Un tract anti-système II : le monstre de Gila

Jean-Yves Girard

9 juin 2020

Résumé

Ce texte lève les limites que j'assignais encore au déconfinement de la logique dans mon tract [3].

1 Introduction

1.1 Le monstre de Gila

Ce court texte est la suite amendée de mon « tract » [3] qui annonçait la fin des systèmes logiques tout en concédant des limites au « déconfinement », typiquement pour la logique dite du second ordre. Ceci est une erreur : la Théorie des Ensembles permet de sortir, une fois pour toutes de ces bunkers, ces bocaux à poissons que sont les systèmes. Il y a des objections évidentes à cette affirmation, mais nous allons voir qu'elles relèvent d'un scientisme périmé. La première question est donc de nature introspective : pourquoi m'a-t-il fallu autant de temps pour les dépasser ?

« Il ne lâche pas prise, même si on lui coupe la tête, même quand l'homme est mort » : c'est ainsi qu'est décrit, dans *Le trésor de la sierra Madre* (1948), ce gros lézard appelé *monstre de Gila*. Il fournit une métaphore appropriée de tous ces « ismes » qui continuent à sévir alors qu'ils ont fait faillite, en particulier le scientisme 1900 qui survit en logique à travers un anachronique salmigondis, le *réalisme axiomatique* ; pourtant sa tête fut tranchée de façon on ne peut plus nette par Gödel en 1931. Mais le scientisme étant une religion, le besoin de croire se traduit par une fidélité sans faille à cette vision obsolète.

On pense à l'abeille qui referme *quand même* une alvéole détériorée ou au soldat japonais perdu sur une île du Pacifique qui continue *quand même* à se battre au nom de l'Empereur.

1.2 La Théorie des Ensembles

Il y un siècle, la Théorie des Ensembles apparaissait comme un système logique nécessitant un sérieux travail de fondations, le seul à même de mener à des vérités apodictiques, indiscutables. Mais ce type de fondement est impossible, donc mensonger ; même le Monstre n'ose plus s'en réclamer frontalement. De nos jours, la Théorie des Ensembles **ZF** s'identifie aux Mathématiques tout court : c'est le système consensuel dans lequel elles s'énoncent et qu'il n'y a aucun sens à mettre en doute. À moins qu'on ne travaille précisement *sur* cette théorie : les questions qui se posent alors ne sont pas fondationnelles au sens ringard du terme, mais touchent à un sujet particulier, l'infini, sans relation directe au raisonnement. La Théorie des Ensembles est un domaine que le Monstre n'étreint plus de sa mâchoire morte !

Les critiques quant à l'utilisation de **ZF** comme cadre de la logique sont typique d'une manie qui veut ramener toute chose à ses constituants. Autant réduire une peinture à la toile, voire au châssis, qui ont servi de support. Et oublier la distinction entre impressionnistes et cubistes pour classer les peintures selon l'essence utilisée pour ce châssis : on distinguerait alors l'École du chêne et celle du pin ! Autrement dit, tout indispensable qu'il soit, un seul ingrédient n'influe pas de façon significative sur le produit achevé.

La logique ne gratte jamais que la surface de la Théorie des Ensembles : elle n'a que faire de l'Axiome du Choix ou de la Détermination Projective. Et les discussions quant aux grands cardinaux n'ont aucune incidence sur les artefacts logiques, tous de cardinalités ridiculement faibles ; ainsi, un comportement (section 1.4) est-il dénombrable, ce qui fait que l'ensemble de tous les comportements a la puissance du continu.

L'invocation des ensembles ne signifie pas que l'on pourrait remplacer la logique par **ZF**. Car chaque type d'objet mathématique a son propre style de raisonnement ; les ensembles, entités amorphes que l'on considère à bijection près, se contentent de principes expéditifs, *i.e.,* efficaces et sommaires, ceux de la logique classique qui est à la vraie logique ce que le balai est au pinceau. L'un permet de déblayer les débris associés à la construction du châssis, mais l'autre est plus adapté à la peinture. Je rappelle incidemment que, malgré son indéniable intérêt pratique, la « logique » classique est fautive, puisque le tiers-exclu et ses variantes comme l'implication $\neg\neg A \Rightarrow A$, sont *discutables*, *i.e.,* acceptables uniquement dans certains contextes [1]. L'argument « c'est logique » étant supposé couper court à toute contestation, la logique ne saurait accepter des principes discutables. Mais je me répète.

1. Par exemple celui de l'étude de l'infini, ou encore chez les mafiosi : Vito Corleone (du *Parrain*) n'est-il pas célèbre pour ses doubles négations, ces « propositions qu'on ne peut pas refuser » ?

1.3 Modules *vs.* systèmes

J'ai comparé [3] les systèmes à des bunkers, des bocaux à poisson. Pour le monstre de Gila, ils sont au contraire l'essence de la logique, d'où leur prolifération cancéreuse. Voire la formation de métasystèmes, *e.g.,* les *logical frameworks* [5], sortes de gigantesques hôpitaux où tout système axiomatique est le bienvenu, pourvu qu'il respecte le confinement qui lui interdit de communiquer avec les autres sous peine d'inconsistance.

Le principal défaut des systèmes est leur fermeture : ce qui est vrai dans $\mathbb{T}$ peut devenir faux dans $\mathbb{U}$ et vice-versa. C'est l'esprit de la secte, incapable de s'accorder avec sa concurrente, surtout si elle dit à peu près la même chose. Je propose donc de remplacer ces systèmes autarciques par des *modules* ouverts. L'idée fondamentale consiste à définir les signifiants logiques, pour l'essentiel propositions et preuves, hors de tout système, de tout langage. Puis à regrouper, sous forme de *modules*, certaines configurations logiques remarquables se conformant aux définitions générales. On pourra ainsi fabriquer des modules « Multiplicatifs » ou « Arithmétique ». Et décider, selon les besoins, d'invoquer l'un ou l'autre, voire les deux, dans l'esprit de la commande LaTeX `\usepackage`. Si l'on respecte la contrainte évidente – des modules distincts dans des lieux disjoints – ils seront automatiquement compatibles, puisqu'ils se contentent de décliner les principes logiques généraux dans des cas particuliers : $\mathbb{T} + \mathbb{U}$ est en fait une extension conservative des modules $\mathbb{T}$ et $\mathbb{U}$. Ce qui rappelle la propriété de la sous-formule de Gentzen qui exprime la conservativité de tout nouveau connecteur par rapport à ceux déjà connus.

Cette compatibilité est la véritable *cohérence* logique dont la surestimée consistance n'est qu'une pâle et inadéquate approximation.

Il n'est pas possible d'envisager un module universel les englobant tous et qui deviendrait en quelque sorte « Le » système. Il en trop de modules (la puissance du continu) pour qu'ils puissent tous tenir dans le même bocal. Leur indépendance se heurte cependant à une objection de base : que se passe-t-il si, par hasard, je déclare deux fois la même chose, *e.g.,* les multiplicatifs ? On se trouvera donc avec des doublons, $\otimes, \parr$ et $\otimes', \parr'$. Mais la nature logique des deux modules permet alors d'échanger librement les connecteurs et leurs copies : $\otimes', \parr'$ apparaissent comme des variantes typographiques de $\otimes, \parr$.

Le Monstre objectera sans doute que je me débarrasse de la multitude des systèmes en les ramenant tous à **ZF**. Ne serait-ce que ça, on aurait obtenu une simplification significative : la possibilité de travailler dans son module de prédilection en pouvant communiquer avec celui du voisin. La Théorie des Ensembles qui chapeaute ce petit miracle peut d'ailleurs être difficilement qualifiée de système : nous l'utilisons de façon tellement marginale que nous ne serons jamais en situation d'en percevoir les limites, voir section 1.2.

1.4 La trinité logique

Le réalisme axiomatique est basé sur une sorte de Sainte Trinité, syntaxe-sémantique-méta, qui ne fonctionne pas. En effet, la syntaxe est supposée se fonder sur la sémantique qui est en fait sa copie carbone. J'ai eu l'occasion d'expliquer comment le douteux $\forall \Rightarrow \exists$ est justifié au moyen de modèles reproduisant la même erreur – ils sont subitement devenus non vides ! Il n'y a pas de différence de nature entre la syntaxe et la sémantique qui n'est en fait qu'un autre langage qui se prétend plus réel. On pourrait donc donner une sémantique de la sémantique : c'est le méta, cette pyramide de Ponzi fondationnelle : revenez la semaine prochaine pour la véritable explication.

Bizarrement, la logique fonctionne réellement sur une trinité *déréaliste.*

Usage (BHK) : c'est l'aspect déductif, exprimé par le *Modus Ponens* ou de façon moins ringarde par la coupure. Qui permet de voir une preuve $\mathcal{P}$ de $A \vdash B$ comme une fonction transformant toute preuve $\mathcal{A}$ de $\vdash A$ en une preuve $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ de $\vdash B$: c'est ce que nous dit BHK. La forme stable de cette fonctionalité des preuves, l'orthogonalité, permet de définir l'artefact logique de base, le *comportement*, comme un ensemble de « preuves » égal à son bi-orthogonal. Preuves de quoi au juste ? D'un comportement dont elles font partie : on reconnaît ici le typage « existentialiste » à la Curry.

Qu'il s'agisse de BHK, de Curry ou de nos comportements, cette approche est désystématisée : les notions sont définies hors de tout cadre fixé à l'avance.

Usine (Herbrand) : $\mathcal{P}$ transforme une preuve de $\vdash A$ en une de $\vdash B$. D'accord, mais on voudrait une preuve de ce fait, une preuve de la preuve ou « méta-preuve » en quelque sorte. Dans un article [6] qui fit couler d'autant plus d'encre et de bile qu'il était peu inspiré, Kreisel proposa de déléguer cette preuve auxiliaire à un système « donné à l'avance ». Mais comme la « méta-preuve » est chargée de l'habituel fardeau fondationnel, cela revient à postuler un système logique universel... bonjour l'incomplétude ! À moins que le système donné à l'avance ne soit la Théorie des Ensembles, ce qui revient à évacuer la dimension logique de la « méta-preuve », voir section 1.2.

Plus sérieusement, il s'agit en réalité du typage à la Church des preuves : nous devons être capables de *dire* ce qu'elles font. Mais, alors que le style Curry nous libère du carcan des systèmes, Church semble nous y ramener, or il n'est pas question de retomber dans les ornières de l'essentialisme.

La voie, ouverte par Herbrand pour la quantification mais qui ne prend sa véritable dimension qu'avec les *réseaux de démonstration* de la logique linéaire, est celle du *test.* L'orthogonalité à une batterie de tests finie permet de définir, une fois pour toutes, ce qu'est un *type.* Si l'usage est le synthétique *a priori*, prédictif et donc douteux, le test est un ilôt de certitudes, un synthétique *a posteriori* vérifiable (*i.e.,* sans coupures).

Adéquation (Gentzen) : l'usine ne produit pas vraiment une « méta-preuve », seulement un argument susceptible d'en produire une. Celle-ci prendra la forme d'un théorème d'élimination des coupures : la coupure entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{A}$ se normalise car ces deux preuves passent des tests idoines, en particulier, la preuve normalisée passera ceux pour $\vdash B$. Techniquement parlant, cela signifie que les tests pour $\vdash B$ sont suffisants pour garantir l'appartenance au comportement associé. Il s'agit donc d'une inclusion entre usine et usage, entre type et comportement.

Cette suffisance des tests d'usine est démontrée au moyen des méthodes mathématiques disponibles, celles de la Théorie des Ensembles qui se charge de l'infrastructure grossière. Le contenu logique fin reste localisé au plan crucial de l'usine, celui que le réalisme axiomatique a systématiquement ignoré.

Dernière remarque : l'usine se doit d'être finie, sinon on n'y peut rien vérifier. Les batteries de tests ne restent finies que parce qu'elles ne sont pas nécessaires. C'est la victoire ultime du typage explicite, à la Church mais débarrassé des scories essentialistes : une preuve nous est donnée *avec* son test, qu'elle ne saurait deviner sinon. J'ai appelé cette imbrication entre objet (le testé) et sujet (le test) : le *déréalisme*

2 Le second ordre

2.1 Church *vs.* Curry

Nous allons nous focaliser sur le système $\mathbb{F}$ [1] pour le dépasser et le faire sortir de ses limitations de système. C'est un cas d'école car ce qui fonctionne pour $\mathbb{F}$ a toute chance d'être universel.

$\mathbb{F}$ est en fait le calcul propositionnel du second ordre basé sur des « fonctions » dont les arguments sont des types : t de type $\forall XB$ est « appliqué » au type T pour produire $t\{T\}$ de type $B[T/X]$. Ce qui s'exprime dualement au moyen de l'existence logique $\exists XA$, par le principe permettant de passer de $A[T/X]$ à $\exists XA$, principe essentiel et problématique à la fois.

La version existentialiste (à la Curry) consiste à oublier les types pour ne retenir que les λ-termes purs sous-jacents : $t\{T\}$ est alors identique à t, seul son comportement change. Comme il est impossible de bâtir une usine décente sur cette base, on est amené à conclure que l'application $t\{T\}$ n'est pas une opération virtuelle. Ce qui conduit à un univers déréaliste où interfèrent objets et types.

Le travail originel sur $\mathbb{F}$ ne se prononçait pas sur la nature ces types explicites « à la Church ». Sont-ils des ensembles de termes ou de simples signes mnémotechniques ? That is the question.

2.2 Une aporie

La solution proposée dans [2] consiste à rendre compte du passage de $A[T/X]$ à $\exists XA$ en indiquant les batteries de tests $\mathbf{B}, \mathbf{B}'$ que passent T et sa négation $\sim T$. À partir d'une preuve $\mathcal{P}$ de $A[T/X]$, on en construit une $(\mathbf{B}, \mathbf{B}', \mathcal{P})$ de $\exists XA$ qu'il nous faut tester. Le point délicat est la complémentarité de $\mathbf{B}$ et $\mathbf{B}'$ qui se ramifie en deux cas : l'inclusion $\mathbf{B} \subset \mathbf{B}'^{\perp}$ (ou $\mathbf{B}' \subset \mathbf{B}^{\perp}$), facile à tester, mais aussi sa réciproque $\mathbf{B}^{\perp} \subset \mathbf{B}'^{\perp\perp}$ (ou $\mathbf{B}'^{\perp} \subset \mathbf{B}^{\perp\perp}$) qui exprime que le couple $(\mathbf{B}, \mathbf{B}')$ n'est pas laxiste.

Tout se brise sur l'opposition entre le raisonnement, covariant (expansif, Σ^0_1) et l'étude du raisonnement, par exemple la consistance logique (récessive, Π^0_1 ou pire). Le test logique est l'expression ultime de la covariance : il est conçu en vue du succès, non de l'échec. Pour vérifier que $(\mathbf{B}, \mathbf{B}')$ n'est pas laxiste, il faudrait des tests contravariants dont l'échec montrerait que telle ou telle erreur n'est pas acceptée. Mais l'incomplétude interdit ce « qui perd gagne » : le contravariant ne se réduit pas au covariant, d'où une aporie.

2.3 La solution (usage)

Revenons au système $\mathbb{F}$ originel et à la notion de *candidat de réductibilité* (CR) dont nos comportements ne sont qu'une forme améliorée. Ce sont des ensembles de termes dont on ne sait pas encore qu'il sont normalisables. Ils le sont en fait – c'est le théorème principal de [1] – car on a pris soin de les choisir dans un bon système. On comprend cependant que la définition fonctionnerait tout aussi bien si elle ne puisait pas dans un vivier précontraint, autrement dit si elle s'appuyait sur une version non normalisable de $\mathbb{F}$. Laquelle jouerait ainsi le rôle tenu par le λ-calcul pur pour les systèmes basés sur l'implication. Une espèce de prétypage nous dirait ainsi qu'un objet est du genre fonction, ou paire ou encore existence. Détail important, ce $\mathbb{F}$ laxiste serait une structure ouverte, une sorte de « désystème $\mathbb{F}$ ».

C'est pourquoi j'ai proposé [4] d'abandonner l'idée de batterie de tests qui ne donne rien et de remplacer $(\mathbf{B}, \mathbf{B}')$ par de simples tests $\mathcal{T} \in \mathbf{B}$, $\mathcal{T}' \in \mathbf{B}'$, avec pour seule contrainte leur orthogonalité. Le laxisme, possibilité désagréable, devient alors la règle car il ne s'agit plus que d'un « prétypage ».

Ce qui m'avait fasciné à l'époque (1970) dans les CR, c'est qu'il y en a plusieurs (la puissance du continu) pour le même type, ou *base*. On comprend mieux maintenant : les $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ de la quantification existentielle ne sont qu'une base, de simples éléments distingués dans le comportement et sa négation. Remplaçant *mutatis mutandis* les CR par des comportements, on obtient (à peu près) « $(\mathcal{T}, \mathcal{T}', \mathcal{P})$ est dans le comportement $\exists XA$ quand il existe un comportement $(\mathbf{B}, \mathbf{B}')$ de base $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ tel que $\mathcal{P} \in A[\mathbf{B}, \mathbf{B}']$ ».

2.4 La solution (usine)

Le typage (version désessentialisée) consiste à passer des tests. Les tests se ramifient en deux catégories, les premiers, nécessaires mais pas suffisants, étant complétés par les seconds, qui ne sont pas nécessaires, de façon à former une batterie suffisante.

Tests nécessaires : ceux décrits, *mutatis mutandis* dans [2]. Lors du passage de $A[T/X]$ à $\exists X A$, qui se traduit par le remplacement (section 2.3) de $\mathcal{P}$ par $(\mathcal{T}, \mathcal{T}', \mathcal{P})$, il s'agit de tester l'orthogonalité entre $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ et celle de $\mathcal{P}$ par rapport à A dans lequel $X, X^\perp$ sont interprétés par les $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ fournis par la structure à tester. Situation déréaliste où le test est fourni par le testé.

Tests supplémentaires : ceux pour $\mathcal{P}$ par rapport à $A[T/X]$.

La première série est nécessaire, car elle ne dépend pas de $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ qui font partie du camp Objet, celui des testés. Elle n'est pas suffisante, car il nous faudrait des batteries complètes $\mathbf{B}, \mathbf{B}'$ et non pas de simples représentants $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ (section 2.3). La seconde série n'est pas nécessaire puisqu'elle envisage $\mathcal{P}$ dans le contexte $A[T/X]$ qu'on ne peut en aucune façon « deviner » à partir de $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$.

On voit que le typage est vérifiable, qu'il ne nécessite aucun système : on a donc obtenu une sorte de désystème $\mathbb{F}$. Comme la version « Curry », notre version « Church » est polymorphe ; plusieurs batteries de tests conviennent.

2.5 Adéquation

Transformer une preuve de A en une preuve de B revient à éliminer la coupure entre $\mathcal{P}$ « preuve » de $A \vdash B$ et $\mathcal{A}$, « preuve » de $\vdash A$. Ce caractère fonctionnel se heurte de plein fouet à l'incomplétude. On le délègue donc à la Théorie des Ensembles ; c'est ce que j'avais d'aillleurs fait, sans trop me poser de questions, lors de mon article [1] sur le système $\mathbb{F}$. Indignation du Monstre ; mais rappelons-nous qu'il est mort et passons à des choses sérieuses.

Nos deux notions fondamentales sont celles de comportement (Curry, usage) et de type (Church, usine). La mécanique des comportements, imitant celle des candidats de réductibilité, garantit l'adéquation, autrefois nommée normalisation. Reste à démontrer cette réductibilité, autrement dit une inclusion entre usine et usage $\mathcal{C}^\perp \subset \mathbf{A}$: $\mathcal{C}^\perp$ est le type des objets passant les tests de la batterie $\mathcal{C}$, $\mathbf{A}$ est le comportement que ces tests sont censés garantir.

Techniquement parlant, une nouveauté foudroyante : l'approche que j'avais jusque là suivie pour les réseaux – pour excuse, je n'avais aucune tradition sur laquelle m'appuyer et j'ai dû tatonner – consistait à trouver un préorthogonal fini à tout comportement. J'ai été conséquemment bloqué par l'impossibilité d'une telle chose en général, typiquement au second ordre.

Jusqu'à ce que je découvre récemment que le test que passe la preuve n'a pas besoin d'être nécessaire : la batterie suffisante de la section 2.4 est « à la tête du client », en l'occurrence la preuve que l'on teste. Elle ne fonctionnerait pas dans un autre cas. C'est comme si l'on avait quitté la géométrie euclidienne : ces batteries de tests *suffisants*, mais pas nécessaires, sont comme les « cartes » d'une totalité, le comportement, que l'on ne peut pas aborder dans son ensemble.

Il n'est donc pas question d'envisager des preuves non typées. Un artefact $\mathcal{A}$ nous est donné comme preuve de A avec comme certification une batterie de tests $\mathcal{C}$. Ce qui signifie que $\mathcal{C}^\perp \subset \mathbf{A}$ où $\mathbf{A}$ est le comportement que nous notons A. Pour dire les choses de façon imagée : ce produit répond à la norme AFNOR 3477, ce que dont chacun peut s'assurer. Ce qu'on ne peut pas vérifier par contre, c'est l'efficacité du produit qui réfère à un monde à jamais hors d'atteinte, celui de toutes ses utilisations.

2.6 Le finitisme

Il était beaucoup question de *finitisme* au temps de Hilbert. Une intuition géniale qui brille cependant par son ambiguïté. En effet, elle peut concerner tout aussi bien l'usine – à l'époque les mathématiques très élementaires à auxquelles Hilbert se référait –, l'usage – les potentialités déductives, envisagées séparément pour leur conserver un caractère fini – ou encore l'adéquation entre les deux – la consistance, cote mal taillée, ou mieux, l'élimination des coupures. Il est clair qu'usine et usage relèvent de deux visions antagonistes du finitisme qu'il serait vain de vouloir regrouper sous le même chapeau finitiste : l'adéquation, qui se permet d'utiliser sans retenue les principes mathématiques, ne relève en aucune façon du finitisme.

Annexe

Cet article n'est pas vraiment technique car il s'agissait avant tout de tracer les grandes avenues qui manquaient encore à l'urbanisme logique. Cependant, la notion de test suffisant est tellement novatrice que je vais l'esquisser dans le cadre du désystème $\mathbb{F}$. Qu'on me pardonne le manque de précision : trop de détails brouilleraient la compréhension.

A Identité

Le principe $A \vdash A$, l'« axiome [2] » d'identité, aussi noté $\vdash A^\perp, A$, est le plus grand mystère de la logique. J'entends ricaner le Monstre fregéo-russellien pour lequel il n'y a rien à voir car, du point de vue du réalisme axiomatique, les deux A réfèrent à la même dénotation. C'est comme dire que le bœuf a été créé en prévision de la charrue et le pare-brise pour éviter la chute de l'essuie-glace. Car la prétendue dénotation n'est jamais qu'une fiction utile créée après coup pour expliquer l'identité et qui ne rend d'ailleurs même pas compte de la distinction entre ce principe et la coupure.

La question que je pose est de nature kantienne : comment est-il *possible* d'énoncer un principe qui réfère à une proposition A dont je ne sais à peu près rien ? On commence avec la version existentialiste à la Curry, BHK si l'on préfère : $A \vdash A$ est la fonction identique d'un certain domaine. Pas mal, mais on peut facilement retomber dans les ornières essentialistes, celles, raffinées, de la Théorie des Catégories.

En fait, comment *sait-on* que $\vdash A^\perp, A$? En passant des tests simultanés, pour $A^\perp$ et A, ce qui est possible dans le cas d'un comportement fini (et cofini). Mais ne fonctionne pas en général.

Supposons donc que A corresponde au comportement $\mathbf{A}$, pas nécessairement fini. Je sais quand même justifier $\vdash A^\perp, A$ car il me *suffit* de le tester sur des couples génériques, celui d'un test pour $A^\perp$ et d'un pour A sans référence à A qui prend donc la valeur morale d'une variable X. Nous savons alors que les cas :

$$A = \daleth \qquad A^\perp = \daleth \tag{1}$$

$$A = \daleth \otimes \daleth \qquad A^\perp = \daleth \parr \daleth \tag{2}$$

$$A = \daleth \parr \daleth \qquad A^\perp = \daleth \otimes \daleth \tag{3}$$

suffisent. Ils garantissent la présence d'une étoile de la forme $[\![A^\perp(x), A(x)]\!]$, si je dénote abusivement les *locus* de $A^\perp$ et A par $A^\perp(x), A(x)$. Ce qui implique que l'étoile en question appartient au comportement $\vdash A^\perp, A$.

Ces tests ne sont par contre pas nécessaires : si $A = B \otimes C$ et $\vdash A^\perp, A$ a été obtenu par « η-expansion » à partir de $\vdash B^\perp, B$ et $\vdash C^\perp, C$, ils échouent.

Voici donc le test suffisant à l'état natif. On remarquera qu'il n'est pas formé de parties indépendantes : si A est testé comme $\daleth \otimes \daleth$, $A^\perp$ doit l'être comme $\daleth \parr \daleth$.

2. La notion d'axiome logique est un oxymore du genre volontaire d'office.

B Existence

Le cas de l'existence se ramène informellement à un cas très particulier, celui de l'implication $\forall X\, A \vdash A[T/X]$, autrement dit à $\vdash \exists X\, A^{\perp}, A[T/X]$. Il s'agit de tester $(\mathcal{T}, \mathcal{T}', \mathcal{P})$ où $\mathcal{P}$ est l'identité $\vdash A[T/X]^{\perp}, A[T/X]$. Nous avons vu que cette identité possède une batterie de tests suffisants, (1–3) *supra.* On en conclut que $\mathcal{P}$ est dans le comportement associé à $\vdash A[T/X]^{\perp}, A[T/X]$.

Pour montrer que $(\mathcal{T}, \mathcal{T}', \mathcal{P})$ est dans celui associé à $\vdash \exists X\, A^{\perp}, A[T/X]$, on procède comme pour le système $\mathbb{F}$: le principe de compréhension montre que le comportement associé à T est un ensemble et on utilise alors le « lemme de substitution » de [1].

Cette compréhension relève de l'artillerie lourde fondationnelle – la Théorie des Ensembles qui montre son nez ici. Un nez que le non-spécialiste ne voit pas tellement tout ça semble aller de soi. N'importe comment, la vraie logique est ailleurs, au niveau de l'usine et de l'enchaînement impeccable des tests.

C Arithmétique

J'ai mentionné dans [3] l'arithmétique comme un autre point de résistance des systèmes. Le déconfinement a depuis été mené à son terme dans [4]. Il s'agit d'abord de définir les individus : les entiers relatifs sont les propositions multiplicatives construites à partir de la constante フ

$$\begin{aligned} \bar{1} &:= \text{フ} \\ x + y &:= x \otimes y \\ x - y &:= y \multimap x \end{aligned}$$

La gestion anti-tarskienne de la vérité permet de démontrer les principes de base, en particulier les « axiomes » 3 et 4 de Peano qui intègrent ainsi le monde logique. Rappelons que cette vérité déréaliste est basée sur l'invariant d'Euler-Poincaré. Elle ne s'applique pas aux propositions mais à leurs preuves : quand je dis « A est vrai », cela signifie que A a une preuve *visible* (*i.e.,* vraie). Impossible donc de bâtir une table de vérité, même avec des valeurs exotiques ; ce qui me ravit profondément !

Le principe de récurrence est obtenu logiquement au moyen de la géniale définition de Dedekind. Qui utilise le second ordre, tout comme le produit $x \times y$. Ce qui n'est finalement pas très étonnant : l'incomplétude, signature de ce second ordre, repose techniquement sur un codage qui fait un emploi appuyé de la multiplication. Il y a donc un saut qualitatif entre $x + y$ et $x \times y$ que le réalisme axiomatique, qui traite les deux opérations sur le même plan, celui de l'ukase tombé du Ciel, n'a jamais su détecter.

Références

[1] J.-Y. Girard. **Une extension de l'interprétation fonctionnelle de Gödel à l'analyse et son application à l'élimination des coupures dans l'analyse et la théorie des types**. In Fenstad, editor, *Proceedings of the* 2^{nd} *Scandinavian Logic Symposium*, pages 63 – 92, Amsterdam, 1971. North-Holland.

[2] J.-Y. Girard. **Transcendental syntax 3 : equality**. *Logical Methods in Computer Science*, 2016. *Special issue dedicated to Pierre-Louis Curien for his 60th birthday.*

[3] J.-Y. Girard. **Un tract anti-système**. Technical report, http ://girard.perso.math.cnrs.fr/systeme.pdf, 2019.

[4] J.-Y. Girard. **Transcendental syntax 4 : logic without systems**. Technical report, http ://girard.perso.math.cnrs.fr/trsy4.pdf, 2020.

[5] R. Harper, F. Honsell, and G. Plotkin. **A framework for defining logics**. *LFCS report series, Edinburgh*, 162, 1991.

[6] G. Kreisel. **Mathematical logic**. In T. L. Saaty, editor, *Lectures in modern mathematics, vol III*, pages 99 – 105. Wiley & Sons, New York, 1965.