La logique, d'Aristote aux algèbres d'opérateurs

Jean-Yves Girard
Institut de Mathématiques de Luminy, UPR 9016 – **CNRS**
163, Avenue de Luminy, Case 930, F-13288 Marseille Cedex 09

girard@iml.univ-mrs.fr

25 février 2007

1 Le syllogisme

Il est évidemment culotté de tenter de baser la logique du XXI^{e} siècle sur le syllogisme, domaine codifié, ossifié, s'il en est. Pourtant, la vieille syllogistique ne nous a pas livré tous ses secrets. Par « secret », il ne faut comprendre ni un savoir ésotérique qu'Aristote nous aurait dissimulé, ni un « truc » qui la remettrait en selle : approche archaïque, elle est morte et bien morte. Mais certains développements très récents — typiquement la logique *parfaite* —, sans être du ressort de la syllogistique, en perpétuent l'esprit et l'éclairent de façon inattendue.

Le syllogisme le plus connu est *Barbara* : tout B est C, or tout A est B, donc tout A est C. Qu'est ce que cela peut bien vouloir dire ?

1.1 Łukasiewicz

Pour ce logicien des années 1920, le syllogisme exprime la transitivité de l'inclusion : il suffit de dessiner des « patatoïdes », $A \subset B \subset C\ldots$ Étonnant non ? Le plus étonnant, c'est que l'on ait osé donner de telles « explications » : la figure a sans nul doute une valeur mnémotechnique, mais de là à dire qu'elle *justifie* le syllogisme... D'ailleurs, ne serait-ce pas plutôt, au contraire, le syllogisme qui justifie la transitivité de l'inclusion ? Ce type d'interprétation, poussé à son paroxysme par Tarski :

$$A \wedge B \text{ est vrai quand } A \text{ est vrai } \textit{et } B \text{ est vrai}$$

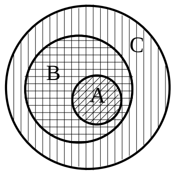

FIG. 1 – Le syllogisme selon Łukasiewicz

(et tout le reste à l'avenant) est une lapalissade, l'indice d'un *point aveugle*. Cela dit, certains petits malins n'avaient pas les yeux dans les poches ; ils se sont empressés de définir des logiques tombées du ciel, par exemple, le connecteur « broccoli », noté $\heartsuit$:

$$A \heartsuit B \text{ est vrai quand } A \text{ est vrai } \textit{broccoli } B \text{ est vrai}$$

$\heartsuit$ et son « méta », « broccoli », c'est tout et n'importe quoi, de préférence n'importe quoi... mais, quoi qu'il en soit, la même chose écrite de deux façons différentes, par exemple en caractères gras et en italiques. Cette activité[1], qui reste cantonnée à des publications et séminaires spécialisés, est un des aspects les moins glorieux de l'*essentialisme* logique.

1.2 Les catégories

Un progrès fondamental, bien qu'insuffisant, est franchi avec les *catégories* : les énoncés A, B, C deviennent des *objets* et les implications — ou plutôt leurs démonstrations — des *morphismes*. *Barbara* exprime alors la *composition* desdits morphismes :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "g \circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & C \\
& B \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

FIG. 2 – La composition des morphismes

Il y a ici une ébauche de statut du *sujet*, qui s'exprime à travers le choix des morphismes : il y en a, en effet, plusieurs allant de A vers B, ce qui reflète la pluralité des démonstrations possibles de la même implication $A \Rightarrow B$.

[1]On appelle cela de la « logique philosophique », une combinaison de mots qui sonne comme « démocratie populaire ».

Bien que nettement plus raffinée, cette interprétation est tout aussi essentialiste : en effet un morphisme (le mot dérive de « forme ») vient au monde avec, au poignet, des étiquettes de source, de but, etc. Qui dit essentialisme dit point aveugle et possibilité de définitions tombées du ciel : au mieux, on assistera à une paraphrase stérile, e.g., les catégories cartésiennes fermées, dans lesquelles on prétendra enfermer la déduction logique ; au pire, exploitant l'illisibilité bien connue des diagrammes catégoriques, le petit malin de la section précédente, ou plutôt son cousin, produira des *catégories du Loch Ness* de peu d'intérêt sauf, évidemment, pour sa propre carrière.

1.3 Le troisième sous-sol

L'approche tarskienne, la vérité (et ses satellites : prouvabilité, cohérence) forment le premier sous-sol des fondements logiques. Alors que l'approche catégorique, qui donne un statut aux démonstrations, constitue le second sous-sol, plus satisfaisant, mais toujours insuffisant. Dans les deux cas, le serpent finit par se mordre la queue et un troisième sous-sol est nécessaire.

Ce n'est pas un hasard si le niveau -2 a trouvé son plein épanouissement (l'isomorphisme de *Curry-Howard*) à travers l'informatique ; quant au niveau -3, il est profondément influencé, à travers la logique linéaire, par la même informatique : c'est pourquoi la nuance entre les trois niveaux s'explique bien en termes algorithmiques. La même fonction φ peut se lire à trois niveaux :

-1 : φ prend des arguments entiers ($\mathbb{N}$) et donne des réponses booléennes ($\mathbb{B}$), ce que l'on note, de façoon tout à fait standard, $\mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{B}$.

-2 : $\varphi(n) = V$ quand n est premier, $\varphi(n) = F$ sinon.

-3 : φ est le crible d'Ératosthène.

Le niveau -1 s'intéresse donc aux types d'entrées/sorties, le niveau -2 aux graphes, le niveau -3 à la dynamique.

On verra plus tard que la différence technique essentielle entre les niveaux -2 et -3 est celle qui sépare, en algèbre linéaire, les deux invariants scalaires que sont la *trace* et le *déterminant* : la trace *explicite* le déterminant et fait passer du potentiel à l'*actualisation* des possibilités. Nous verrons alors que ce *tic* logique (l'actualisation, typique des modèles de Kripke et autres banalités logicistes) repose sur une construction *divergente*.

1.4 Syllogismes et réseaux

Une analyse du syllogisme au niveau -3 suppose le rejet de toute *forme* (vérité, cohérence, morphismes, etc.) préexistante et donc, de l'*essentialisme.*

Plutôt que dire que les lois logiques préservent des principes sacrés (la vérité) et sont donc secondes, on va, au contraire, partir des lois logiques, sans chercher à les justifier, et analyser leur fonctionnement.

Barbara induit un réseau :

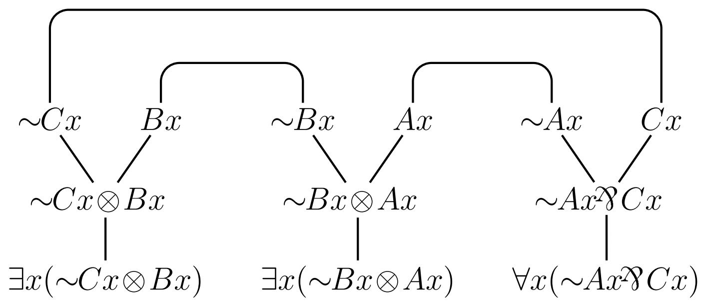

FIG. 3 – *Barbara* en réseau

Cette écriture ne se trouve pas sous le sabot d'un cheval : elle vient de la *logique linéaire* dont on reconnaît par ailleurs les symboles ($\sim$ au lieu de $\neg$, $\otimes$ au lieu de $\wedge$, $\parr$ au lieu de $\vee$, $\multimap$ au lieu de $\Rightarrow$). L'utilisation de la logique linéaire, de création très récente, est moins bizarre qu'il ne paraît. En effet, Aristote était étranger à la discussion qui sous-tend l'opposition entre logiques classique et linéaire ; le système le plus neutre, ici, la logique linéaire, sera donc le mieux adapté[2].

Pour comprendre le réseau (fig.3), il faut remettre par la pensée les deux conclusions existentielles en prémisses : il faut alors les nier, ce qui donne $\forall x(\sim Ax \parr Bx)$ (i.e., $\forall x(Ax \multimap Bx)$) et $\forall x(Bx \multimap Cx)$; il ne reste plus qu'une conclusion, $\forall x(Ax \multimap Cx)$. Permutons C et $\sim C$: si l'on remet les conclusions $\exists x(\sim Bx \otimes Ax)$ et $\forall x(\sim Ax \parr \sim Cx)$ en prémisses, on est dans la figure *Darii* : tout A est B, or il y a un C qui est A, donc il y a un C qui est B. *Modulo* des échanges prémisse/conclusion, on voit qu'il n'y a, fondamentalement, qu'un seul syllogisme. Cet échange correspond à la négation, qui prend alors une allure autrement intéressante que chez Tarski-La Palice pour lesquels :

$\neg A$ est vrai quand A *n*'est *pas* vrai

Reveons à l'opposition existence/essence : l'opération de retournement serait primitive, le symbole de négation ne venant qu'après coup pour comptabiliser les retournements et éviter ainsi des *erreurs*.

[2]Prétendre — ainsi qu'un collègue américain — interdire l'utilisation des réseaux pour expliquer les syllogismes au titre qu'Aristote aurait eu en tête la logique classique, relève de l'anachronisme pur et simple.

1.5 Des erreurs de quoi, au juste ?

La discussion précédente ne nie pas l'intérêt de la vérité, ni de la composition des morphismes, mais elle leur conteste tout caractère *explicatif*. Cette explication, on la cherchera plutôt dans la géométrie (ou la topologie) des syllogismes : revenant au réseau (fig.3), on voit qu'il est constitué de deux morceaux relativement distincts :

1. La partie inférieure qui regroupe les conclusions (et prémisses niées) ; cette partie concerne la morphologie, l'essence : c'est le « surmoi » logique qui dit ce que le réseau *doit* faire.
2. La partie supérieure qui est formée d'une sorte de câblage entre points munis d'étiquettes opposées.

Ces arêtes peuvent, en effet, être perçues comme des fils électriques bi-directionnels : ce qui constitue, par ailleurs, une métaphore que l'on peut suivre extrêmement loin, puisqu'elle explique des choses aussi complexes que l'*élimination des coupures* (Gentzen, 1934)[3]. Dans une implication $A \multimap B$, le câblage me fournira un moyen de faire transiter l'information de A vers B, en fait, entre A et B, puisque ce transit se révèle bi-directionnel.

Je traduis cette idée sur le réseau (fig.3) : si je me donne $\forall x(Ax \multimap Bx)$ (et $\forall x(Bx \multimap Cx)$), i.e., un câblage me permettant de passer de A à B (et de B à C), si j'effectue le branchement, alors le câblage résultant me permettra de passer de A à C. Ce qu'on peut expliquer au moyen de câblages *virtuels* :

1. Le symbole $\otimes$ dénote en fait un câblage entre les deux prémisses.
2. Par contre, la disjonction $\parr$ dénote l'absence de câblage.

Le graphe ainsi formé se révèle connexe et acyclique : c'est ce qu'on appelle en topologie un *arbre*.

1.6 Euler-Poincaré contre Łukasiewicz

Si l'on connecte les prémisses des conjonctions, si l'on disconnecte les prémisses des disjonctions, le résultat doit être connexe et acyclique.

La logique linéaire est véritablement née au moment où cette condition (le *critère de correction*) a donné lieu au *théorème de séquentialisation* (1986) : ce résultat, nullement trivial hors du cadre trop contraint de la syllogistique, caractérise les démonstrations logiquement correctes en termes de connexité/acyclicité. Au départ outil technique (une écriture économique des démonstrations), le *critère de correction* est devenu la base d'une relecture radicale de la logique.

[3]Qui sous-tend l'isomorphisme de Curry-Howard.

Les syllogismes ont été classés, au Moyen Âge, par la scolastique[4] ; ainsi, les voyelles, réfèrent-elles, dans l'ordre, à la (prémisse) majeure, à la mineure et à la conclusion, suivant le code :

a : universel affirmatif « tout A est B ».

e : universel négatif « aucun A n'est B ».

i : existentiel affirmatif « un A est B ».

o : existentiel négatif « un A n'est pas B ».

Le nombre d'arêtes supérieures de tous les syllogismes est 3 ; le nombre n d'arêtes inférieures est égal au nombre de « **a, e** » en prémisses et de « **i, o** » en conclusion. Le nombre de sommets du graphe est 6. L'*invariant d'Euler-Poincaré* est défini comme la différence entre le nombre de sommets et le nombre d'arêtes, soit $6 - 3 - n = 3 - n$; il est aussi égal à la différence entre le nombre c de composantes connexes et le nombre p de cycles (primitifs). Par exemple, pour *Barbara*, on obtient $c - p = 3 - 2 = 1$, ce qui correspond au fait que le graphe est connexe ($c = 1$) et acyclique ($p = 0$).

On sait que, parmi les syllogismes aristotéliciens, certains sont incorrects : ils utilisent implicitement un principe du genre « si tout A est B, alors un A est B ». Une certaine lecture laxiste, condescendante, veut bien pardonner à ce pauvre Aristote qui n'avait pas eu le temps de lire Łukasiewicz : en demandant que les « ensembles »[5] A, B, C soient non vides, cela marche.

Ces syllogismes (*Barbari, Darapti, Felapton, Fesapo*) ont pour particularité de contenir une seule fois les lettres « **i,o** » (contrairement à *Ferio*, qui en contient deux) et l'invariant d'Euler-Poincaré vaut alors $c - p = 3 - 3 = 0$. Comme $c \geq 1$, c'est que $c = p = 1$ et il y a donc un cycle, perçu logiquement comme un *cercle vicieux*.

La lecture de niveau -3 est beaucoup moins tolérante que celle de niveau -1 et nous montre que les syllogismes douteux sont vraiment faux, sans remède. Il n'est donc pas question de les raccommoder ; encore moins de faire bénéficier ce pauvre Aristote de l'indulgence qu'on accorde aux vieillards gâteux. Il est plus sain d'admettre que la syllogistique est une invention géniale, mais qui souffre parfois des limitations propres aux balbutiements scientifiques : quand c'est mauvais, c'est vraiment mauvais !

[4]Expression éminemment péjorative, qui correspond à la sclérose d'une certaine tradition sorbonnarde, sclérose qui ne s'est par ailleurs jamais démentie. Mais, faut-il faire retomber sur les ancêtres l'incurie de leurs lointains héritiers ?

[5]Ici, un véritable contresens : la lecture ensembliste est réductrice, ce qui fait qu'elle n'est adaptée aux syllogismes que négativement : si l'on peut réfuter un syllogisme au moyen de *patates*, on ne peut par contre pas le justifier par de telles méthodes.

1.7 Croisements

Tant qu'à faire, examinons encore le réseau (fig.3) : la négation obéit aux conventions qui régentent le monde non commutatif : $\sim(A \otimes B) :=\sim B \otimes \sim A$, etc. De même, prémisses et conclusions sont écrites dans l'ordre : majeure (niée), mineure (niée), conclusion. Tous les syllogismes corrects se déduisent de cette figure de base, à condition d'échanger certains énoncés et leurs négations et d'opérer des permutations : ces permutations peuvent concerner les deux constituants d'une conjonction ou d'une disjonction ; elles peuvent aussi concerner les conclusions du réseau. C'est ainsi que le passage de *Barbara* à *Darii* suppose d'échanger C et $\sim C$ et aussi de permuter circulairement les trois conclusions, puisque « un C est B » passe à droite.

Ces permutations peuvent devenir inesthétiques à cause des *croisements* qu'elles induisent. Ainsi que l'a remarqué Abrusci[6], les syllogismes de la « première figure » : *Barbara, Celarent, Darii, Ferio* sont sans croisements, i.e., *planaires* ; et d'ailleurs, on passe de *Barbara* à *Darii* au moyen d'une permutation *circulaire* des conclusions qui n'induit pas de croisements. Ceux des deuxième et troisième figures : *Camestres, Cesare, Baroco, Festino, Disamis, Bocardo, Datisi, Ferison* sont à un croisement. Quant aux syllogismes apocryphes de la quatrième figure : *Calemes, Dimatis, Fresison*, ils sont à deux croisements. Ce nombre de croisements est lié aux transformations nécessaires au passage d'un syllogisme à l'autre.

1.8 La logique parfaite

Il n'est pas question de repenser la syllogistique : laissons les morts enterrer les morts. Celle-ci souffre, en effet, d'un défaut formel rédhibitoire : le langage est trop restrictif, en particulier non itératif. Ainsi, **a, e, i, o** ne sont-ils pas des connecteurs, i.e., des opérations faisant passer d'un ou plusieurs énoncés à un autre énoncé : se restreindre à ces quatre formes, c'est se condamner à l'archaïsme.

La logique *parfaite* est ce qui s'approche le plus de la syllogistique : c'est le *fragment* (i.e., morceau) de logique linéaire basé sur la négation $\sim$, les multiplicatifs $\otimes, \parr, \multimap$, les additifs $\oplus, \&$ et les quantificateurs $\exists, \forall$. Nous avons déjà rencontré les multiplicatifs et les quantificateurs, devenus *itératifs* comme dans l'énoncé $(A \otimes B) \multimap C$, illégal en syllogistique. Les *additifs* expriment des choix exclusifs, ainsi $A \oplus B$ signifie soit A, soit B ; alors que $A \parr B$ correspond à une *concomitance*, e.g., à un *vase communicant* :

Ces opérations logiques sont dites *parfaites* car, à l'instar des temps parfaits (passés composé et simple) du français ou le perfectif des langues slaves,

---

[6] Non publié.

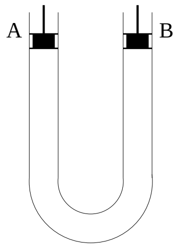

FIG. 4 – « Par » comme vase communicant

ils indiquent une qualité qui s'use quand on s'en sert : dans une implication *linéaire* $A \multimap B$, la prémisse est consommée.

Le monde parfait peut s'interpréter au niveau -1 dans un monde mercantile, chaque énoncé étant représenté par ses *coûts* : $\multimap$ correspond à l'espace des différences : $A \multimap B := \{c\ ;\ c + A \subset B\}$; la conjonction additive correspond à l'intersection : $A \& B := A \cap B$; $\otimes$ somme les coûts : $A \otimes B := A + B$, formulation incorrecte à remplacer par $A \otimes B := \sim\sim(A + B)$.

1.9 L'imperfection

L'imperfection (qui correspond à notre imparfait, à l'imperfectif des langues slaves) dénote des actions non terminées (in-finies) pour cause de répétition. L'imperfection repose sur un principe de *pérennité* :

$$A \multimap A \otimes A \tag{1}$$

En termes de coûts, cela suppose $a + a = a$, ce qui mène aux *algèbres de Boole*, structures assez rébarbatives. Si l'on s'en tient aux *vrais* coûts, c'est que $a = 0$ ou $a = \infty$: on voit qu'on a perdu en finesse, car il y a peu de choses gratuites ($a = 0$) ou complètement inabordables ($a = \infty$)[7]. La logique classique (ainsi que la logique intuitionniste, qui, du point de vue fondationnel, en est très proche), est une logique *imparfaite*, basée sur la pérennité. La logique linéaire n'est pas imparfaite, mais on y peut traduire l'imperfection au moyen d'une opération de *pérennisation* $!A$ « A *ad libitum* » ; la conséquence logique est alors représentée par l'implication imparfaite :

$$A \Rightarrow B \quad := \quad !A \multimap B \tag{2}$$

qui dit que B est conséquence de la *pérennisation* $!A$ de A.

La véritable question logique, difficile, vivante, est celle de l'imperfection, i.e., de l'infini. En effet, il n'y a pas d'infini (au sens habituel) sans in-fini :

[7]En termes catégoriques (espaces cohérents, *infra*), l'équation (1) est tout aussi bizarre : elle s'énonce « quadratique=linéaire ».

le principe qui énonce l'existence d'un point hors d'un ensemble donné va produire, par itération, autant de points que je veux et, à terme, un ensemble infini... à condition qu'il soit *pérenne* et ne s'use pas, ce qui serait le cas si, par exemple, je devais payer chaque utilisation de ma poche !

2 Espaces cohérents

2.1 Le deuxième sous-sol

Avant que d'être un pâturage pour ruminants catégoriques, le niveau -2 a été une source d'inspiration : la logique linéaire est entièrement issue d'une analyse de niveau -2, les *espaces cohérents*. Cette analyse a été remplacée pour cause de *point aveugle*, mais cette limitation concerne surtout l'*imperfection* : les espaces cohérents et les produits dérivés restent relativement efficaces dans le monde *parfait*.

2.2 Espaces cohérents

Les espaces cohérents ressemblent à une version infantile de l'algèbre linéaire ; ce qu'on nuancera en remarquant qu'un enfant peut grandir. On définit une dualité entre sous-ensembles d'un *support* $|X|$; deux ensembles sont *polaires* quand ils ont au plus un point en commun :

$$a \mathrel{\overset{\downarrow}{\sim}} b \quad \Leftrightarrow \quad \sharp(a \cap b) \leq 1 \tag{3}$$

Si $A \subset \wp(|X|)$, le *polaire* $\sim A \subset \wp(\{X\})$ est l'ensemble des b qui sont polaires à tout élément de A :

$$\sim A \quad := \quad \{b \subset |X| \ ; \ \forall a \in A \quad a \mathrel{\overset{\downarrow}{\sim}} b\} \tag{4}$$

Un *espace cohérent* X de support $|X|$ est un ensemble de parties de $|X|$ égal à son bipolaire. La caractérisation suivante correspond à la définition « standard » des espaces cohérents :

Proposition 1
Soit X un espace cohérent et soit $\frown\mkern-13.5mu\smile$ la relation binaire (réflexive et symétrique) définie sur $|X|$ par :

$$x \mathrel{\frown\mkern-13.5mu\smile} y \quad \Leftrightarrow \quad \{x, y\} \in X \tag{5}$$

Alors $a \subset |X|$ est un élément de X ssi a est une clique, *i.e., est formé de points deux à deux* cohérents *(par rapport à $\frown\mkern-13.5mu\smile$) :*

$$\forall x, y \in a \quad x \mathrel{\frown\mkern-13.5mu\smile} y \tag{6}$$

En référence aux cliques, on utilise, plutôt que la notation $a \in X$, la notation plus parlante $a \sqsubset X$.

En termes d'algèbre linéaire, $\sim X$ correspond à l'espace dual, le cardinal de l'intersection à l'application d'une *forme* à un « vecteur » et l'ensemble $\{0, 1\}$ au « corps des scalaires ». Tant qu'à faire, l'union de sous-ensembles disjoints correspond à la somme, d'où la définition :

Definition 1 (Morphisme)
Les applications linéaires *de X dans Y sont les fonctions φ préservant les unions disjointes arbitraires :*

$$\varphi(\sum a_i) \quad := \quad \sum \varphi(a_i) \tag{7}$$

Ce qui se décline ainsi :

Croissance : $a \subset b \Rightarrow \varphi(a) \subset \varphi(b)$.

Continuité aux *suprema* filtrants : $\varphi(\bigcup_\uparrow a_i) = \bigcup_\uparrow \varphi(a_i)$

Stabilité : $a \cup b \in X \Rightarrow \varphi(a \cap b) = \varphi(a) \cap \varphi(b)$

Linéarité : $\varphi(\emptyset) = \emptyset$; $\varphi(a \cup b) = \varphi(a) \cup \varphi(b)$.

Les deux premières conditions sont susceptibles d'un traitement autonome, au moyen des *domaines de Scott*, une sorte de topologie infantile ; ou plutôt naine, car elle n'a jamais pu grandir.

Les morphismes de X dans Y ne sont autres que les cliques d'un espace cohérent $X \multimap Y$, de support $|X| \times |Y|$; à φ, on associe son *squelette* :

$$\mathrm{Sq}(\varphi) \quad := \quad \{(x, y); x \in \varphi(\{y\})\} \tag{8}$$

La transformation $\varphi \rightsquigarrow \mathrm{Sq}(\varphi)$ est une bijection très naturelle ; elle permet la mise sur pied de la logique parfaite. L'application d'une fonction à un argument, qui est le noyau dur de la composition, s'exprime par :

$$a \sqsubset X, b \sqsubset \sim Y \quad \Rightarrow \quad \sharp(\varphi(a) \cap b) = \sharp(\mathrm{Sq}(\varphi) \cap (a \times b)) \tag{9}$$

Une application linéaire φ de X vers Y admet un *adjoint* φ^* de $\sim Y$ vers $\sim X$:

$$a \sqsubset X, b \sqsubset \sim Y \quad \Rightarrow \quad \sharp(a \cap \varphi^*(b)) = \sharp(\varphi(a) \cap b) \tag{10}$$

L'adjonction retourne le squelette, en effet, si $\mathrm{op}(x, y) := (y, x)$, alors :

$$\mathrm{Sq}(\varphi^*) = \mathrm{Sq}(\varphi)^{op} \tag{11}$$

2.3 La pérennité

La pérennité s'exprime avant tout par la réutilisation d'hypothèses ; on peut, en effet, transformer une fonction linéaire φ de $X \otimes X$ dans Y en une fonction ψ de X dans Y, en posant $\psi(a) := \varphi(a, a)$. ψ est quadratique et l'application systématique des principes pérennes conduit à l'idée d'une dépendance polynomiale et, plus généralement, *analytique*. De telles fonctions peuvent être définies, au niveau des espaces cohérents : ce sont les fonctions croissantes, continues aux *suprema* filtrants et stables. En fait, en remplaçant l'espace de définition X par son « algèbre symétrique » $!X$, ce sont exactement les fonctions linéaires de $!X$ vers Y, d'où l'équation fondatrice :

$$X \Rightarrow Y \quad = \quad !X \multimap Y \tag{12}$$

où l'*exponentielle* $!X$ dénote une espèce de *pérennisation* ; en fait, $|!X|$ est formé des cliques *finies* de X, avec :

$$a \frown b \quad \Leftrightarrow \quad a \cup b \sqsubset X \tag{13}$$

La pérennité est une drôle de chose. Elle ne concerne ni la vie, ni les guerres, ni les royaumes, rien de sublunaire : *sic transit.* Ni même les systèmes solaires et galactiques... elle est de l'autre monde : c'est ainsi que l'on pérennise les morts par le souvenir. Le monde physique n'offre, en matière de pérennité, que des à-peu-près résumés par l'image du verre d'eau que l'on peut indéfiniment ponctionner sur la mer. C'est une pérennité modeste, qui ne permet pas de ponctionner une mer sur la mer, du moins pas éternellement. Le principe du verre d'eau peut s'écrire, si X est le verre d'eau et $!X$ sa forme pérenne (la mer) :

$$!X \multimap X \otimes !X \tag{14}$$

Mais la pérennité contient beaucoup plus que cela, par exemple, l'idée que, de la mer, on peut extraire deux mers :

$$!X \multimap !X \otimes !X \tag{15}$$

Voire indéfiniment ponctionner une mer sur la mer :

$$!X \multimap !!X \tag{16}$$

Ces principes sont spécieux, car ils énoncent plus que la simple pérennité : la *pérennité de la pérennité.* On y sent l'influence du thomisme qui, au Moyen-Âge a verrouillé la théologie pour assurer une sorte d'immunité à Dieu.

Ces principes, une fois traduits en termes formels, permettent de construire des fonctions dans le genre des *tours d'exponentielles* :

$$2_k(n) := 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^n}}}}}} \tag{17}$$

qui sont des *monstres* sans réel sens mathématiques, l'évidence que les principes de la logique classique sont faux, ou du moins, critiquables.

2.4 Le point aveugle

La logique imparfaite est incapable d'éviter des monstres tels que (17) ; en logique linéaire, la situation est plus ouverte car le départ parfait/imparfait permet d'envisager des situations intermédiaires entre deux extrêmes :

1. La logique parfaite, sans pérennisation.
2. La logique linéaire avec la pérennisation « standard », essentiellement les principes (14), (15) et (16).

Celle-ci en fait trop alors que celle-là n'en faisait pas assez. Entre les deux, des systèmes expérimentaux de *logique allégée* décrivent une pérennité plus humaine, non pérenne. C'est ainsi que dans le système **LLL** (*light linear logic*), basé sur un paramétrage fin de l'« exponentielle » $!A$, on ne sort jamais des algorithmes en temps polynomial.

La recherche d'exponentielles allégées est un enjeu fondationnel — comprendre l'infini — lié à la *complexité algorithmique* qui, comme on le sait, est une théorie sans concepts. Je propose de repenser l'infini sur des bases moins extrémistes : c'est la thèse *iconoclaste*. Elle dit que la logique classique, la théorie des ensembles, sont un peu comme le tempérament égal en musique : extrêmement commode, mais un peu faux. Les vraies mathématiques n'ont pas besoin de tours d'exponentielles du genre (17), de même que la bonne musique, celle que l'on écoute, n'a pas besoin de séries de 12 sons.

Les *iconodules* (par exemple, les barbus des *reverse mathematics*) s'appuient sur l'évidence de l'intuition sur l'infini, ce qui, après plusieurs siècles de thomisme, ne veut pas dire grand'chose : on justifierait de la même façon l'astronomie ptolémaïque sur la base de l'expérience quotidienne (le soleil se lève à l'Est) et du livre de Josué. Admettons plutôt qu'on vient d'atteindre un point aveugle autrement sérieux que les précédents, car on entre en conflit avec nos images[8] mentales, crées par des siècles de théologie de l'infini.

Le point aveugle n'est pas qu'idéologique, il est aussi méthodologique : les techniques couramment utilisées en logique, essentiellement la combinatoire

[8]Rappelons que les iconoclastes, tel Constantin V *Copronymos*, s'opposaient aux images.

des ensembles, arrivent à leur point d'inefficacité. En particulier, les espaces cohérents, qui passent si élégamment le mur de l'infini, seraient bien avisés de laisser la place aux vrais espaces vectoriels, qui, eux renâclent devant la dimension infinie. Mais il y a loin de la coupe aux lèvres et ce n'est qu'après avoir frappé à beaucoup de portes, que l'une s'ouvrira finalement, celle des *algèbres de von Neumann.*

2.5 Espaces vectoriels

Où trouver l'intuition permettant de sortir de l'enfermement pérenne ? Les espaces cohérents peuvent facilement être remplacés par des espaces de Banach, en préservant l'essentiel ; en particulier, la cohérence est exprimée par la norme, les cliques devenant les vecteurs de norme ≤ 1. Par exemple, les espaces de Banach ℓ^∞ (suites bornées) et ℓ^1 (suites sommables), sont en dualité : si $\|x\|_\infty, \|y\|_1 \leq 1$, alors $|\langle x \mid y\rangle| \leq 1$, avec $\langle x \mid y\rangle := \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n$. Si x, y sont des indicatrices d'ensembles $a, b \subset \mathbb{N}$, alors $\langle x \mid y\rangle = \sharp(a \cap b)$, ce qui montre que l'on a généralisé la relation (3).

Les *espaces de Banach cohérents* ne sont pas aussi dociles que les espaces cohérents : l'implication imparfaite $X \Rightarrow Y$ correspond aux fonctions analytiques de la boule unité de X dans la boule unité de Y. Mais il y a une épine dans la rose : la boule unité du domaine est *ouverte*, alors que celle de l'image est *fermée* et donc, ces fonctions ne se composent pas. Il n'y a aucun remède à cela : si $x \in X, \|x\| < 1$, alors $!x \in !X$, est une *masse de Dirac*, correspondant à l'évaluation d'une fonction analytique complexe au point x. $\|!x\| = 1$ et donc $!!x$ ne veut strictement rien dire : cela correspond à l'impossibilité de prolonger, en quelque sens que ce soit, une fonction analytique définie sur un disque ouvert à sa frontière.

Cette discontinuité ne fait que refléter le caractère spécieux des principes de la pérennité. C'est, si l'on préfère, une version topologique du théorème d'incomplétude.

Les espaces de Banach cohérents mettent le doigt sur le problème, mais ne donnent pas de réponse. Il faut chercher plus avant.

2.6 Espaces cohérents quantiques

La logique, science de l'abstraction, gagne toujours à être interprétée concrètement : c'est ainsi que les espaces cohérents sont bien meilleurs que les catégories cartésiennes (ou monoïdales) fermées. De même, les espaces de Banach cohérents gagnent à être mis en œuvre dans un cadre plus concret. Dans une première étape, on pourra penser aux espaces *euclidiens* (i.e., hilbertiens réels), en utilisant la dualité, définie pour $x, y \in E$:

$$x \,\underset{\sim}{\downarrow}\, y \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \langle x \mid y \rangle \leq 1 \tag{18}$$

Que l'on va spécialiser aux opérateurs *hermitiens* de l'espace de Hilbert $\mathbb{C}^{|X|}$, avec $|X|$ fini :

$$\langle h \mid k \rangle \quad := \quad \mathrm{tr}(hk) \tag{19}$$

Ce qui donne, avec les définitions usuelles (espace égal à son bipolaire), les *espaces cohérents quantiques* (ECQ). Le véhicule de l'équation (9) fonctionne toujours sous la forme : (a, b, F hermitiens sur $\mathbb{C}^{|X|}, \mathbb{C}^{|Y|}, \mathbb{C}^{|X| \times |Y|}$) :

$$\mathrm{tr}(F(a) \cdot b) = \mathrm{tr}(F \cdot (a \otimes b)) \tag{20}$$

En particulier, le *twist* σ qui opère sur $\mathbb{C}^{|X| \times |Y|}$ par $\sigma(x \otimes y) := y \otimes x$ représente l'implication identité $X \multimap X$, puisqu'un calcul facile montre que :

$$\mathrm{tr}(a \cdot b) = \mathrm{tr}(\sigma \cdot (a \otimes b)) \tag{21}$$

En utilisant l'écriture matricielle, on voit que les ECQ constituent la seconde généralisation des espaces cohérents :

1. Une clique (plus généralement, un sous-ensemble de $|X|$) peut être représentée par son indicatrice, matrice diagonale à coefficient $0, 1$. Ainsi, sur l'espace à deux points $\{V, F\}$, les matrices $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ représentent-elles les cliques $\{V\}, \{F\}$.
2. L'utilisation de coefficients réels positifs sur la diagonale indique des cliques probabilistes, par exemple $\begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}$ pour un tiers de vrai, deux tiers de faux.
3. La conquête des ECQ, c'est le « hors-diagonale ». En dimension 2, un hermitien s'écrit comme combinaison de *matrices de Pauli* : $h = 1/2 \begin{bmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{bmatrix}$, où les réels x, y, z, t correspondent à l'espace-temps de la physique, ainsi h est *positif* quand $t \geq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Les cliques $\{V\}, \{F\}$ sont représentées par des matrices de déterminant nul et de trace 1. Cette condition caractérise ces deux cliques *au changement de base près*. Un booléen dont on a perdu la base s'appelle un *spin* en mécanique quantique. Je n'ai pas le temps de développer l'algèbre hermitienne de dimension 2, encore moins les ECQ ; mais, j'espère qu'on a pu apprécier la différence qualitative avec ces débilitantes algèbres de Boole.

Les ECQ ont mis en avant, à travers la distinction spin/booléen, le rôle de la base (par rapport à laquelle s'écrit la matrice). Cette base est du domaine exclusif du *sujet*. À ce propos, que nous dit donc la logique ?

2.7 Subséquemment… ou la logique du gendarme

Que le monde logique est étriqué ! Ainsi la logique n'a jamais pu accepter l'autonomie du *sujet*. La reconnaissance du sujet se réduit, au mieux, à la distinction frégéenne entre *sens* et *dénotation*, l'étoile du matin et l'étoile du soir dénotant le même objet, Vénus. Il y aurait donc un espace « objectif », bien structuré, où toute question a reçu sa réponse, auquel s'oppose un espace de la connaissance, subjectif, en cours de construction.

À quoi la science moderne a répondu par un pied de nez. En mécanique classique, l'impulsion d'un objet a pour dénotation une certaine valeur numérique, le produit de sa masse par sa vitesse. Mais, en mécanique quantique, l'impulsion ne dénote plus rien ; on peut la mesurer, mais, en général, ce processus de calcul *crée* sa valeur, qui n'existait pas auparavant et par là-même détruit la valeur de la position si jamais elle en avait une : c'est le célèbre *principe d'incertitude*.

Dans une situation où objet et sujet sont indescriptiblement emmêlés, qu'ont fait les logiciens ? Ils ont produit la calamiteuse *logique quantique*, une espèce de punition infligée à la nature, coupable de faire des erreurs de raisonnement[9]. On continue d'ailleurs chez les logiciens à croire aux variables cachées, i.e., à une explication thermodynamique du quantique.

La pensée logique est étriquée jusque dans ses transgressions : comme tous les petits malfrats, les *paralogiciens* se veulent les défenseurs des valeurs[10] petites-bourgeoises. Il n'est donc pas étonnant que les « logiques » de l'intelligence artificielle tendent à réduire encore, voire à abolir, la distinction objet/sujet. Ainsi, la (très mal nommée) « logique épistémique » repose-t-elle sur le postulat « déduction = constatation » ; elle se réduit à une collection de devinettes, du genre *le loup, la chèvre et le chou*, mais à la sauce moderne, celle des prisons secrètes : par exemple l'anecdote des cocus de Bagdad repose sur l'idée qu'à tout moment, on sait qui sait, qui ne sait pas et sur l'*obligation* de parler. Dans ce monde, la déduction hypothétique est remplacée par le procès-verbal, la particule « donc » se décline en « subséquemment » et, *subséquemment*, la cognition ne passe plus par la raison, mais par la *gégène* — ou ce qui lui en tient lieu à Guantanamo.

2.8 Le passage à l'infini

Le passage à l'infini, à l'imparfait, suppose l'abandon de la restriction « $|X|$ fini » quant à la dimension de l'espace de Hilbert $\mathbb{C}^{|X|}$. Le passage à la

[9]Xerxes, d'après Hérodote, fit fouetter la mer à cause d'une tempête… intempestive.

[10]Ces « vraies valeurs » font partie du non-dit, de l'inconscient de la logique : ici, la dénégation du subjectif.

dimension infinie s'effectue par le biais des *algèbres de von Neumann*. Sans même en esquisser la théorie, rappelons que ce passage à la limite n'est en rien univoque : on peut, à partir de mêmes approximants finis, obtenir des algèbres de type variés, par exemple :

$\mathbf{I}_\infty$: Tous les opérateurs sur un espace de Hilbert de dimension infinie. La trace n'est définie que pour certains opérateurs dits, pour cette raison, *à trace*. Malheureusement, le *twist* σ, qui interprète l'implication $A \multimap A$, n'est pas à trace.

$\mathbf{II_1}$: Il s'agit d'un passage à la limite nettement plus fin, puisque tout opérateur va avoir une trace. L'idée est de reproduire la construction dyadique du segment $[0,1]$ au moyen de subdivisions successives, en compensant, à chaque étape, le dédoublement de l'espace (de la dimension) par une division de moitié de la mesure (de la trace). Dans cette opération la diagonale s'évapore : le calcul montre que $\mathrm{tr}(\sigma \cdot (a \otimes b)) = 0$, ce qui veut dire que l'on n'a toujours pas retrouvé l'implication identique, un fâcheux départ en vérité !

Dans les deux cas, il y a divergence, en type $\mathbf{I}_\infty$ à cause d'une série divergente, en type $\mathbf{II_1}$ parce que le résultat s'annule. On vient de retrouver, sous une forme plus raffinée, le blocage déjà observé avec les fonctions analytiques : changeons de crémerie.

3 La géométrie de l'interaction

3.1 L'équation de rétroaction

Le critère de correction des réseaux de démonstration (voir 1.4, 1.5 *supra*) est basé sur la topologie des graphes (connexité et, surtout, acyclicité). Ce qui suggère une interprétation dynamique de la logique en terme de *parcours* desdits graphes, ce que nous avons appelé des *câblages* et que l'on peut écrire matriciellement ; si les atomes $\sim Cx, Bx, \sim Bx, Ax, \sim Ax, Cx$ du réseau (fig.3) sont énumérés dans cet ordre, la matrice :

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

exprime le câblage des atomes : le coefficient $M_{6,1} = 1$ correspond au passage de $\sim Cx$ (atome n° 1) à Cx (atome n° 6), alors que $M_{6,2} = 0$ reflète l'absence de liaison directe de Bx vers Cx. Incidemment, remarquons qu'il s'agit de matrices de *permutations* : dans chaque ligne (et dans chaque colonne), il y a exactement un coefficient non nul, de plus égal à 1.

La transitivité (appelée, depuis Gentzen, *coupure*) de l'implication s'exprime an moyen d'une *équation de rétroaction* : si l'on dispose des implications $A \multimap B$ et $B \multimap C$, réalisées par des matrices (câblages) U (entre les atomes de A, B) et V (entre les atomes de B, C[11]), la (bien mal nommée) coupure sur B consiste à recoller les deux câblages au niveau de leur partie commune B. Ce qui s'écrit alors, en décomposant les espaces de représentation des matrices selon A, B, C :

$$\begin{array}{rcl} U(x_A \oplus y_B) & = & x'_A \oplus y'_B \\ V(y'_B \oplus z_C) & = & y_B \oplus z'_C \end{array} \tag{22}$$

La solution $W(x_A \oplus z_C) := x'_A \oplus z'_C$ de cette équation est une réalisation de la conclusion $A \multimap C$. La condition d'acyclicité correspond à l'unicité des composante cachées, y, y'.

3.2 La GdI et ses deux moutures

L'équation de rétroaction (22) peut servir de paradigme général pour la logique. Il suffit de remplacer les matrices U, V par des opérateurs agissant sur un espace de Hilbert de dimension infinie, i.e., de se placer dans une algèbre de von Neumann de type $\mathbf{I}_\infty$: c'est la *géométrie de l'interaction* (GdI), première mouture.

Cette interprétation fonctionne bien, un peu trop bien : puisqu'elle « digère » sans problème les principes spécieux qui président à l'infini thomiste. Pour étayer une thèse iconoclaste, il est donc nécessaire de se placer dans une autre algèbre de von Neumann, le *facteur hyperfini*, qui est de type $\mathbf{II_1}$: c'est la GdI seconde mouture (travail en cours).

3.3 Les deux infinis

Pour Pascal, il y a deux infinis, l'infiniment petit et l'infiniment grand ; cette distinction n'a pas de vrai sens mathématique, puisque la fonction $x \rightsquigarrow 1/x$ permet de réduire l'un à l'autre. Cet infini, qui prend les formes duales du ciron et de la voûte étoilée, appelons-le « quantitatif » : il correspond à l'idée que l'on se fait de l'infini en logique, à travers les cardinaux qui comparent les infinis.

[11]Plus rigoureusement, de $\sim B, C$.

Il y a, cependant, un autre infini, que l'on peut entrevoir de façon fugace : c'est l'infini des *qualités*. L'idée serait que le monde est doublement infini, tel un cahier possédant une infinité de pages (infini quantitatif) que l'on pourrait « décrire » d'une infinité de façons (infini « qualitatif »). Le codage du langage, des images, des sons — de Gödel aux modernes ordinateurs — réduit ce second infini que l'on traduit (trahi ?) en termes d'entiers et, *in fine*, en termes quantitatifs.

Cela dit, alors que la réduction de l'infiniment petit à l'infiniment grand ne pose guère problème, on peut mettre en doute la réduction de l'infini qualitatif à l'infini quantitatif. Sans revenir aux vieilles lunes spiritualistes, il y a là quelque chose comme une opposition matière/esprit : la réduction quantitative du langage ressemble furieusement à la réduction de la pensée à son support matériel, le cerveau.

3.4 Les deux infinis en logique

Ces deux infinis sont forcément des attributs de l'imperfection, i.e., des exponentielles. Celles-ci présentent deux aspects infinis (relativement) distincts ; ce que l'on résumera par l'opposition entre *exclusion* et *indifférence*.

La géométrie de l'interaction des exponentielles s'occupe, pour l'essentiel, de la duplication : à partir d'une démonstration de $!A$, représentée par l'opérateur $I \otimes u$, elle produit des « copies » de la forme $\pi \otimes u, \pi' \otimes u \ldots$, où $\pi, \pi' \ldots$ sont des projecteurs. Le problème n'est pas tant celui de la création des copies que celui de leur interaction : quand une copie rencontre une autre copie, que se racontent-elles ? Se reconnaissent-elles ou s'ignorent-elles ? Il n'y a que deux possibilités intéressantes :

Exclusion : La rencontre est impossible, car les copies évoluent dans des univers disjoints : on est en pleine différenciation *quantitative*. Ici la quantité est la dimension des sous-espaces, mesurée par la trace.

Indifférence : Les copies se rencontrent sans se comprendre, elles passent l'une à travers l'autre : en d'autres termes, elles commutent. On vient d'atteindre le cœur de la différenciation *qualitative*.

En algèbre linéaire, l'exclusion s'exprime par la somme directe, l'indifférence par le produit tensoriel :

$$(u \oplus 0) \cdot (0 \oplus v) = 0 \quad (23)$$

$$(u \otimes I) \cdot (I \otimes v) = (I \otimes v) \cdot (u \otimes I) \quad (24)$$

Se placer dans le *facteur hyperfini* $\mathcal{R}$ revient à faire des hypothèses de finitude :

Quantitative : dans une algèbre finie (i.e., à trace) telle que $\mathcal{R}$, il est difficile de produire de l'exclusion, du moins de façon interne.

Qualitative : l'hyperfinitude limite les possibilités internes d'indifférence.

C'est pourquoi le facteur hyperfini semble l'outil idéal pour un nouveau finitisme, iconoclaste celui-là. Dans ce qui suit, nous discutons certains aspects décoiffants de ce changement de paradigme.

3.5 Un contresens ?

Utiliser le facteur hyperfini dans une optique finitiste, même revue et corrigée, relève *a priori* du contresens : une algèbre de von Neumann a, habituellement, la puissance du continu, i.e., est de cardinal $2^{\aleph_0}$.

En y réfléchissant bien, il s'agit plutôt d'un approfondissement de la vieille finitude. Rappelons, en effet, qu'un ensemble est *fini* quand il n'est pas en bijection avec un de ses sous-ensembles ; de même, une algèbre de von Neumann est finie quand elle ne contient pas d'isométrie de l'espace sur un de ses sous-espaces. La différence essentielle est que la notion ensembliste se veut absolue (pas de bijection du tout), alors que, dans le cas « von Neumann », l'accent est mis sur les opérations *internes*. En résumé, ces deux notions de finitude (fini, hyperfini) sont internes et les expressions « fini », « hyperfini » ne sont choquantes que du point de vue externe, pour lequel le facteur hyperfini est tout à fait infini. On objectera que la théorie des ensembles admet des modèles ne contenant pas « toutes » les bijections et pour lesquels la finitude devient non standard, mais ce sont des constructions spécieuses ; alors que le facteur hyperfini est l'objet le plus naturel du monde[12].

Ces idées ont bien plus de cinquante ans ; mais il n'est venu à l'idée de personne et surtout pas du *Jurassic Park* fondationnel, que cette finitude, cette hyperfinitude, pourraient avoir un quelconque intérêt fondationnel. Ces docteurs de la Loi débattent de sujets autrement brûlants, par exemple, des derniers développements du finitisme hilbertien[13]. Après tout, en 1452 à Byzance, la grande question était celle du sexe des anges, pas celle des Turcs qui campaient sous les remparts.

[12] Donc, l'idée de fondations sur la base du facteur hyperfini n'est pas une idée « non standard » ; d'ailleurs, puisque « non standard » réfère à un standard préexistant, que pourraient bien être des fondements non standards ?

[13] À qui ne saurait pas ce que le mot « ringard » signifie, je recommande la liste « foundations of mathematics » : `http ://www.cs.nyu.edu/mailman/listinfo/fom`.

3.6 La revanche du potentiel

Dans un facteur de type $\mathbf{II_1}$, on dispose d'une trace et donc, sous certaines réserves techniques, d'un *déterminant.* La dualité des ECQ, basée sur $\mathrm{tr}(uv)$ et qui restait circonscrite à la dimension finie (voir 2.6), se généralise au moyen de $\det(I - uv)$.

En dimension finie (cas des ECQ), il y a une relation entre les deux invariants : $\det(I - uv)$ quantifie tous les trajets (partiels ou totaux) que l'on peut effectuer dans un réseau. Il est possible de créer un espace des *parcours* (c'est l'*algèbre extérieure*, alias espace de Fock) ainsi qu'un foncteur « parcours » $u \rightsquigarrow \Lambda iu$. En termes de parcours, le déterminant devient une trace : $\det(I+a) = \mathrm{tr}(\Lambda a)$ et donc, $\det(I-uv) = \mathrm{tr}(\Lambda(-uv)) = \mathrm{tr}(\Lambda iu \cdot \Lambda iv)$. Le foncteur *parcours* est une « actualisation » de niveau -2.

Cette équation ne passe pas à la limite : c'est parce que l'espace des parcours, qui relève du potentiel, ne se laisse pas « actualiser ». Contrairement à cette compulsion logiciste qui veut réduire le potentiel à la somme des potentialités et qui s'exprime dans des *gadgets* invertébrés du genre « modèles de Kripke » : l'espace des possibilités, des parcours possibles, diverge.

4 La vérité subjective

4.1 L'invariant scalaire

Le niveau -2 possède un invariant scalaire, le cardinal $\sharp(a \cap b)$ qui se généralise au moyen de la trace $\mathrm{tr}(uv)$) ; l'application d'une fonction à un argument s'exprime alors par les adjonctions :[14]

$$\sharp(F(a) \cap b) = \sharp(F \cap (a \times b)) \tag{9}$$
$$\mathrm{tr}(F(a) \cdot b) = \mathrm{tr}(F \cdot (a \otimes b)) \tag{20}$$

auxquelles on aimerait ajouter, au niveau -3 :

$$\det(I - F[a] \cdot b) = \det(I - F \cdot (a \oplus b)) \tag{25}$$

où $F[a]$ correspond à la solution $F[a](y) := y'$ d'une équation de rétroaction, forme simplifiée de (22) :

$$\begin{array}{rcl} a(x) & = & x' \\ F(x' \oplus y) & = & x \oplus y' \end{array} \tag{26}$$

[14]Dans (9), on a identifié F à son squelette $\mathrm{Sq}(F)$.

Mais (25) est fausse ; sa forme correcte est :

$$\det(I - F[a] \cdot b) \cdot \det(I - F \cdot a) \quad = \quad \det(I - F \cdot (a \oplus b)) \qquad (27)$$

La correction des enchaînements logiques est suspendue à ce coefficient *introspectif* $\det(I - Fa)$. Quelle peut donc être sa signification ?

4.2 Le niveau -1

Si l'on se reporte à la tradition logique, le coefficient introspectif vaut 1, car Fa est alors *nilpotent* : c'est une conséquence de la condition d'*acyclicité* rencontrée dans le critère de correction (1.6 *supra*).

Il est raisonnable de penser que ce coefficient est lié à la *vérité* : en effet, les régles logiques préservent la vérité ; par contre, la GdI est basée sur une dualité dont le résultat $\det(I - uv)$ est précisément le coefficient introspectif et la tradition nous apprend que, dans une dualité $A/{\sim}A$, au plus un des deux côtés est « vrai ». Le coefficient introspectif « mesure » donc la vérité : quand il est différent de 1, c'est que l'on n'est plus « dans le vrai ».

4.3 Aboutissement

On cherche donc à *définir* la vérité en GdI, un pied de nez à l'essentialisme arrogant de La Palice-Tarski :

La vérité est la qualité de ce qui est vrai.

Comment donc assurer que le coefficient introspectif associé à la formation de $F[a]$ soit égal à 1 ? La GdI nous donne deux conditions naturelles :

1. F et a sont des isométries partielles.
2. Fa est de rayon spectral[15] strictement inférieur à 1.

qui ne sont pas suffisantes pour conclure que Fa est nilpotent. Il nous faut une hypothèse supplémentaire ; la seule raisonnable est liée au choix d'un *point de vue*, i.e., d'une sous-algèbre commutative maximale[16] $\mathcal{P} \subset \mathcal{R}$.

Definition 2 (Aboutissement)
Une isométrie partielle σ est aboutie *du point de vue $\mathcal{P}$ quand elle appartient au normalisateur de $\mathcal{P}$:*

$$\sigma^* \mathcal{P} \sigma \subset \mathcal{P} \qquad (28)$$

[15] En dimension finie, le rayon spectral est le module de la plus grande valeur propre.
[16] En dimension finie, il s'agirait du choix d'une base de l'espace de représentation.

Si F, a sont *aboutis*, alors $F[a]$ est nilpotent et lui-même abouti. Ce qui règle une fois pour toute la question de la vérité et de la cohérence logique.

En dimension finie, l'aboutissement exprime que, par rapport à la base canonique (prise comme *point de vue*), les matrices de permutation évoquées en 3.1 *supra* ont au plus un coefficient non nul par ligne (et par colonne). Mais les matrices sont une approche *subjective* à l'algèbre linéaire, liée au choix d'une *base*, d'un référentiel, i.e., d'un *point de vue*. Notre définition de vérité est donc *subjective* ; faut-il la rejeter pour autant ?

4.4 Subjectif mais pas subjectiviste

J'ai déjà déploré le manque de réflexion logique sur le statut du sujet. À trop ignorer le sujet, à vouloir l'objectivité à tout prix, on tombe facilement dans le *subjectivisme*. Témoin l'astronomie ancienne, basée sur une pseudo-objectivité des repères terrestres et qui s'est enlisée dans les cycles et épicycles de Ptolémée, version ô combien subjectiviste des trajectoires astronomiques. Et donc, quand on analyse un problème, il importe avant tout de faire le départ entre ce qui est de l'ordre de l'objet et ce qui est de l'ordre du sujet : sinon, on s'expose à prendre pour un absolu ce qui n'est qu'un attribut du miroir. L'échec lamentable de l'intelligence artificielle prend sa source dans cette ignorance crasse du *sujet* : vouloir modéliser une situation cognitive au moyen de valeurs de vérités, même tarabiscotées, revient à dénier le caractère subjectif de la connaissance.

Ce fantasme frégéen d'objectivité a pour envers un subjectivisme débridé dont le mot de passe « inten*s*ionnel » permet toutes les licences, par exemple de distinguer une tasse avec anse à gauche d'une tasse avec anse à droite. La question véritable est donc celle de la reconnaissance du sujet : déterminer ce qui, dans l'*énoncé* d'un problème, est subjectif. Il s'agit encore d'un point aveugle : le prisonnier ne voit pas les murs de la prison car le sujet avance masqué. Ainsi, les informaticiens qui se sont occupé de la question de l'*échec* en programmation logique l'ont traité (i.e., assassiné) *sub specie æternitatis*, alors qu'il devait être analysé par rapport au sujet, i.e., à la procédure de calcul.

Dans le cas qui nous intéresse, le sujet est bien mieux dissimulé : derrière nos intuitions (nos illusions ?) ensemblistes ou combinatoires. Ce n'est qu'à l'extrême fin du XXᵉ siècle, avec la *géométrie non commutative* de Connes, approche largement inspireé par la mécanique quantique, que le caractère *subjectif* de la théorie des ensembles devient manifeste. Ce qu'on peut résumer par ce résultat fondateur :

Une algèbre d'opérateurs commutative est un espace de fonctions.

qui possède plusieurs versions (algèbres stellaires, algèbres de von Neumann).

On peut donc voir une algèbre générale, non commutative, comme un espace de fonctions sur un… non-ensemble. Et l'apparition des ensembles comme la restriction à une sous-algèbre commutative dont le choix est éminemment arbitraire, subjectif. Si l'on revient à la mécanique quantique et à l'opposition onde/particule, l'objet est plutôt du côté « onde », alors que le sujet serait plutôt « particule ».

4.5 L'intersubjectivité

Le fonctionnement de la conséquence logique, i.e., la préservation de la vérité par la déduction logique, suppose une certaine *intersubjectivité*, à savoir que les divers énoncés $A, B, \ldots$ partagent le même point de vue ; à ce prix, la vérité de A et celle de $A \multimap B$ impliqueront celle de B.

En termes d'intersubjectivité, la logique ne nous offre que la pantalonnade du « common knowledge » : aucun doute quant à la constitution du sujet n'est admis, tout est déjà là, il n'y a plus qu'à recouper les informations éparses. Cette mise en réseau d'agents infaillibles et omnicients, c'est le flicage informatique, c'est la nouvelle Inquisition de W. Bush, c'est ce qu'Orwell a nommé *Big Brother*. Bien sûr, le *common knowledge* ne fait pas partie de la logique respectable : mais seuls les mauvais logiciens osent exprimer les fantasmes totalitaires de la corporation… tout comme, autrefois, l'idiot du village extériorisait les fantasmes des gens respectables.

4.6 Le paradoxe subjectif

Le côté subjectif de la vérité fait que l'on peut être vrai ou faux, selon le point de vue ; un théorème, donc un résultat tout à fait « avéré », peut ainsi, d'un certain point de vue, devenir faux. Serait-ce la porte ouverte au relativisme ? Évidemment non : il suffit de s'interroger sur l'*usage* d'un théorème.

Ce n'est pas un aboli bibelot que l'on contemplerait pour sa beauté ; c'est un outil qui a tendance à *interagir* — sous forme de lemme — de façon à produire des corollaires : le théorème A interagit avec $A \multimap B$ pour produire B. L'idée de faire coopérer A et B implique qu'ils partagent quelque chose au niveau du sens. Ce « sens » est éminemment (inter)subjectif et s'exprime par un *point de vue* commun : par rapport à celui-ci, la vérité est préservée. Il n'y a donc pas matière à relativisme : la vérité subjective ne remet pas plus en cause la véracité des théorèmes que la relativité galiléenne ne le fait pour la réalité du mouvement.

Ce paradoxe est par ailleurs réjouissant, car il est bien triste qu'un théorème n'ait pas de réfutation : pensons à ces ingénieux raisonnements par l'absurde qui échaffaudent de merveilleux châteaux… de sable qui s'effondrent par absence d'espace de réfutation. On remarquera d'autre part que le supposé *relativisme* n'affecte pas le monde usuel, « ensembliste » : la réfutation d'un théorème se fait d'un autre *point de vue*, dans une autre « théorie des ensembles ».

4.7 La modalité

Les modalités sont les parents pauvres de la logique et, depuis longtemps, la chasse gardée de la logique philosophique qui dépense une activité cébridée dans la quête de logiques modales de plus en plus faisandées, comme si **S5**[17] n'avait pas suffisamment discrédité le sujet. En fait, les modalités sont un domaine en quête de légitimité, la question implicite restant celle-ci :

Les modalités sont-elles bien nécessaires ?

Un des rares systèmes modaux qui ne sombre pas dans le ridicule, **S4**, est entaché d'un grave défaut : on peut effacer les modalités tout en préservant la correction logique. On objectera qu'on peut en faire autant avec les quantificateurs du premier ordre ; mais ces quantificateurs ont un statut, un mode d'emploi bien précis. Alors que la modalité reste un *artefact* assez superfétatoire.

Les racines essentialistes, thomistes, de la modalité fournissent une clef de lecture : la distinction d'une vérité *nécessaire* au-delà de la simple vérité, *contingente*, ce qui mène aux sempiternels modèles de Kripke, i.e., nulle part. Mais, la référence à l'essentialisme permet de comprendre l'erreur historique de la logique modale : la modalité est superfétatoire car la notion de vérité logique, telle qu'elle apparaît implicitement dans les règles de la logique classique, est *déjà* une vérité nécessaire. Elle ne devient contingente que par un acte de foi peu convaincant ; tout comme Benoit XVI se déclarant « le plus humble de tous les pécheurs », alors qu'il possède la vérité infuse et absolue.

Pour obtenir une véritable contingence, il faut revenir dans l'arrière-cour de l'essentialisme et remettre en cause la version bétonnée de l'*imperfection* qui le sous-tend. Si le monde contingent s'identifie au monde parfait, alors la nécessité réfère à l'imperfection et tout se met à vivre. En particulier, la nécessité[18] active la règle de *contraction* (15), *alias* duplication, qui est à la

[17]C'est celle qui fait commuter, contre tout sens commun et, surtout, contre l'élimination des coupures, $\forall$ et $\Box$.

[18]Notée $!A$ et non pas $\Box A$: ce choix notationnel, tout à fait conscient, vise à éviter le voisinage infamant de **S5** et autres bricolages « philosophiques ».

base de la pérennité : autrement dit, *nécessité vaut pérennité*.

Techniquement parlant, la duplication suppose que le coefficient introspectif soit *idempotent*, i.e., égal à 1. Le principe qui préside à la pérennité est donc le même que celui qui préside à la vérité. Et d'ailleurs, la contrainte de *fonctorialité* : « de $A \multimap B$, déduire $!A \multimap !B$ » pose le problème de la stabilité déductive de la pérennité dans les mêmes termes que celle de la stabilité déductive de la vérité. Autrement dit, la pérennité, la pérennisation, sont relatives à un *point de vue*. Évidemment, on imagine mal deux utilisations parallèles et isomorphes des points de vue, d'un côté pour la vérité, de l'autre pour la nécessité/pérennité : ce sont forcément deux aspects de la même opération d'*affirmation* intersubjective :

$$\textit{Vérité} = \textit{Intersubjectivité} = \textit{Modalité}.$$

Références

[1] J.-Y. Girard. **Le point aveugle, tome 1 : vers la perfection**. Visions des Sciences. Hermann, Paris, 2006. 296 pp.

[2] J.-Y. Girard. **Le point aveugle, tome 2 : vers l'imperfection**. Visions des Sciences. Hermann, Paris, 2007. 299 pp.