnelles non remplies, lues comme **non**.
- Argument non valable : **`Retour`**, qui veut dire « Je ne réponds pas ». Sinon attente du bus... C'est en fait le problème d'arrêt. Démonstration rigoureuse en utilisant la machine à Cantor.

5 L'EXPANSIVITÉ

- Peut-on traiter des informations négatives (absentes) ?
- Argument « pour » : cases optionnelles non remplies, lues comme **non**.
- Argument non valable : **`Retour`**, qui veut dire « Je ne réponds pas ». Sinon attente du bus... C'est en fait le problème d'arrêt. Démonstration rigoureuse en utilisant la machine à Cantor.
- Le langage est donc expansif, il ne fabrique que des informations positives. Penser à une recherche de fichiers.

5 L'EXPANSIVITÉ

- Peut-on traiter des informations négatives (absentes) ?
- Argument « pour » : cases optionnelles non remplies, lues comme **non**.
- Argument non valable : **`Retour`**, qui veut dire « Je ne réponds pas ». Sinon attente du bus… C'est en fait le problème d'arrêt. Démonstration rigoureuse en utilisant la machine à Cantor.
- Le langage est donc expansif, il ne fabrique que des informations positives. Penser à une recherche de fichiers.
- Le formalisme mathématique est expansif : il accumule les théorèmes. Ce n'est pas le cas de la médecine.

6 Les paradoxes

6 Les paradoxes

- Paradoxes de l'intuition : « courbe » de Peano qui passe par tous les points d'une surface.

6 Les paradoxes

- Paradoxes de l'intuition : « courbe » de Peano qui passe par tous les points d'une surface.
- Paradoxes du raisonnement : contradiction dans la théorie naïve des ensembles (« corrigée » depuis). Russell (1905) : soit $X = \{x; x \notin x\}$; contradiction car à la fois $X \in X$ et $X \notin X$, une proposition et sa négation (toujours la machine à Cantor). Parmi les principes logiques : $P \wedge \neg P \Rightarrow Q$: d'une contradiction on déduit n'importe quoi... Le ressort du formalisme est brisé.

6 Les paradoxes

- Paradoxes de l'intuition : « courbe » de Peano qui passe par tous les points d'une surface.
- Paradoxes du raisonnement : contradiction dans la théorie naïve des ensembles (« corrigée » depuis). Russell (1905) : soit $X = \{x; x \notin x\}$; contradiction car à la fois $X \in X$ et $X \notin X$, une proposition et sa négation (toujours la machine à Cantor). Parmi les principes logiques : $P \wedge \neg P \Rightarrow Q$: d'une contradiction on déduit n'importe quoi... Le ressort du formalisme est brisé.
- Hilbert (1900) : démontrer la cohérence (non-contradiction) de l'arithmétique. Récidive vers 1920 avec un programme finitiste. Réduction de la question aux seuls paradoxes formels.

FORMALISTES

Zorro est arrivé. . .

7 La récessivité

7 La récessivité

- Démontrer la cohérence des mathématiques dans les mathématiques : une espèce d'auto-amnistie, atténuée par la restriction des méthodes permises.

7 La récessivité

- Démontrer la cohérence des mathématiques dans les mathématiques : une espèce d'auto-amnistie, atténuée par la restriction des méthodes permises.
- On n'a droit qu'aux opérations et aux raisonnements « finis », un tout petit bout de **AP**, une sorte de... commission parlementaire.

7 La récessivité

- Démontrer la cohérence des mathématiques dans les mathématiques : une espèce d'auto-amnistie, atténuée par la restriction des méthodes permises.
- On n'a droit qu'aux opérations et aux raisonnements « finis », un tout petit bout de **AP**, une sorte de... commission parlementaire.
- Restriction aux seules propriétés récessives. Identités $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1, \quad abc \neq 0 \Rightarrow a^3 + b^3 \neq c^3$, etc.

7 La récessivité

- Démontrer la cohérence des mathématiques dans les mathématiques : une espèce d'auto-amnistie, atténuée par la restriction des méthodes permises.
- On n'a droit qu'aux opérations et aux raisonnements « finis », un tout petit bout de **AP**, une sorte de... commission parlementaire.
- Restriction aux seules propriétés récessives. Identités $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1, \quad abc \neq 0 \Rightarrow a^3 + b^3 \neq c^3$, etc.
- Par exemple on montrerait qu'un théorème a toujours un nombre pair de symboles ; si P est démontrable, $\neg P$ en a un nombre impair et n'est pas démontrable... Trop naïf !

8 Le Popperisme

8 Le Popperisme

- Popper, philosophe néo-positiviste, reprend les idées de Hilbert. Un énoncé scientifique n'a de valeur que s'il existe un protocole capable —en principe— de le prendre en défaut.

8 Le Popperisme

- Popper, philosophe néo-positiviste, reprend les idées de Hilbert. Un énoncé scientifique n'a de valeur que s'il existe un protocole capable —en principe— de le prendre en défaut.
- Vérification des lois de la nature à un certain degré de précision. Mais aussi « jusqu'ici ça va ».

8 Le Popperisme

- Popper, philosophe néo-positiviste, reprend les idées de Hilbert. Un énoncé scientifique n'a de valeur que s'il existe un protocole capable —en principe— de le prendre en défaut.

- Vérification des lois de la nature à un certain degré de précision. Mais aussi « jusqu'ici ça va ».

- En mathématiques, vérifier à la précision $1/N$, c'est vérifier jusqu'à l'entier N : Hilbert/Popper, même combat. Le « récessif » typique, c'est la cohérence : « jusqu'ici pas de contradiction ».

8 Le Popperisme

- Popper, philosophe néo-positiviste, reprend les idées de Hilbert. Un énoncé scientifique n'a de valeur que s'il existe un protocole capable —en principe— de le prendre en défaut.
- Vérification des lois de la nature à un certain degré de précision. Mais aussi « jusqu'ici ça va ».
- En mathématiques, vérifier à la précision $1/N$, c'est vérifier jusqu'à l'entier N : Hilbert/Popper, même combat. Le « récessif » typique, c'est la cohérence : « jusqu'ici pas de contradiction ».
- Une propriété est expansive quand sa négation est récessive. Exemple « être démontrable » vs. « être cohérent ».

INCOMPLÉTUDE

Non, c'était Gödel. . .

9 Le théorème de Gödel

9 Le théorème de Gödel

- Le formalisme est lui-même un objet mathématique, remarque Hilbert, nécessaire au programme, à sa rigueur. Remarque prise au sérieux par le logicien Gödel en 1931.

9 Le théorème de Gödel

- Le formalisme est lui-même un objet mathématique, remarque Hilbert, nécessaire au programme, à sa rigueur. Remarque prise au sérieux par le logicien Gödel en 1931.

- Les objets du formalisme de **AP**, termes, propositions, sont représentés par des nombres de Gödel : $\ulcorner t \urcorner, \ulcorner P \urcorner$. « Banale » énumération des propositions. Numérologues s'abstenir.

9 Le théorème de Gödel

- Le formalisme est lui-même un objet mathématique, remarque Hilbert, nécessaire au programme, à sa rigueur. Remarque prise au sérieux par le logicien Gödel en 1931.
- Les objets du formalisme de **AP**, termes, propositions, sont représentés par des nombres de Gödel : $\ulcorner t \urcorner, \ulcorner P \urcorner$. « Banale » énumération des propositions. Numérologues s'abstenir.
- Les propriétés du formalisme sont représentées par des propositions de l'arithmétique de Peano **AP**, ainsi « P est démontrable » devient $Thm_{\mathbf{AP}}[\ulcorner P \urcorner]$, « **AP** est cohérente » devient $Coh_{\mathbf{AP}}$. Pas de sens arithmétique immédiat.

9 Le théorème de Gödel

- Le formalisme est lui-même un objet mathématique, remarque Hilbert, nécessaire au programme, à sa rigueur. Remarque prise au sérieux par le logicien Gödel en 1931.
- Les objets du formalisme de **AP**, termes, propositions, sont représentés par des nombres de Gödel : $\ulcorner t \urcorner, \ulcorner P \urcorner$. « Banale » énumération des propositions. Numérologues s'abstenir.
- Les propriétés du formalisme sont représentées par des propositions de l'arithmétique de Peano **AP**, ainsi « P est démontrable » devient $Thm_{\mathbf{AP}}[\ulcorner P \urcorner]$, « **AP** est cohérente » devient $Coh_{\mathbf{AP}}$. Pas de sens arithmétique immédiat.
- Proposition $G \sim \neg Thm_{\mathbf{AP}}[\ulcorner G \urcorner]$: « Je ne suis pas prouvable » Le paradoxe du menteur « Je mens » ?...

10 Le théorème de Gödel (suite)

10 Le théorème de Gödel (suite)

- . . . Non, car qui nous dit que vérité et prouvabilité coïncident ?
  En fait G est vraie et non prouvable dans **AP**.

10 LE THÉORÈME DE GÖDEL (SUITE)

- . . . Non, car qui nous dit que vérité et prouvabilité coïncident ?
  En fait G est vraie et non prouvable dans **AP**.

- On peut remplacer G par la cohérence de **AP**.
  « **Si AP est cohérente elle ne prouve pas sa propre cohérence** ».

10 Le théorème de Gödel (suite)

- . . . Non, car qui nous dit que vérité et prouvabilité coïncident ? En fait G est vraie et non prouvable dans **AP**.
- On peut remplacer G par la cohérence de **AP**. « **Si AP est cohérente elle ne prouve pas sa propre cohérence** ».
- $Coh_{\mathbf{AP}}$: proposition récessive ; prouvabilité de $Coh_{\mathbf{AP}}$: proposition expansive. (Cf. le problème d'arrêt : se mettre en boucle c'est récessif, détecter une boucle, c'est expansif.)

10 Le théorème de Gödel (suite)

- . . . Non, car qui nous dit que vérité et prouvabilité coïncident ? En fait G est vraie et non prouvable dans **AP**.
- On peut remplacer G par la cohérence de **AP**. « **Si AP est cohérente elle ne prouve pas sa propre cohérence** ».
- $Coh_{\mathbf{AP}}$: proposition récessive ; prouvabilité de $Coh_{\mathbf{AP}}$: proposition expansive. (Cf. le problème d'arrêt : se mettre en boucle c'est récessif, détecter une boucle, c'est expansif.)
- **Récessif $\neq$ Expansif**
  Vrai $\neq$ Prouvable
  P **Non Démontrable $\neq$** $\neg P$ **Démontrable.**

11 Négations et négationnistes

11 Négations et négationnistes

- Fusiller Gödel en réfutant le théorème ? « Tout est faux, il suffit d'attendre ».

11 Négations et négationnistes

- Fusiller Gödel en réfutant le théorème ? « Tout est faux, il suffit d'attendre ».
- Tentation du gaz sarin ; mais n'est pas le C^{e} Nemo qui veut...

11 Négations et négationnistes

- Fusiller Gödel en réfutant le théorème ? « Tout est faux, il suffit d'attendre ».
- Tentation du gaz sarin ; mais n'est pas le C^e Nemo qui veut. . .
- Une réfutation du théorème le prouverait ; doit-on lui dénier toute valeur ?

11 NÉGATIONS ET NÉGATIONNISTES

- Fusiller Gödel en réfutant le théorème ? « Tout est faux, il suffit d'attendre ».
- Tentation du gaz sarin ; mais n'est pas le C^e Nemo qui veut. . .
- Une réfutation du théorème le prouverait ; doit-on lui dénier toute valeur ?
- Béatifier Gödel ? Délire suspect autour du 2^nd théorème. Nombres mystérieux, Gödel-Escher-Bach,. . .

11 Négations et négationnistes

- Fusiller Gödel en réfutant le théorème ? « Tout est faux, il suffit d'attendre ».
- Tentation du gaz sarin ; mais n'est pas le C^{e} Nemo qui veut...
- Une réfutation du théorème le prouverait ; doit-on lui dénier toute valeur ?
- Béatifier Gödel ? Délire suspect autour du 2nd théorème. Nombres mystérieux, Gödel-Escher-Bach,...
- **On ne revisse pas ses lunettes en les gardant sur le nez.**

11 Négations et négationnistes

- Fusiller Gödel en réfutant le théorème ? « Tout est faux, il suffit d'attendre ».
- Tentation du gaz sarin ; mais n'est pas le Ce Nemo qui veut. . .
- Une réfutation du théorème le prouverait ; doit-on lui dénier toute valeur ?
- Béatifier Gödel ? Délire suspect autour du 2nd théorème. Nombres mystérieux, Gödel-Escher-Bach,. . .
- **On ne revisse pas ses lunettes en les gardant sur le nez.**
- L'idéologie formaliste de Hilbert finit par se réfuter elle-même par saturation scientiste : démontrer la cohérence dans les mathématiques. Vous l'avez voulu, Georges Dandin !

INTUITIONNISMES

Pendant que Dupond et Dupont progressaient hardiment. . .

12 Le post-Gödelisme

12 Le post-Gödelisme

- Kreisel : les doutes quant à la cohérence sont plus douteux que la cohérence elle-même.

12 Le post-Gödelisme

- Kreisel : les doutes quant à la cohérence sont plus douteux que la cohérence elle-même.
- Poursuite des démonstrations de cohérence : l'assurance contre l'explosion de la Terre, un produit indémodable.

12 Le post-Gödelisme

- Kreisel : les doutes quant à la cohérence sont plus douteux que la cohérence elle-même.
- Poursuite des démonstrations de cohérence : l'assurance contre l'explosion de la Terre, un produit indémodable.
- Réussite paradoxale du logicien Gentzen dans les années 1930, à comparer au surgeon d'un arbre mort.

12 Le post-Gödelisme

- Kreisel : les doutes quant à la cohérence sont plus douteux que la cohérence elle-même.
- Poursuite des démonstrations de cohérence : l'assurance contre l'explosion de la Terre, un produit indémodable.
- Réussite paradoxale du logicien Gentzen dans les années 1930, à comparer au surgeon d'un arbre mort.
- Lecture moderne de Gentzen : interaction entre une preuve de P et une de $\neg P$. Identique à l'interaction entre programme et environnement, argument et fonction. Curry-Howard $\sim$ 1970.

12 Le post-Gödelisme

- Kreisel : les doutes quant à la cohérence sont plus douteux que la cohérence elle-même.
- Poursuite des démonstrations de cohérence : l'assurance contre l'explosion de la Terre, un produit indémodable.
- Réussite paradoxale du logicien Gentzen dans les années 1930, à comparer au surgeon d'un arbre mort.
- Lecture moderne de Gentzen : interaction entre une preuve de P et une de $\neg P$. Identique à l'interaction entre programme et environnement, argument et fonction. Curry-Howard $\sim$ 1970.
- Logique linéaire (1985) : symétrie programme/environnement. Logique procédurale, et non plus réaliste. Les démonstrations deviennent des procédures appelées desseins.

13 La ludique ou l'extinction du Popperisme

13 La ludique ou l'extinction du Popperisme

- Deux machines $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ discutent en vase clos. Chacune peut choisir un dessein, i.e. un programme qui « teste l'autre » et soit :

Consensus : L'une des deux finit par jeter l'éponge.

Dissensus : Elles se chamaillent à l'infini.

13 La ludique ou l'extinction du Popperisme

- Deux machines $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ discutent en vase clos. Chacune peut choisir un dessein, i.e. un programme qui « teste l'autre » et soit :

  Consensus : L'une des deux finit par jeter l'éponge.

  Dissensus : Elles se chamaillent à l'infini.

- Comportements duaux de $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$: $\mathfrak{M}$ ne se permet que les desseins « consensuels » avec les desseins de $\mathfrak{N}$, et vice-versa.

13 La ludique ou l'extinction du Popperisme

- Deux machines $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ discutent en vase clos. Chacune peut choisir un dessein, i.e. un programme qui « teste l'autre » et soit :

  Consensus : L'une des deux finit par jeter l'éponge.

  Dissensus : Elles se chamaillent à l'infini.

- Comportements duaux de $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$: $\mathfrak{M}$ ne se permet que les desseins « consensuels » avec les desseins de $\mathfrak{N}$, et vice-versa.

- Ces tests sont sujets… à test (dissensus = récusation réciproque). Sortie du carcan récessif/expansif.

13 La ludique ou l'extinction du Popperisme

- Deux machines $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ discutent en vase clos. Chacune peut choisir un dessein, i.e. un programme qui « teste l'autre » et soit :

  Consensus : L'une des deux finit par jeter l'éponge.

  Dissensus : Elles se chamaillent à l'infini.

- Comportements duaux de $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$: $\mathfrak{M}$ ne se permet que les desseins « consensuels » avec les desseins de $\mathfrak{N}$, et vice-versa.
- Ces tests sont sujets. . . à test (dissensus = récusation réciproque). Sortie du carcan récessif/expansif.
- Dessein = démonstration avec « erreurs de logique » : le daimon $\pitchfork$, celui qui jette l'éponge. Dualité moniste et sortie du réalisme.

(à suivre)

14 Supplément détachable

14 Supplément détachable

- L'incomplétude est interne.

14 Supplément détachable

- L'incomplétude est interne.
- La vérité est-elle une paraphrase vide ?

14 Supplément détachable

- L’incomplétude est interne.
- La vérité est-elle une paraphrase vide ?
- La réalité des entiers : les opérations sont elles définies sur les objets ou les objets ne sont-ils qu’une réification des opérations ?

14 Supplément détachable

- L'incomplétude est interne.
- La vérité est-elle une paraphrase vide ?
- La réalité des entiers : les opérations sont elles définies sur les objets ou les objets ne sont-ils qu'une réification des opérations ?
- « Problème du millénium » :

P vs. NP