Identité, égalité, isomorphie ; ou ego, individu, espèce.

Jean-Yves Girard
Institut de Mathématiques de Luminy, UMR 6206 – **CNRS**
163, Avenue de Luminy, Case 907, F-13288 Marseille Cedex 09

girard@iml.univ-mrs.fr

11 novembre 2009

Résumé

La question de l'égalité, quelque part entre isomorphie et identité, est en fait celle du *hors-champ* ; il y a un *champ* (*grosso modo*, celui de l'approche catégorique) et un hors-champ plus vaste, « locatif », complètement a-logique. Selon que l'on se place dans le champ ou le hors-champ, notre vision de l'égalité change. Bien que le champ soit la partie noble, il n'est pas possible de l'étudier sans considérer le hors-champ. D'où les limites des catégories et le besoin d'une strate *identitaire*. La prise en compte des aspects *idiomatiques* amène finalement à décliner l'égalité selon la trinité Identité (= Je), Égalité (= Individu), Isomorphie (= Espèce).

Isomorphie vs. identité

L'égalité est écartelée entre deux pôles, l'*isomorphie* et l'*identité*.

Isomorphie : le mot réfère à la forme, et donc à l'*essence* : par un processus d'abstraction, on néglige certains aspects, considérés comme mineurs ; l'isomorphie est donc *contextuelle*.

Identité : il s'agit de l'objet brut, non conceptualisé et donc *non substituable*[1] : on est dans l'*existence* pure.

Le mode déductif est entièrement basé sur l'isomorphie, l'unique mode *porteur* (au sens de « transport »). C'est pourquoi les interprétations logiques, qu'elles soient simplistes — valeurs de vérité — ou raffinées – catégories — ne reconnaissent que l'isomorphie. Cela dit, l'isomorphie se révèle insuffisante pour *expliquer* la structure déductive et on est amené à reconnaître l'importance de l'identité et donc de la dialectique isomorphie/identité.

Dans la vie courante, le plus bel exemple d'*isomorphie* est celui de l'argent, qui ne représente rien de particulier et donc, potentiellement, à peu près n'importe quoi. Deux billets de 10 € sont égaux (= isomorphes), car de même potentialité : dans tout contexte, ils donneront le même résultat. Un autre exemple

[1] Ce qui signifie, sur une ordonnance, « non générique ». Le médicament d'origine diffère d'un générique isomorphe par le hors-champ (nom, couleur, conditionnement . . . et prix) ; ce hors-champ est le lieu de l'*effet placebo*.

d'isomorphie est donné par les pièces détachées : elles portent des noms de code qui décrivent certaines propriétés contextuelles, mais peuvent différer par des détails hors-contexte, e.g., la couleur, le prix. Le surmoi gère les transports affectifs selon le mode de l'isomorphie : « une femme exceptionnelle » ; le même mode gouverne aussi le choix des dirigeants : « un président compétent ». Et, *last but not least*, les idéalités mathématiques sont définies *modulo* isomorphie, ce que la théorie des catégories exprime en termes de *problème universel*.

Les mêmes exemples peuvent se décliner sur le mode de l'*identité*. Ainsi, je peux couper en deux un billet de 10 € — technique de gangster — ce qui ne produit en aucune façon 2 billets de 5 € : les deux moitiés sont gérées hors-contexte, sur le mode de l'identité. Les pièces détachées de vieilles voitures étant inexistantes, on doit remplacer un piston cassé par un autre, recopié à l'identique et que l'on *ajuste* tant bien que mal à la situation. Dans le domaine affectif, la femme exceptionnelle est souvent affligée d'un frère non substituable — ce que l'on appelle un « beauf' » ; et le président compétent d'un fils encore moins substituable. Hors des mathématiques, les nombres servent à *prédire* ; ainsi Casanova et ses *pentagrammes* — « numérologie » *ante litteram* — qu'il avoue ingénument tripatouiller à la tête du client, ou plutôt de la cliente.

Spirituel vs. locatif

La différence entre isomorphie et identité peut être assimilée à une différence entre spirituel (désincarné) et locatif. Cette opposition est un merveilleux ressort dramatique : ainsi, dans *Les lois de l'hospitalité*, Buster Keaton est traité selon les *principes* de la politesse Sudiste à l'*intérieur* de la maison ; à l'*extérieur*, les hôtes se transforment en d'impitoyables chasseurs, car Buster est victime d'une infâme *vendetta*, coutume *locative* s'il en est !

Le dilemme spirituel/locatif se résume ainsi : les objets interagissent-ils selon les essences qu'ils représentent ou en tant qu'eux-mêmes ? On a tendance à préférer la première solution, mais elle n'est pas toujours praticable. Par exemple, si je veux « sommer » deux ensembles A, B, la solution locative est bien connue, c'est l'*union* $A \cup B$; mais il faut se poser la question : A, B nous sont-ils donnés dans le même contexte ou dans des contextes indépendants ? Dans le second cas, on forme « la » *somme disjointe* $A + B := A' \cup B'$, une union *délocalisée*, où A, B ont été remplacés par A', B' isomorphes tels que $A' \cap B' = \emptyset$. Cette somme, quand elle est opératoire, est bien plus puissante que l'union ; ainsi, au niveau des cardinaux :

$$\begin{array}{rcl} \sharp(A \cup B) & \leq & \sharp(A) + \sharp(B) \\ \sharp(A + B) & = & \sharp(A) + \sharp(B) \end{array}$$

La somme disjointe est, par contre, moins élégante, car on a du mal à dire « la » ; elle est définie à isomorphie près, ce qui n'exclut pas une forme d'unicité que les catégories expriment ainsi : deux sommes directes sont isomorphes de façon *unique* (cette unicité est un pied de nez de l'identité). De fait, le duel spirituel/locatif est plus ouvert qu'on ne le croit : ainsi les égalités *littérales* :

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

alors que la version spirituelle doit se contenter d'isomorphismes « canoniques » :

$$A + B \simeq B + A \qquad A + (B + C) \simeq (A + B) + C$$

Les deux approches ont un sens, mais tant qu'à n'en retenir qu'une, c'est l'union que l'on doit garder : si l'on peut délocaliser une union, on ne peut pas *relocaliser* une somme disjointe. Voir aussi le produit locatif (annexe B).

Essence vs. existence

La distinction spirituel/locatif (qui recouvre à peu près isomorphie/identité) est en fait la déclinaison d'une ligne de partage plus profonde : essence/existence.

Essence : la tradition logique au sens étroit, depuis Aristote, qui privilégie les abstractions, les systèmes formels, le raisonnement. C'est aussi le point de vue adopté par les catégories, car le terme « morphisme » signifie « la forme d'abord ». On retrouve l'essentialisme dans la normativité logique, un véritable *Deus ex machina* : voir les suites informes de règles tombées du ciel dans les ouvrages lambda (Mendelsohn, quintessence du logicisme obtus, intéressant à ce titre et à ce titre seulement).

Existence : il s'agit d'une tradition récente, née du calcul dans les années 1930 (fonctions récursives, λ-calcul) et qui a pris son essort à la fin du siècle dernier grace à l'informatique. Cette tradition est par nature locative : un algorithme a un support matériel — papier, machine abstraite, cases mémoire. Contrairement au raisonnement, l'algorithmique n'est pas normée *a priori* : on a le droit d'écrire des algorithmes qui « se plantent »; il y a pourtant une régulation *a posteriori*, e.g., « ne pas se planter » : contrairement à la normativité logique[2], cette régulation est interne.

Il s'agit, en fait, de deux approches complémentaires : ainsi, le *raisonnement* par induction mathématique correspond-il au *calcul* par récurrence ; mais chacune a ses limites et ses zones d'excellence. Le point de vue « existentialiste » va admettre, en général, des définitions *récursives*, dont la récurrence, mais aussi des cercles vicieux $f(n) := f(n) - 1$. Si on prend pour point de départ l'antériorité de l'existence sur l'essence, on voit que le raisonnement logique est une forme de *typage* qui assure la normativité algorithmique. Autrement dit, en suivant des règles de style logique — qui interdisent certaines associations douteuses comme $f(n) := f(n) - 1$, mais autorisent $f(n) := f(n-1) - 1$, un cas de récurrence —, on assure que tout se passe bien, i.e., que les calculs se terminent. En termes techniques, le monde de l'essence est *typé*, celui de l'existence ne l'est pas. Le typage n'étant rien d'autre qu'une restriction sur les contextes possibles, on voit que essence $\rightsquigarrow$ isomorphie, existence $\rightsquigarrow$ identité.

Sur les questions de typage, le bon point de vue est celui de l'existence : celui de l'essence correspond à l'interdiction de l'inceste du fait de... son impossibilité (qui résulte, en pratique, de la loi !), alors que celui de l'existence correspond à l'interdiction de l'inceste du fait de sa possibilité, ce qui est plus satisfaisant.

Le *polymorphisme* permet d'attribuer plusieurs types au *même* objet. Ainsi, la rallonge électrique dont le type courant est 220V $\Rightarrow$ 220V admet elle aussi le type 110V $\Rightarrow$ 110V et, plus généralement, le type $X \Rightarrow X$, quel que soit X, ce qui s'écrit $\forall X(X \Rightarrow X)$ dans le système $\mathbf{F}$. Etant l'inventeur du système, j'ai été horrifié par l'incapacité de l'approche catégorique traditionnelle à gérer le polymorphisme : l'identité polymorphe participerait d'un monstrueux produit

[2] La normativité interne de la logique au moyen de la *cohérence* se casse la figure — programme de Hilbert, réfuté par les théorèmes de Gödel —, car trop simpliste.

$\Pi_X\, X \Rightarrow X$ indicé par tous les types possibles. Ce qui relève de la tératologie[3] et s'oppose au bon sens le plus élémentaire. Une quantification du second ordre (e.g., l'égalité de Leibniz $a = b :\Leftrightarrow \forall X(X(a) \Rightarrow X(b)))$ n'est un produit que dans une optique spirituelle ; dans une optique locative, au lieu de faire varier l'objet — qui reste le même : une rallonge —, on fait varier le contexte. $\forall X(X \Rightarrow X)$ devient alors une intersection. Plus généralement, le point de vue locatif, qui donne l'antériorité à l'objet sur sa forme, permet de définir des intersections de types, e.g. $X \cap Y$.

Autre exemple d'une strate locative (identitaire) en amont de la structuration catégorique, les *records* des informaticiens : il s'agit de données formées de plusieurs champs (prix, poids, couleur, etc.). Les catégories en font des types produit, ce qui n'est pas complètement faux, mais terriblement réducteur : ainsi, les opérations de juxtaposition de *records* sont *littéralement* commutatives, alors que les catégories doivent se contenter d'un lourdingue isomorphisme canonique $A \times B \simeq B \times A$. La locativité remet tout le monde à sa place :

– Les *records* ne sont pas typés, car du ressort de l'existence. L'aspect locatif est assumé par les *noms* de champ : `couleur`, etc.
– *Typer* un record, cela veut dire sélectionner les champs pertinents ; ainsi un *record* du type `prix` & `couleur` devra remplir ces deux champs ; le champ `poids` ne joue aucun rôle, qu'il soit rempli ou non. On voit que `prix` & `couleur` = `prix` ∩ `couleur`, une véritable égalité, qui justifie la commutativité et l'associativité désirée des *records*.
– L'interprétation catégorique (essentialiste) introduit l'isomorphie *modulo* le typage : deux *records* de type `prix` & `couleur` sont isomorphes ssi les mêmes par rapport au contexte typé, i.e., quand ils coïncident sur les champs `prix` et `couleur`. Du point de vue de l'isomorphie, on a donc bien `prix` & `couleur` ≃ `prix` × `couleur`.

En *ludique*, on peut choisir un représentant canonique dans chaque classe d'équivalence (l'*incarnation*), ici, le *record* « nettoyé » des champs inutiles ; le *mystère de l'incarnation* relie les deux approches à l'égalité au moyen de :

$$|A \cap B| = |A| \times |B| \tag{1}$$

où $|A|$ denote le objets incarnés, i.e., les représentants de classe d'équivalence. (1) est vérifiée dès que les localisations de A, B sont disjointes (cf. le lemme du Chinois, annexe B). Noter le conflit entre $\cap$ (géré par l'identité) et $\times$ (géré par l'isomorphie) : en fait, on doit remplacer $\times$ par le *produit locatif* $\boxtimes$.

Dans une optique spirituelle, nous avons des entités figées, préétablies — e.g., des objets et des prédicats — et nous sommes embarrassés devant un énoncé $A \Rightarrow A$ qui utilise deux fois A : tout comme la bergère de Fátima[4], le même énoncé est susceptible de *bilocation* ; ces multiples localisations sont appelées *occurrences*. La notion d'occurrence, si elle correspond à une facilité notationnelle, n'en est pas moins une catastrophe, car elle confond égalité et isomorphie ; en effet, $A \cap A = A$ et n'a aucune chance de ressembler à $A \times A$. Il faudrait écrire $A' \cap A''$, où A', A'' sont des versions *délocalisées* de A (annexe C). L'abus de langage qui consiste à écrire $A \wedge A$ à la place de $A' \wedge A''$ est malheureusement *théorisé* : ce qui crée des problèmes d'identité complètement artificiels. Or la logique n'a rien à voir avec la théologie : laissons lui le miracle de Fátima et le prétendu

[3] D'éprouvants PhD que la charité nous interdit de citer.
[4] Et Sarkozy, l'omniprésent.

don de bilocation. Tant que l'on reste au niveau catégorique, cette ânerie reste un isomorphisme mal écrit ; dès que l'on devient locatif (polymorphisme, types intersection, réseaux de démonstration), elle induit des problématiques absurdes qui ne sont que le reflet d'une absence de clarification *a priori* : cette clarification (distinguer les occurences comme copies isomorphes délocalisées de A) ne coûte rien théoriquement et on peut toujours l'ignorer si l'on n'en a pas besoin.

La communication sans compréhension

La *ludique* est la première approche logique prenant franchement en charge la locativité. Partant d'un point de vue purement *locatif* (identitaire) on arrive à définir le point de vue *spirituel* (catégorique), les deux entretenant des relations intéressantes comme (1). Cela dit, la ludique ne réussit pas à reconstruire la logique de façon tout à fait convaincante : il faut passer à la *géométrie de l'interaction* (GdI), qui s'inscrit dans les algèbres d'opérateurs. Le développement de la GdI amène à nuancer la prépondérance du locatif sur le spirituel. Elle fait intervenir simultanément les trois termes « identité, égalité, isomorphisme ».

Reprenons l'image de la rallonge $A' \multimap A''$; elle permet faire passer un courant du lieu « ' » au lieu « " » et réciproquement. La déduction logique correspond à des combinaisons plus ou moins complexes de telles rallonges. En ludique et dans certaines versions de la GdI, le courant qui circule dans ces circuits — locatifs, il faut les voir comme des cablages concrets — est virtuel : il ne sert qu'à calculer le cablage résiduel d'un branchement, i.e., à *éliminer les coupures.* Mais on peut aussi penser que des « messages » transitent réellement dans ces canaux, ce qui ne devient vraiment intéressant que si ces messages sont *privés* : si les messages étaient publics, on pourrait les coder dans la locativité.

D'où l'idée d'*idiome*[5]. Dans l'interaction entre A et $A \multimap B$ (*Modus Ponens*), le lieu de A, partagé, est celui d'un échange de messages. Les messages de A ne sont compréhensibles que par A, ceux de $A \multimap B$ ne le sont que par $A \multimap B$. Par exemple, la rallonge $A' \multimap A''$ transmet les messages de A' sans les comprendre, à A'', qui ne les comprend pas davantage. La communication s'établit, sur la base d'une incompréhension totale, mais à travers des canaux *partagés.* La chose cruciale est que l'*on se comprend soi-même* et que l'on a besoin d'être *surpris.* Le système locatif (canaux partagés) permet de recevoir ses propres messages par l'intermédiaire d'un autre, sur un canal non prévu. Tout ceci a d'évidentes résonances psychanalytique ; je me contenterai de dire que cela explique très bien pourquoi on ne sait pas se chatouiller efficacement soi-même.

Donnons maintenant des exemples :

π-calculs : des algèbres de processus où l'on distingue des canaux et des messages ; il y a une idée intéressante, la *privatisation.* Ceci dit, ces systèmes synchrétiques souffrent d'un cruel manque de structure et l'expression « algèbre » sonne comme une antiphrase.

Variables : l'état natif de la variable est *muet*, c'est à dire privé, e.g., dans $\int xdx$. La communication fonctionne cependant très bien, malgré l'absence de compréhension ; par exemple $\int xdx \cdot \int x.dx = \int xdx \cdot \int ydy = \int xydxdy$ et non pas $\int x^2dx$. On observe le changement de nom de variable, qui exprime son caractère privé. Une variable libre est, au contraire, la variable

[5] Originellement « dialecte », changé en « idiome » à la suggestion de Pierre Livet.

que je comprends, qui fait partie de mon idiome. Cet exemple suffit à montrer, et la nécessité des idiomes, et leur stupéfiante puissance.

GdI : la GdI s'inscrit dans un produit tensoriel $\mathcal{L} \otimes \mathcal{D}$ de deux algèbres de von Neumann $\mathcal{L}$ (locative) et $\mathcal{D}$ (idiomatique). Quand deux opérateurs $u \in \mathcal{L} \otimes \mathcal{D}, v \in \mathcal{L} \otimes \mathcal{E}$ interagissent, ils ont la même locativité, mais leurs idiomes sont sans relation. Pour garder l'aspect spirituel de la communication, éviter des interférences (du genre $\int xdx \cdot \int x.dx = \int x^2dx$), il faut créer un idiome commun où $\mathcal{D}, \mathcal{E}$ coexistent sans se gêner : c'est le produit tensoriel $\mathcal{D} \otimes \mathcal{E}$. On remplace u, v par $u^\ddagger, v^\dagger \in \mathcal{L} \otimes (\mathcal{D} \otimes \mathcal{E})$, avec :

$$\begin{aligned} (l \otimes d)^\ddagger &:= l \otimes (d \otimes I_\mathcal{E}) \\ (l \otimes e)^\dagger &:= l \otimes (I_\mathcal{D} \otimes e) \end{aligned}$$

Ces opérations sont la forme rigoureuse du changement de variable muette.

L'idiome reconnaît ainsi la part nécessaire d'*introspection*, i.e., de non transparence. Il y a des choses privées accessibles à un *Deus ex machina*, mais non communicables, même si elles sont essentielles à l'interaction.

Le départ locatif/idiomatique est plus raffiné que le départ locatif/spirituel. La morphologie canal/message distingue ainsi trois trois modes de communication : avec soi-même (identité), avec l'autre générique (égalité), avec l'autre choisi (isomorphie) :

Identité : l'objet lui-même, avec sa locativité et son idiome, non substituables. L'optique identitaire est celle d'un « Je », d'un *ego* profondément personnel et incommunicable.

Egalité : l'objet lui-même dans toutes ses interactions possibles : la locativité reste non substituable, mais l'idiome est à isomorphisme près. C'est le domaine de l'*individu*, la partie observable de l'*ego*.

Isomorphie : l'objet dans un contexte « typé », i.e., dans ses seules interactions permises. L'individu n'est plus que le représentant d'une *espèce*.

Le polymorphisme prévoit l'appartenance à plusieurs espèces, dont la plus spécifique est celle réduite à l'individu (i.e., « Je », au choix de l'idiome près).

A L'égalité de Leibniz

L'égalité de Leibniz se présente comme l'équivalence la plus fine :

$$a = b \quad \Leftrightarrow \quad \forall X(X(a) \Rightarrow X(b)) \tag{2}$$

Cette formulation est circulaire et justifie à peut près n'importe quoi. En effet, on peut peut prendre le « $\forall X$ » au sens externe, du *Deus ex machina*, ce qui donne l'identité. On peut le prendre au niveau interne des propriétés logiques (transportables), ce qui donnera l'isomorphie.

Finalement, cette définition ne donne, au mieux, qu'une astuce technique pour définir l'égalité (au sens d'isomorphie) ; cette astuce a ses limites, qui sont celles des calculs du second ordre (pas de propriété de la sous-formule) et du *calcul des prédicats*, notion vieillote, qui reste encore tributaire de. . . la syllogistique : on admet d'étranges catégories morphologiques (énoncés, termes, prédicats, démonstrations, modèles) qui ne survivent que du fait du conservatisme ambiant. Et c'est loin d'être innocent ; par exemple, les *atomes* propositionnels (les lettres $P, Q, R, \ldots$, sans signification précise), si on les prend au sérieux, demandent un traitement excentrique en porte-à-faux avec le cas général. Oubliant la tradition sclérosée qui pense en termes d'atomes, on peut introduire des *variables* propositionnelles et remplacer $P, Q, R, \ldots$ par $X, Y, Z, \ldots$, ce qui amène à considerer $P \Rightarrow P$ comme un énoncé $X \Rightarrow X$ avec variables libres, ce qui nécessite à un moment une quantification pour donner un sens aux variables. *Exit* la catégorie douteuse des atomes.

La catégorie la plus douteuse qui survit en logique est celle des prédicats, qui s'inscrit dans une dualité mal fichue objet/prédicat. La grande conquête du système de Martin-Löf est l'identification entre $P(a)$ (a vérifie le le prédicat P) et $a \in P$ (a est une démonstration de la proposition P), avec les primitives $\Pi x \in A\, B(x)$, $\Sigma x \in A\, B(x)$ qui combinent, l'une $\forall$ et $\Rightarrow$, l'autre $\exists$ et $\wedge$. Ainsi disparaissent ces objets, ces termes qui viennent d'on ne sait trop où (encore de l'essentialisme), ainsi que les prédicats, du moins comme catégorie primitive. Faute d'urgence, cette innovation majeure n'a jamais été unifiée avec cette autre innovation, la logique linéaire ; en conformité avec la négation linéaire, il faudrait que $\Pi x \in A\, B(x) \;=\; \Pi y \in \sim B \;\sim A(y)$.

Il semble bien qu'il n'y ait que deux catégories, les « desseins » (démonstrations, réfutations, termes) et les comportements (énoncés), le prédicat prenant la forme $\mathfrak{a} \in \mathbf{A}$ de l'appartenance d'un dessein à un comportement.

La disparition du *concept* de prédicat rend obsolète la version officielle de l'égalité de Leibniz. La bonne idée est de dire que $a = b$ ssi a et b se comportent de même dans « tout contexte ». Ce qui s'écrit $\ll \mathfrak{a} \mid \mathfrak{c} \gg \, = \, \ll \mathfrak{b} \mid \mathfrak{c} \gg$ en GdI ; observons que le contexte est redescendu sur Terre : $\mathfrak{c}$ est de même nature que $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$. On obtient ainsi une égalité observationnelle :

$$\mathfrak{a} \cong_{\mathbf{A}} \mathfrak{b} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \mathfrak{c} \in \sim\mathbf{A} \ll \mathfrak{a} \mid \mathfrak{c} \gg \, = \, \ll \mathfrak{b} \mid \mathfrak{c} \gg \tag{3}$$

C'est, à première vue, un cas particulier de (2) (avec $X(x) := \ll \mathfrak{a} \mid \mathfrak{c} \gg \, = \, \ll x \mid \mathfrak{c} \gg$), en fait équivalent au cas général, mais structurellement beaucoup plus simple. Il s'agit d'*isomorphie* : $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ sont égaux en tant qu'*espèce de type* $\mathbf{A}$, ce qu'exprime la restriction sur le contexte : $\mathfrak{c} \in \sim\mathbf{A}$.

B Le produit locatif

Le produit cartésien $A \times B$ est spirituel, i.e., défini à isomorphisme près. C'est la délocalisation d'un « produit locatif » :

$$A \mathbin{\cup\!\!\!\!\!\times} B \;=\; \{a \cup b \,;\; a \in A\; b \in B\}$$

qui est commutatif, associatif, distribue (littéralement) sur l'union. Le produit cartésien est obtenu en remplaçant A, B par A', B' tels que $\bigcup A' \cap \bigcup B' = \emptyset$, ce qui fait que, si $a \in A', b \in B'$, $a = (a \cup b) \cap \bigcup A', b = (a \cup b) \cap \bigcup B'$. Le produit locatif est, tout comme l'union, idempotent : $A \mathbin{\cup\!\!\!\!\!\times} A = A$.

Tout ceci *passe bien* à l'ensemble des parties, e.g., finies $\wp_f$:

$$\wp_f(A \cup B) = \wp_f(A) \mathbin{\cup\!\!\!\!\!\times} \wp_f(B)$$

Une des principales tensions identité/isomorphie est le dilemme entre intersection et produit cartésien, les deux visions de la conjonction, *a priori* inconciliables : l'intersection est « plus petite », le produit « plus gros ». Un résultat élémentaire[6] d'arithmétique est le *lemme du Chinois* :

$$\mathbb{Z}/(p\mathbb{Z} \cap q\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$$

valable pour p, q premiers entre eux : si l'on connait les restes des divisions de n par p et q, on connait aussi son reste *modulo pq*. Il énonce une relation entre une intersection et un produit sous une hypothèse locative : p, q « premiers entre eux », ce qui est à rapprocher des hypothèses du genre $A \cap B = \emptyset$ et du *mystère de l'incarnation* (1) de la ludique.

C Occurrences

Les typages intersection (Ecole de Turin) sont assez intéressants, car ils exploitent les deux aspects, spirituel et locatif. Mais ils sont souvent tributaires de conventions syntaxiques obsolètes, qui, si elles se justifient dans un cadre spirituel, crèent des problèmes artificiels dans ce monde locatif que sous-entend l'intersection : il ne faut pas « se tromper d'identité ». Et donc, remettre à plat la notion d'*occurrence* : deux occurences de A, ce sont deux *délocalisations* de A, soit A', A''. C'est pénible à écrire, mais $A, A \vdash A$ est en fait $A', A'' \vdash A'''$. Autrement dit, on dispose de ϕ, ψ tels que $\phi(A') = \psi(A'') = A'''$ et au lieu d'écrire, $x \in A, y \in A \vdash x \in A$, on écrit $x \in A', y \in A'' \vdash \phi(x) \in A'''$. En fait, les variables perdent tout intérêt dans un monde locatif : x est le nom d'une variable localisée « en A' », en fait x est le nom du lieu ; on pourrait tout aussi bien écrire $A', A'' \overset{\phi}{\vdash} A'''$. À ne pas confondre avec l'approche catégorique, pour laquelle ϕ est l'identité $A \Rightarrow A$[7].

Cette gestion locative, sans variable, nous vient des *réseaux de démonstration* de la logique linéaire : les énoncés ont une place donnée, ce qui fait que le produit tensoriel est commutatif ; ce qui interdit les éléments neutres[8]. Il faut souvent réfléchir à deux fois à cause de cet aspect locatif, sous peine de créer des problématiques artificielles : par exemple, la théorie des réseaux additifs, basée sur l'identité (on superpose les « mêmes » choses), bute sur la question « comment superposer des coupures ? ». Fausse question, car la coupure est introspective, idiomatique : une formule de coupure, définie à isomorphisme près, n'est superposable à aucune autre.

De même, en logique non commutative, on a envie d'écrire une relation entre les tenseurs non commutatifs et le tenseur commutatif, soit :

$$A \otimes B = (A \olessthan B) \cap (A \ogreaterthan B)$$

ce qui est purement locatif et ne peut en aucune façon s'écrire :

$$A \otimes B = (A \olessthan B) \cap (B \olessthan A)$$

NON SI NON LA

[6]Bien connu des logiciens, car Gödel l'a utilisé pour coder les suites d'entiers.

[7]La GdI ne se ramène pas à des catégories dans lesquelles les identités auraient été remplacées pas des isomorphismes : la composition de la GdI n'est pas la composition catégorique.

[8]Comment *écrire* (ce qui modifie) un élément neutre *littéral*, i.e., qui ne change rien ?