

Le fantôme de la transparence

Jean-Yves Girard

*Institut de Mathématiques de Luminy, UMR 6206 – CNRS
163, Avenue de Luminy, Case 930, F-13288 Marseille Cedex 09*

girard@iml.univ-mrs.fr

26 décembre 2007

Per te, Peppe.

Je vais discuter du statut de l'implicite et de l'explicite dans les sciences en me concentrant sur la logique¹. Je m'attacherai à dénoncer, débusquer un non-dit profond et particulièrement prégnant de l'activité scientifique : l'idée subliminale, qu'au delà de la perception immédiate, existerait un monde, un niveau de lecture, complètement intelligible, i.e., explicite et immédiat. C'est ce que j'appellerai le fantasme (ou fantôme, pour m'amuser un peu) de la *transparence*.

La transparence n'a que peu de rapport avec des idées poétiques (la clef des songes, etc.). Il s'agit d'un *envers* unidimensionnel de l'univers, pas toujours monstrueux, mais à coup sûr grotesque. Pensons à cet Axe du Mal dont l'action expliquerait tous les malheurs du monde, ou encore à ces inénarrables *minority studies* qui nous révèlent les vérités soigneusement occultées : dans une salle de cours, vous apprenez que Shakespeare aurait été une femme (*feminine studies*); dans celle d'à côté (*african studies*) c'était un Arabe, le Cheikh Zubayr!

Tout part pourtant d'une prémisse correcte, dépasser les apparences; mais, pour ce faire, on imagine un « autre côté du miroir » aux contours nets, précis et sans la moindre ambiguïté : le monde serait ainsi un rébus dont il suffirait de trouver la clef. Dans le monde transparent, tout est tellement immédiat, lisible, que l'on n'a même plus besoin de poser de questions,

¹Vu le thème, je me permettrai, pour une fois, d'être un peu explicite, i.e., *ad hominem*, mais pas trop.

i.e., plus besoin de penser. Cette remise en cause de l'idée-même de question mène aux pires idioties : si les réponses sont si faciles d'accès, serait-ce que Dieu s'amuse à nous présenter un monde chiffré pour nous éprouver ? À moins que ne soient les hommes qui s'ingénient à dissimuler pour des raisons inavouables ; un tel comportement justifie alors la « question », le protocole cognitif pratiqué à Guantanamo.

Il faut en tout cas admettre qu'une question n'a pas forcément de réponse, qu'elle n'est même pas forcément destinée à en avoir, puisqu'une grande partie de l'activité scientifique consiste, précisément, à rechercher les *bonnes* questions. Ainsi, la correspondance entre planètes et polyèdres réguliers, dont Kepler était si fier, n'est même pas une hypothèse fautive, c'est un rapprochement absurde, qui ne suscite plus qu'un haussement d'épaules, une question qui ne méritait même pas d'être posée, à ranger sur le même plan que les spéculations liant la longueur du navire à l'âge du capitaine. La transparence achoppe sur le questionnement sur l'intérêt des questions, puis sur les difficultés à trouver les réponses aux supposés bons problèmes. En fait, les réponses sont, le plus souvent, partielles : une demi-réponse accompagnée d'une nouvelle question. Le rapport question/réponse devient ainsi un dialogue sans fin, un processus d'*explicitation* ; c'est dans ce processus, qui ne livre aucune clef totalisante et définitive, que réside l'au-delà des apparences, i.e., la connaissance.

1 Logiques de la transparence

Il y a en logique un fantasme de transparence qui se résume en un mot : *sémantique*. Avant de discuter des limites de la sémantique, il est intéressant de se pencher sur la mauvaise logique, celle de ceux qui n'ont pas les paroles, i.e., la compétence technique : on n'entend plus que la musique, i.e., cette affirmation d'un monde transparent. On devrait aussi citer les articles de logique de *Wikipedia*, habituellement écrits et réécrits par des sectaires de la transparence, mais ce matériau est trop labile.

1.1 L'abduction

« Si $A \Rightarrow B$, c'est que B a eu besoin de A et donc $B \Rightarrow A$ ». Cet amalgame entre causes et effets se prend les pieds dans la carpe ; en logique tout comme dans les autres domaines, e.g., en politique : ainsi, ce Devedjian qui explique la misère des banlieues par... les méfaits des élus « rouges ». En guise de clin d'œil à Giuseppe Longo, je mentionnerai aussi la dimension abductive du fantasme de l'ADN (transparence génétique), voir le « gène

de la pédophilie » cher à cet ami du même Devedjian, Sarkozy. Le modèle officieux de l'abduction est Sherlock Holmes, avec ses déductions tordues, indéniablement amusantes : en effet, analyser la cendre d'un cigare et en déduire que le coupable a 47 ans, qu'il revient des Indes et qu'il boîte du pied gauche, est pour le moins, inattendu. Ce que suppose Sherlock Holmes, c'est effectivement un monde transparent au niveau de la police, des activités criminelles, la clef de ce monde étant la science des cendres, une sorte de nécromancie, positive mais tout aussi absurde². Métaphoriquement, cette pseudo-science nous renvoie à cet au-delà dans lequel toutes les questions auraient reçu leur réponse. Il y a pourtant des questions qui n'ont pas de place dans cet univers policé (et policier), typiquement celles de la forme « ce problème est-il bien posé ? ».

La recherche des causes possibles est, cependant, une activité légitime et ancienne, mais pas un mode de raisonnement : ce serait mettre les apparences aux commandes. Les mathématiques ont créé une catégorie à part pour ces causes possibles, en attente de légitimation et, pour cette raison, dans les limbes du raisonnement : les *conjectures*, hypothèses intéressantes, sur laquelle on attire l'attention. Le processus d'intégration d'une conjecture au corpus est complexe et ne passe en aucune façon par une inversion du sens du raisonnement.

Il est à noter que l'*induction* mathématique se rapproche de l'abduction. Etymologiquement, l'induction est le raisonnement par généralisation qui, pour éviter de devenir abusif, doit transiter par l'émission de conjectures. Ce qu'on appelle induction mathématique est une induction qui se déplace des causes possibles aux méthodes de construction possibles, voir *infra* le développement sur les catégories. L'induction mathématique n'est pas, contrairement à l'abduction, une erreur grotesque de raisonnement ; c'est cependant, voir *infra*, une forme de transparence.

1.2 Logiques non monotones

Toujours dans la science à l'usage des débiles légers, mentionnons les « logiques » non monotones. Elles se rattachent à notre discussion à cause du fantasme de la complétude, i.e., de la réponse à toutes les questions. Ici, le slogan est *ce qui n'est pas prouvable est faux* : on cherche donc à compléter en ajoutant des énoncés improbables. Toute personne avec un minimum de culture logique sait que cette complétion (qui produirait la transparence) est fondamentalement impossible, à cause de l'indécidabilité du problème d'ar-

²Par contre, le même Sherlock Holmes déclare tout ignorer de la rotation de Terre autour du Soleil : ceci ne ferait pas partie de la « science positive ».

rêt, ou encore de l'incomplétude, qui porte bien son nom : elle dénote, non un manque par rapport à une totalité préexistante, mais la nature fondamentalement incomplète du procès de cognition³.

1.3 La logique épistémique

Les bricolages précédents se sont attiré la jalousie cordiale des logiciens épistémiques qui considèrent leur domaine comme la pire logique jamais inventée, revendication qui mérite considération. La logique épistémique est un archipel d'anecdotes abductives assez affligeantes, dont la plus connue est celle des 49 cocus de Bagdad. Dans cette histoire, le Café du Commerce s'ébaubit des 48 itérations du même machin, pourtant éventé dès la première fois et que nous allons transposer au Texas, entre V (Vardi) et W (Bush) : ils savent qu'au moins un des deux est cocu, de plus V, sachant que W l'est, ne peut pas conclure ; mais, comme W ne réagit pas non plus, V en déduit finalement que la situation est symétrique et, subséquemment, trucidé sa moitié supposée inconstante. Cette ânerie repose sur une connaissance parfaite, transparente, immédiate ; cela suppose même que les acteurs (du moins V) sont experts ès « logique » épistémique.

Bien entendu, dès que cette transparence s'estompe, par exemple si l'on tient compte des limitations intellectuelles de W, on voit que V a pu tuer une épouse innocente. Techniquement parlant, la lenteur de W correspond à la complexité du raisonnement, des algorithmes et, *in fine*, nous ramène à l'indécidabilité. Ce qui explique pourquoi la logique épistémique n'est jamais sortie de ce Café du Commerce, rue du Four, où elle prospère : elle contredit le théorème d'incomplétude.

Ici la transparence prend la forme « qui se tait a forcément quelque chose à cacher ». Ces façons de faire parler les muets ont ainsi un arrière-goût de torture ; on pense à la « gégène » de 1957, à la baignoire de la Gestapo devenue *waterboarding* à Guantanamo et aussi aux purges de 1937⁴. La logique épistémique est ainsi la dérisoire contre-partie scientifique du totalitarisme.

1.4 Les mathématiques explicites

Toujours dans la mauvaise logique, mais dans la catégorie supérieure, passons aux « mathématiques explicites » de S. Feferman : il s'agit d'une

³À rapprocher des opérateurs non-bornés de l'analyse fonctionnelle, intrinsèquement et désespérément partiels.

⁴La logique épistémique *ante litteram* de Iejev s'articulait autour de deux types de question : « Pourquoi ne dénonces-tu pas ce traître ? » et, après la dénonciation, « Pourquoi as-tu dénoncé cet innocent, causant ainsi sa mort ? ».

tentative de bureaucratisation de la science, tentative aussi excitante qu'un roman d'imagination de Léonide Brejnev. Mais ce n'est pas la médiocrité de cette approche qui nous intéressera ici, c'est plutôt ce rapprochement extravagant « mathématique + explicite » : il s'agit, en effet, d'un *oxymore*.

Les mathématiques sont-elles, peuvent-elles être explicites ? Comme elles sont un extrême de la pensée, il y aurait donc une pensée explicite. Revenons sur les mots : dans « implicite », il y a « implique » et donc l'implication, logique ou pas ; ce qui est implicite, c'est ce qui est accessible indirectement, i.e., au moyen de la pensée. À l'opposé, « explicite » renvoie à l'explication, l'*explicitation* ; explicite signifie donc accès direct.

Comme nous venons de le dire, la pensée (et la plus grande part de l'activité humaine) est du ressort de l'implicite. Hors de la pensée, on mentionnera cette superbe abstraction que constitue l'argent, devenu, au cours des siècles, papier-monnaie. Une économie explicite, ce serait le troc, W donnant sa femme à V en échange d'une vache. De même, une mathématique explicite, ce serait une vérification du genre $2 + 0 = 2$, dont tout mathématicien sait qu'il ne s'agit pas d'un vrai théorème. Ce qui fait problème n'est pas l'extrême facilité, c'est l'absence de tout contenu implicite ; *a contrario* $x + 0 = x$ a un contenu implicite (on explicite en fournissant une valeur pour la variable, e.g., $x = 2$).

Pour prendre une analogie, il y a la même différence entre une vérification et un théorème qu'entre une table de logarithmes et une calculette : la table nous propose une liste longue, mais figée, de valeurs, alors que la calculette ne possède pas, du moins à l'avance, de réponse à la question. Et d'ailleurs, les informaticiens, qui sont des gens de bon sens, n'ont jamais rêvé d'un « ordinateur explicite », sorte de monstrueux annuaire téléphonique.

2 La sémantique

Ce mot de *novlangue* signifie à l'origine une théorie des signes et donc du sens. La sémantique se révèle, en fait, une extraordinaire machine à décerveler par obscurcissement du sens. C'est qu'elle prétend donner corps à ce monde transparent et, n'y arrivant pas, débouche sur la cavalerie intellectuelle. La sémantique se base sur un fantasme de la réduction aux valeurs de vérité booléenne : en effet, *on peut répondre à tout*. Notons que l'autre dogme majeur de la vie courante « on peut tout comparer » se retrouve en logique floue (ce qui nous ramène aux indignités de la section précédente) et aussi dans les divers aspects du tarskisme, voir *infra*.

2.1 De Frege à Tarski

La distinction sens/dénotation, due à Frege, est en quelque sorte, la version noble du mythe de la transparence : le sens réfère à une dénotation, idéale et définitive ; par exemple, Vénus pour toutes les descriptions poétiques « étoile du berger, du matin, du soir, etc. ». Cette dichotomie s'interdit *a priori* tout lien autre que fantasmatique entre les deux aspects, le sens et son envers, la dénotation : $A \Rightarrow A$ réfère à une dénotation qui nous est, par définition étrangère. Il est donc impossible de comprendre comment le plus petit raisonnement est possible : de même que la flèche de Zénon ne se décide pas à partir, on ne voit ni pourquoi ni comment l'acte cognitif le plus élémentaire peut légitimement s'accomplir.

Encore moins inspiré, Tarski définit la réponse à une question comme étant... la réponse à la question : l'univers transparent ne serait qu'un pléonasme de l'univers immédiat, c'est ce qu'exprime la fameuse lapalissade « $A \wedge B$ est vrai quand A est vrai et B est vrai ». Ainsi, la dénotation de $A \Rightarrow A$ se réduit entre l'implication entre la dénotation de A et la dénotation de A , ce qui ne veut strictement rien dire. L'échec de ce type d'explication induit une fuite en avant : la vraie transparence serait à chercher, au-delà du transparent immédiat, dans un « méta » — ce carburant pour cerveaux givrés — défini comme un pléonasme itéré et même itérable en méta-méta, etc. et finalement, transfiniment ! Cette théologie de la transparence n'est qu'un obscurantisme de plus.

2.2 Les modèles de Kripke

Par rapport aux âneries qui précèdent, les modèles de Kripke font presque figure de percée conceptuelle. Mais, si le premier contact, avec son arrière-goût de mondes parallèles, est assez jubilatoire, cet enthousiasme est vite démenti par l'absolue stérilité de l'objet : comme le *violon tzigane* de Bobby Lapointe, les modèles de Kripke sont réservés à ceux qui n'ont pas le choix.

L'idée sous-jacente à cette approche est que le potentiel (qui est un autre nom pour l'implicite) est la somme, la totalité, des possibilités. *Et voilà pourquoi votre fille est muette !* Du point de vue philosophique, a-t-on jamais entendu quelque chose de plus ridicule ? Par exemple, peut-on dire qu'un billet de 200 € (parangon de l'implicite, du potentiel) est le catalogue de tout ce qu'on pourrait acheter avec ? Même en négligeant la variabilité du prix, il faudrait faire place aux marchandises disparues ou non encore conçues ! Non, un billet de 200 €, c'est une *question* dont la réponse réside dans son protocole de circulation : on peut l'échanger contre une marchandise de prix nominal 200 €, ou encore contre deux billets de 100 €. La marchandise peut,

à son tour, être partiellement implicite, par exemple un lecteur de DVD qui demande des disques pour fonctionner. On découvre au passage que l'explicitation n'est pas forcément totale : elle peut être complètement formelle, ou encore partielle ; autrement dit l'implicite peut renvoyer, totalement ou en partie, à d'autres implicites.

Les modèles de Kripke cristallisent cette vision du potentiel comme somme de possibilités, d'où leur importance paradoxale : bien que fautive, cette idée est, en effet, difficile à réfuter, car de mise en œuvre quasiment universelle. Ainsi, (merci, Brouwer !), une fonction ne sera jamais un graphe, mais une structure implicite, une construction, donnée, par exemple, par un programme : « donne-moi une entrée, un argument n , je te rendrai $F(n)$ ». Mais l'on peut, malgré tout, « définir » F par le graphe associé $\{(n, F(n)); n \in \mathbb{N}\}$, ce qui est, *stricto sensu*, une monstrueuse réduction, mais qui se révèle extraordinairement efficace. D'où le succès de la théorie des ensembles et la ringardisation concomitante des idées de Brouwer, qui deviennent subjectivistes, « intensionnelles » (après « méta », encore un gros mot !).

2.3 Les catégories

L'interprétation catégorique de la logique (en particulier de la logique intuitionniste) fait apparaître les questions comme des objets, les réponses comme des *morphismes*. Typiquement, la disjonction $A \vee B$ pose la question « A ou B ? », alors que les morphismes qui l'habitent⁵ sont des démonstrations de A ou des démonstrations de B , donc des réponses à la question. Les catégories apparaissent finalement comme le monde transparent des morphismes : on combine les réponses par composition et celle-ci est gérée par des diagrammes catégoriques (et donc commutatifs *a priori*, selon une vieille plaisanterie). Ce qui veut dire, qu'une fois entré dans le domaine des réponses, tout est gratuit ; il faudrait autre chose que l'égalité dans ce cas, dire que la composition coûte : pour paraphraser encore le cher Orwell, dans un diagramme commutatif, un côté l'est plus que l'autre. La composition s'effectue au moyen d'un algorithme, qui n'est pas la transparence — qui n'est qu'un fantasme —, mais une construction, une recherche, forcément partielle et fautive, de la transparence.

Fondamentalement, l'approche catégorique pêche par *essentialisme* : elle présuppose la forme (à quoi réfère l'expression *morphisme*) et donc, ne peut pas l'analyser. Cela dit, la transparence proposée par les catégories n'est pas triviale, contrairement à la transparence tarskienne ; l'analyse de ses limitations se révélera *in fine* précieuse.

⁵Pour les puristes : de source l'objet terminal, de but $A \vee B$.

2.4 Problèmes universels

L'induction mathématique, forme civilisée — car techniquement impeccable — de l'abduction, se formule comme solution d'un *problème universel* ; dans une catégorie, on se donne des constructeurs, ce qui *induit* un destructeur qui se borne à inventorier tous les moyens de construction *possibles*. Le cas le plus connu est celui des entiers naturels, dont les constructeurs sont le zéro et le successeur et dont le destructeur est le principe de récurrence. Cette idée est commode, bien plus noble que les modèles de Kripke, mais sommaire. Par exemple, définir les entiers comme solution d'un problème universel les rend *ipso facto*, uniques : l'infini, étymologiquement le « non-terminé », est ainsi réduit à son explicitation, ce qui donne, pour les entiers naturels, cette Muraille de Chine, l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Cette réduction se révèle une aporie, comme le démontre le paradoxe de Gödel (l'incomplétude).

On est ici dans une situation étrange ; on a sacrifié la réflexion sur l'infini à l'établissement d'instruments mathématiques commodes ; tout comme le tempérament égal a sacrifié les résonances naturelles aux exigences des fabricants de piano. Pour la plupart des utilisations, de tels compromis sont raisonnables, mais il est des cas où ils se révèlent désastreux. Ainsi, la théorie de la complexité algorithmique ne peut-elle pas se développer sur de telles bases. En effet, un algorithme est une procédure d'explicitation. Comment peut parler sérieusement d'une telle chose dans un univers où les réponses (toutes les réponses) existent, bien avant que les questions correspondantes n'aient été posées ?

3 De la sémantique à l'oignon cognitif

3.1 Genèse de l'interprétation catégorique

Le progrès de la pensée logique s'identifie à une libération progressive de la gangue essentialiste. L'essentialisme, simplisme morphologique, suppose l'antériorité de l'explicite sur l'implicite. Ce thomisme fonctionne à merveille en logique classique, mais échoue dès que l'on sort des sentiers battus : comme tout tombe du ciel, on en est réduit à l'arbitraire, au sectarisme : témoin les logiques modales, par nature jetables et interchangeableables.

Au départ, la logique s'intéresse donc aux vérités inévitables, aux « lois de la pensée ». Un formalisme logique, tels qu'on le trouve dans des ouvrages laborieux — et, *dixit* Kreisel à propos « du » Mendelsohn, appréciés pour cette raison précise — se présente comme une liste qui tient un peu de la recette de cuisine, mais qui accomplit sa tâche, celle codifier ces vérités universelles.

Schönfinkel, dès les années 1920 et, plus tard, Curry devaient dégager le sens fonctionnel (en fait, algorithmique *ante litteram*) de certains de ces axiomes (et règles). L'isomorphisme de Curry, recentré en 1969 par Howard autour des travaux de Gentzen, établit cette lecture fonctionnelle de la logique (intuitionniste) : une preuve de $A \Rightarrow B$ est une fonction de A dans B .

Les principes de la logique étant d'une généralité effrayante, on a eu beaucoup de mal à trouver les espaces abritant de telles fonctions. La seule solution connue — les ensembles et leurs fonctions — étant disqualifiée pour des questions de taille (*cardinaux* monstrueux), ou encore algorithmiques (pas calculables) : un marteau pour écraser une mouche, de plus à l'opposé de l'approche. On a donc cherché des critères morphologiques pour éviter d'embarquer « trop » de fonctions et donc à construire des *catégories cartésiennes fermées* (CCF) : il s'agit de l'exacte formulation catégorique des règles de la logique intuitionniste.

3.2 Domaines de Scott

Trouver une CCF non triviale (i.e., autre que la catégorie des ensembles, catégorie impropre s'il en est) est une mission délicate. On est en effet amené à se restreindre aux espaces topologiques ; or, quiconque a de vagues bases de topologie sait qu'un espace de fonctions en admet plusieurs (e.g., convergence simple vs. convergence uniforme) et ceci, *pour de bonnes raisons* : certaines opérations logiques demandent la convergence simple, d'autres la convergence uniforme. La découverte par Scott, vers 1969, d'une topologie rendant continues *toutes* les opérations logiques, doit donc être considérée comme une véritable percée, la mère de tous les développements ultérieurs. Pourtant, un fossé profond sépare les *domaines de Scott* de la « vraie » topologie : il suffira de remarquer que sur ces espaces mal foutus, une fonction $f(x,y)$ séparément continue est continue ! La médiocrité de cette topologie⁶ aurait dû inquiéter le milieu ; c'était sans compter avec l'intégrisme, le goût des solutions finales (un synonyme pour « transparence ») : c'est, paraît-il, la topologie usuelle qui est mauvaise. Mais laissons les morts enterrer les morts. . .

La continuité des opérations logiques exprime, sous forme sophistiquée, la même obsession de transparence, qui prend ici la forme d'un contrôle parfait de la complexité logique ; alors que le théorème d'incomplétude, qui suppose des fonctions de complexité arbitraire, ne peut pas s'accommoder de la continuité, sauf à trafiquer la topologie. Allons jusqu'au bout : la non-continuité est la manifestation native, tangible, de l'incomplétude, de la non-

⁶Jamais séparée ; à quoi répondent, à l'autre extrémité du spectre, les topologies extrêmement discontinues, jamais séparables et tout aussi marginales.

transparence⁷.

3.3 Espaces cohérents

La pseudo-topologie de Scott s'inscrit dans la tradition de son maître Tarski, qui consiste à privilégier les fonctions continues croissantes sur des treillis complets (rappelons-nous de son « théorème » cucul de point fixe), à laquelle on peut aussi rattacher cet autre élève du même, Feferman, qui (mal)traite les ordinaux au moyen de fonctions croissantes commutant aux *suprema* : ici, la référence ultime, le monde transparent serait celui des ordinaux, auxquels on prétend réduire la pensée mathématique au moyen de résultats laborieux et stéréotypés. Cette école professe que tout est continu et en fait, puisque leurs topologies ne sont que des relations d'ordre déguisées, que tout est comparable.

Donnons un exemple : on peut faire d'un ensemble de parties $\wp(X)$ un espace topologique à la Scott (les ouverts sont les $\mathcal{O}_a := \{A; a \subset A \subset X\}$, $a \subset X$ fini), correspondant à la topologie de l'ordre (de l'inclusion). Les morphismes sont alors les fonctions Φ telles que :

- (i) Φ envoie $\wp(X)$ dans $\wp(Y)$.
- (ii) Φ est croissante.
- (iii) Φ commute aux sups filtrants.

Il se trouve que, pas très loin des sups filtrants chers aux tarskiens, se trouvent les limites directes (i.e., inductives filtrantes) ; le remplacement quasi-mécanique des sups par des limites directes produit un effet extraordinaire, en raison de l'intervention du compagnon de jeu des limites directes, le produit fibré. En effet, considérons $\wp(X)$ comme une catégorie, avec pour morphismes les inclusions ; il s'agit d'une catégorie *dégénérée*, puisqu'il y a au plus un morphisme de A dans B ; et pourtant ce cas fait déjà mieux que la prétendue topologie de l'ordre. On prend pour morphismes les foncteurs préservant limites directes et produits fibrés, ce qui nous donne (i) et (ii) comme traduction de « foncteur », (iii) comme traduction de la préservation des limites directes, la préservation des produits fibrés donnant lieu à :

- (iv) $\Phi(A \cap B) = \Phi(A) \cap \Phi(B)$

Cette nouvelle propriété, appelée *stabilité* par Berry, qui n'a aucun analogue en topologie, bonne ou mauvaise, est à l'origine des *espaces cohérents* et de

⁷Historiquement, l'incomplétude réfute la propension à tout internaliser, idée monstrueuse comme un bandage herniaire trop serré. C'est ainsi que le paradoxe de Gödel s'exprime à travers des énoncés artificieux du genre « je ne suis pas prouvable », i.e., « je ne veux rien dire du tout » : il faut que cela « sorte » et le résultat n'est pas beau à voir.

la *logique linéaire*. En effet, apparaît naturellement la notion de *linéarité*, i.e., la préservation de toutes les unions, filtrantes ou non, typiquement :

$$(v) \quad \Phi(A \cup B) = \Phi(A) \cup \Phi(B)$$

La préservation des produits fibrés nous donne alors :

$$(vi) \quad \Phi(A \setminus B) = \Phi(A) \setminus \Phi(B)$$

Autrement dit la possibilité d'*algébriser* l'interprétation. En effet, si l'on veut étendre le morphisme Φ aux combinaisons algébriques d'ensembles, i.e., aux fonctions de X dans \mathbb{Z} (ou \mathbb{R}, \mathbb{C}), il importe de remarquer que Φ est déjà linéaire sur les combinaisons déjà présentes, ce qui se ramène à (iv) et (v). Cette linéarisation peut être poussée très loin : *espaces de Banach cohérents* (EBC), *espaces cohérents quantiques* (ECQ). Ces interprétations intériorisent la nécessaire non-continuité de la logique : ainsi dans les EBC, une fonction (non linéaire) de A vers B est-elle une fonction analytique de la boule unité *ouverte* de A dans la boule unité *fermée* de B ; le comportement d'une fonction analytique à sa frontière étant erratique, la composition de telles fonctions est *a priori* impossible. De même, les ECQ ne vivent qu'en dimension finie, à cause de la disparition de la *trace* en dimension infinie.

3.4 Perfection et transparence

La logique linéaire fait apparaître un strate *parfaite*, correspondant aux opérations que l'on effectue totalement, en une fois, voir le *perfectif* des langues slaves. Cette strate est réellement continue (elle fait intervenir des espaces de dimension finie) et est donc compatible avec un peu de transparence. À ce niveau apparaît la *polarisation*, i.e., la dichotomie négatif/positif.

Il s'agit en fait d'une vieille distinction pragmatique⁸, réactivée par la logique linéaire à travers les travaux d'Andreoli : c'est la seconde génération de la programmation logique, i.e., du paradigme informatique de la *recherche de preuves*. Un programme se présente alors comme un dialogue combinant des questions (négatives) et des réponses (positives). Ce qui induit une dichotomie des primitives logiques ; l'implication, la quantification universelle sont négatives : par exemple, $\forall n(A[n] \Rightarrow B[n])$ veut dire « donne-moi $n = N$ ainsi que $a[N]$ et je te rendrai $B[N]$ », à condition qu'on puisse « rendre » $B[N]$, i.e., que B soit positif. Ce qui est le cas si B est une disjonction intuitionniste $C \vee D$: rendre $B[N]$, c'est rendre $C[N]$ (gauche) ou rendre $D[N]$ (droite), disons $D[N]$. Ceci fait, en fonction de la polarité, positive ou négative, de $D[N]$, il faut soit rendre davantage, soit se donner des informations fraîches, i.e., reprendre le questionnement.

⁸À l'œuvre dans le *fragment négatif* ($\Rightarrow, \wedge, \forall$) de la logique intuitionniste.

Il est à remarquer que la pure manipulation formelle qui mène de $\forall n(A[n] \Rightarrow (C[n] \vee D[n]))$ à $C[N] \vee D[N]$ n'a pas de valeur explicite. D'ailleurs j'ai pu l'effectuer en ignorant tout de A, C, D, N , etc. Ce qui veut dire qu'il ne s'agit que de l'amorce d'un processus, d'un algorithme, d'explicitation. Cette procédure admet de nombreuses variantes, toutes dérivées de l'*élimination des coupures*, le célèbre *Hauptsatz* de Gentzen. Ce qu'on résumera en rappelant qu'il est faux qu'une démonstration de $C[N] \vee D[N]$ soit une démonstration de $C[N]$ ou une démonstration de $D[N]$ (sinon, quel masochisme : énoncer $C \vee D$ quand on a obtenu D !). Ce sont les démonstrations *sans coupures* qui sont de cette forme-là ; comme il y en a très peu dans la nature (elles sont, sinon explicites, du moins le plus explicite possible, donc illisibles⁹), on est amené à se contenter d'une élimination partielle : on détermine le *bit* gauche/droite la disjonction, puis on continue.

On voit donc que l'explicitation se présente sous forme interactive et dynamique, de façon intrinsèquement incomplète. Elle prend la forme d'une alternance de polarités (négatif = question, positif = réponse). Cette idée est assez bien résumée par la métaphore du *jeu*, une excellente idée du même Gentzen, idée plus tard reprise — et massacrée — par Lorenzen, mais heureusement remise à l'honneur dans les années 1990. Ceci dit, le jeu n'est qu'une métaphore, qui souffre de son manque d'épaisseur mathématique et aussi de la supposée instantanéité de la réponse : il y a un temps de latence, qui correspond à la complexité algorithmique du processus de *normalisation*, i.e., de l'élimination des coupures et dont la métaphore est la lenteur de W.

3.5 La ludique

Je préfère l'image d'un « oignon cognitif », que l'on dépouille de ses peaux successives¹⁰, ce qui est réalisé, du moins partiellement, par la *ludique*. L'objet de base, le *dessein* (= démonstration délogicalisée) combine des *actions* à polarités alternées : *négatives* (questions) et *positives* (réponses).

Tout ce qui ressemble à de la logique dans ses aspects essentialistes, typiquement la *règle du jeu*, qui suppose un arbitre et donc de nouveaux lieux de transparence, est évacué de la ludique. Ainsi, les *comportements* sont des jeux dont la règle s'établit par *consensus* entre desseins et contre-desseins : on peut faire ce que l'on veut, pourvu d'arriver à un résultat (parce qu'un des partenaires abandonne).

⁹Si un lemme est utilisé trois fois dans une démonstration, sa version sans coupures demandera trois démonstrations indépendantes.

¹⁰Tout comme dans le *Retour du divin* d'Audiberti : l'héroïne Martine dépouille son amant Ambroise de son manteau, sous lequel il y a un second manteau, etc. ; du bel Ambroise, Martine n'étreint finalement que les manteaux imbriqués.

La ludique achoppe sur un point : son espace de questions/réponses (les *actions*) est pré-constitué. Ce qui permet de décrire l'oignon à travers toutes les façons de le peler. Cet ensemble de processus est une ultime possibilité de transparence, de sémantique, dont il va falloir trouver le *point aveugle*.

4 La négation

4.1 Espaces cohérents

La négation *linéaire*, c'est l'échange question/réponse. À l'origine, il s'agit d'une opération naturelle des *espaces cohérents* que je vais de justifier en termes d'oignon logique. Considérons des processus cognitifs (suites de questions/réponses) complets d'un certain type ; on interprétera une démonstration comme l'ensemble de toutes les suites auxquelles elle peut donner lieu. Si deux telles suites diffèrent, elles bifurquent *négativement* (i.e., sur des *questions* différentes), ce qu'on notera $x \frown x'$; ce qui donne :

DÉFINITION 1 (ESPACES COHÉRENTS)

On appelle espace cohérent un couple $X = (|X|, \circ_X)$ formé d'un ensemble (la trame $|X|$) et d'une relation binaire réflexive et symétrique sur $|X|$, la cohérence. On note \frown_X la cohérence stricte (entre éléments distincts). On appelle clique de X , notation $a \sqsubset X$, un sous-ensemble de $|X|$ formé d'éléments deux à deux cohérents.

Je me contenterai de la négation linéaire :

DÉFINITION 2 (NÉGATION)

Si $X = (|X|, \circ_X)$ est un espace cohérent, sa négation linéaire est l'espace $\sim X = (|X|, \circ_{\sim X})$: même trame, mais cohérence opposée, i.e., $x \frown_{\sim X} y$ ssi $x \not\circ_X y$.

La négation linéaire correspond à l'échange question/réponse puisque, si $x \frown x'$ veut dire que x, x' bifurquent négativement, $x \smile x'$ (i.e., $x \not\circ x'$) veut dire que x, x' bifurquent positivement (i.e., sur les réponses).

La propriété suivante nous vient de la *stabilité*, voir *supra* :

PROPOSITION 1

Une clique et une anti-clique (i.e., clique dans la négation) ont au plus un point en commun, i.e., $\#(a \cap b) \leq 1$.

Intuitivement, deux suites différentes doivent bifurquer négativement ou positivement. On peut d'ailleurs faire l'économie de la relation de cohérence en introduisant la *polarité* :

DÉFINITION 3 (POLARITÉ)

$a, b \subset |X|$ sont polaires, notation $a \perp b$ quand $\sharp(a \cap b) \leq 1$.

et redéfinir les espaces cohérents de façon *existentialiste* :

DÉFINITION 4 (ESPACES COHÉRENTS)

Un espace cohérent de trame $|X|$ est un ensemble de parties de $|X|$ égal à son bipolaire.

Cette définition est équivalente à la précédente ; ainsi, $x \circ y$ ssi $\{x, y\} \sqsubset X$.

L'*implication linéaire*, connecteur fondamental de la logique linéaire, correspond à la formation, à partir de $X = (|X|, \circ_X)$ et $Y = (|Y|, \circ_Y)$ d'un nouvel espace cohérent, $X \multimap Y = (|X \multimap Y|, \circ_{X \multimap Y})$:

$$|X \multimap Y| \quad := \quad |X| \times |Y| \quad (1)$$

$$(x, x') \frown_{X \multimap Y} (y, y') \quad :\Leftrightarrow \quad x \circ_X x' \Rightarrow y \frown_Y y' \quad (2)$$

Cette définition se justifie par le théorème (facile) suivant :

THÉORÈME 1 (IMPLICATION LINÉAIRE)

Les cliques de $X \multimap Y$ sont en bijection avec les fonctions linéaires de X dans Y , i.e., les fonctions Φ des cliques de X dans les cliques de Y préservant les unions quelconques et stables. La correspondance est donnée au moyen de $(a \sqsubset X, b \sqsubset \sim Y)$:

$$\sharp([\Phi]a \cap b) = \sharp(\Phi \cap (a \times b)) \quad (3)$$

Ce qui est le point de départ de la logique linéaire. Remarquons que l'application identité de X dans X est représentée par la clique $\Delta_X := (x, x); x \in |X|$ de $X \multimap X$; en effet :

$$\sharp(\Delta_X \cap (a \times b)) = \sharp(a \cap b) \quad (4)$$

et donc, $[\Delta_X]a = a$.

4.2 Espaces cohérents quantiques

La notion de *point* d'un espace cohérent suppose une préconstitution de l'espace des questions/réponses, i.e., la survivance d'une architecture sujet/objet, même fortement amendée. Les développements ultérieurs se sont donc attachés à dissoudre la notion de point, qui n'existerait plus que par rapport au choix d'un sujet ; cette *subjectivité* assumée est le seul rempart contre le sujetivisme.

La première étape (ECP, espaces cohérents *probabilistes*) ne remet pas en cause les points, mais leur attribue une *masse* réelle $f(x) \in [0, 1]$. Dans ce qui suit, on supposera que les trames $|X|, |Y|, \dots$ sont finies :

- (i) Une *clique probabiliste* (cp) de trame $|X|$ est une fonction $f : |X| \mapsto [0, 1]$.
- (ii) Si f, g sont deux cp de $|X|$, on pose $\ll f | g \gg := \sum_{x \in |X|} f(x)g(x)$; f, g sont *polaires*, notation $f \perp g$, quand $\ll f | g \gg \leq 1$.
- (iii) Un ECP de trame $|X|$ est un ensemble de cp égal à son bipolaire.

On peut développer sans surprise l'analogie des espaces cohérents; (3) devient alors :

$$\ll \Phi(a) | b \gg = \ll \Phi | a \times b \gg \quad (5)$$

et, si Δ_X est l'indicatrice de la diagonale, (4) devient :

$$\ll \Delta_X | a \times b \gg = \ll a | b \gg \quad (6)$$

On peut voir, en considérant l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^{|X|}$, une cp f comme une matrice diagonale M_f à coefficients dans $[0, 1]$; et $\ll f | g \gg$ devient la trace $\text{tr}(M_f M_g)$. On obtient les espaces cohérents quantiques (ECQ) en retirant l'échelle, i.e., la base de l'espace vectoriel. Si E est un espace de Hilbert complexe de dimension finie, on peut reprendre la rengaine :

- (i) Une *clique quantique* (cq) de trame E est un *hermitien* opérant sur E .
- (ii) Si u, v sont deux cq de E , on pose $\ll u | v \gg := \text{tr}(uv)$; u, v sont *polaires*, notation $u \perp v$, quand $0 \leq \ll u | v \gg \leq 1$.
- (iii) Un ECQ de trame $|X|$ est un ensemble de cq égal à son bipolaire.

Dans ce cadre, (3) devient, sans surprise :

$$\text{tr}([\Phi]u)v = \text{tr}(\Phi(u \times v)) \quad (7)$$

alors que (4) se traduit en :

$$\text{tr}(\sigma_E(u \otimes v)) = \text{tr}(uv) \quad (8)$$

où σ_E est l'échange, le « flip », de $E \otimes E$:

$$\sigma_E(x \otimes y) := y \otimes x \quad (9)$$

Par rapport à une base \mathcal{B} , on peut aussi définir la « diagonale » $\Delta_{\mathcal{B}}$ par :

$$\Delta_{\mathcal{B}}(\mathbf{b} \otimes \mathbf{b}') := \delta_{\mathbf{b}\mathbf{b}'} \quad (\mathbf{b}, \mathbf{b}' \in \mathcal{B}) \quad (10)$$

cependant l'équation :

$$\text{tr}(\Delta_{\mathcal{B}}(u \otimes v)) = \text{tr}(uv) \quad (11)$$

ne fonctionne plus que quand u, v sont diagonaux par rapport à \mathcal{B} . On peut voir (11) comme une version subjective de (8) ; en effet, la constitution du sujet peut s'assimiler au choix d'une base. À noter que l'approche catégorique usuelle (problèmes universels, etc.) ne produit que l'analogue de (11) ; (8) se situe donc dans le point aveugle des catégories. Ainsi la « η -expansion », qui est une formulation du problème universel, ne possède aucune réfutation catégorique *convaincante* ; les ECQ font naturellement la différence entre l'identité naturelle (8) et l'identité reconstituée, abductive (11). Concrètement, (8) recopie son entrée sans se poser de questions, alors que (11) est un protocole de gendarmerie : « Voyons voir, mon gaillard ; soit tu viens de \mathbf{b}_1 et, subséquentement, je te rends \mathbf{b}_1 ; sinon tu viens de $\mathbf{b}_2 \dots$ ». On retrouve cette distinction en *calcul quantique* avec la difficulté à dupliquer une donnée sans la mesurer, i.e., à passer de (8) à (11). La mesure, en effet, est fondamentalement la réduction à la forme diagonale par rapport à une base *distinguée* ; distinguée par quoi ? Pas par un « quoi », par un « qui » : le sujet.

4.3 Géométrie de l'interaction

Les ECQ, et c'est leur drame, sont confinés à la dimension finie ; en effet, la trace n'existe plus, du moins de façon naïve, en dimension infinie¹¹. Pour pouvoir continuer, il faut effectuer une réduction logarithmique des concepts : le produit tensoriel devient une somme directe, la trace un déterminant. Derrière tout cela, une identité facile de dimension finie, qui fait intervenir l'*algèbre extérieure* :

$$\mathrm{tr}(\Lambda u) = \det(1 + u) \quad (12)$$

qu'il est important d'expliquer, car elle est au centre de la discussion :

- Le déterminant d'une matrice (m_{ij}) peut s'écrire comme une somme alternée $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} (-1)^\sigma m_{1\sigma(1)} \dots m_{n\sigma(n)}$. Il s'agit de *tous* les parcours totaux de $\{1, \dots, n\}$ pondérés par les coefficients de transition m_{ij} et des *signatures* $(-1)^\sigma$. Le nombre $\det(1 + u)$ quantifie donc les parcours *partiels*.
- L'algèbre extérieure est, précisément, l'espace de ces parcours partiels ; ce qui explique (12).

Il se trouve que Λ , l'*algèbre de Fock* diverge en dimension infinie : en effet, il s'agit d'une algèbre de type \mathbf{I}_∞ , sans trace. Par contre, le déterminant peut toujours être défini à partir de la trace, voir (13) *infra*.

On met ici le doigt sur l'erreur commise par les tenants de la transparence, depuis les simplistes modèles de Kripke jusqu'aux interprétations

¹¹Et même les algèbres de type \mathbf{II}_1 , qui possèdent pourtant une trace, vont attribuer une trace nulle à $\sigma_E(u \otimes v)$: sans fonction identité, la théorie est mal partie !

catégoriques les plus élaborées : on a remplacé le dialogue entre questions et réponses par l'espace de leurs interactions ; si l'on ne peut guère s'y opposer en dimension finie, cette réduction du potentiel à la *liste des possibles* diverge en dimension infinie : ce n'est plus une hérésie, c'est une impossibilité.

Déclinons une dernière fois la rengaine des espaces cohérents, cette fois-ci à la sauce logarithmique : c'est la *géométrie de l'interaction* (GdI). On se place dans une algèbre de von Neumann *finie*, typiquement le *facteur hyperfini* \mathcal{R}_0 . Une telle algèbre possède une trace, ce qui permet de définir le *déterminant* $\det(1 - u)$ quand le *rayon spectral* $\varrho(u)$ est < 1 , au moyen de :

$$\det(1 - u) := e^{\text{tr}(u+u^2/2+u^3/3+\dots)} \quad (13)$$

Ce qui joue le rôle de la trame, c'est le *support*, un projecteur $\pi \in \mathcal{R}_0$.

- (i) L'analogue d'une clique, un *dessein* de support π , est un couple (α, A) , $\alpha \in \mathbb{C}, A \in \mathcal{R}_0$ avec $\pi A \pi = A$.
- (ii) $\ll \alpha, A \mid \beta, B \gg$ n'est défini que quand $\varrho(uv) < 1$, auquel cas $\ll \alpha, A \mid \beta, B \gg := \alpha\beta \det(1 - AB)$; (α, A) et (β, B) sont *polaires*, notation $(\alpha, A) \perp (\beta, B)$ quand $\ll \alpha, A \mid \beta, B \gg \neq 1$.
- (iii) Un *comportement* de support π est un ensemble de desseins de support π égal à son bipolaire.

Dans ce cadre, (3) devient, quand (α, A) et (β, B) ont des supports π, π' orthogonaux (i.e., quand $\pi\pi' = 0$) :

$$\ll [f, \Phi](\alpha, A) \mid \beta, B \gg = \ll f, \Phi \mid \alpha\beta, A + B \gg \quad (14)$$

avec, comme cas particulier :

$$\ll 1, \tau \mid \alpha\beta, A + B \gg = \ll \alpha, \theta A \theta^* \mid \beta, B \gg \quad (15)$$

où τ est le « flip » additif induit par une isométrie partielle θ de π sur π' :

$$\tau(x + y) := \theta^*(y) + \theta(x) \quad (16)$$

Il y a une véritable surprise car, en effet, l'application $[f, \Phi](\alpha, A)$ est définie par :

$$[f, \Phi](\alpha, A) := (\phi\alpha \det(1 - \Phi A), \pi'\Phi(1 - A\Phi)^{-1}\pi') \quad (17)$$

La partie « opérateur » correspond à la solution d'une *équation de rétroaction*, alors que la partie scalaire fait apparaître le coefficient *introspectif* $\det(1 - \Phi A)$ de (14) ; ce coefficient n'apparaît pas dans (15), tout simplement parce que $\det(1 - \tau A) = 1$. En termes de parcours, on peut voir ce coefficient comme un *échauffement* quantifiant les parcours partiels qui évitent π' ; en

termes plus traditionnels, on peut le voir comme une quantification de la correction logique : le respect des règles logiques garantit la *nilpotence* de ΦA et donc que $\det(1 - \Phi A) = 1$. Cette quantification de la correction logique est, évidemment, une « valeur de vérité ».

4.4 La vérité en devenir

Un dessein est formé d'une valeur de vérité α et d'un opérateur A . En l'absence de la seconde composante, la polarité se ramène à :

$$\ll \alpha \mid \beta \gg = \alpha\beta \quad (18)$$

La polarité $\alpha\beta \neq 1$ (1 correspondant à « vrai ») pourrait servir de base, ce qu'à Dieu ne plaise, à une autre « logique » floue, dont la vraie place est la même que les précédentes, i.e., la poubelle. Ce qui est en cause, ce n'est pas l'idée de dépasser les valeurs de vérité booléennes $\{0, 1\}$, c'est celle de se confiner à ce domaine statique, mort, de la vérité.

Un dessein, c'est l'ébauche α d'une valeur de vérité et un processus A pour la développer, ce qui suppose une interaction avec d'autres processus. Le développement complet demande un *contre-dessein* (β, B) et conduit à $\alpha\beta \det(1 - AB)$; il s'agit alors d'une explicitation *totale*, relative à (β, B) . Mais la plupart des explicitations sont partielles, ainsi (17) qui explicite partiellement (ϕ, Φ) de support $\pi + \pi'$ au moyen de (α, A) dont le support π laisse des choses dans le vague (ce qui se passera en π'). L'équation (14) relie l'explicitation partielle à son devenir, l'explicitation complète et définitive qui n'a jamais réellement lieu en logique, pour des questions de cohérence.

Tout cela pour dire que l'idée de valeur de vérité peut retrouver en partie la place qu'elle usurpait dans les fondements à l'ancienne. Simplement, elle se décompose en une partie déjà explicitée (α) et une partie en devenir (A) qui ne peut *en aucune façon* se ramener à une collection de futurs possibles.

Il ne reste plus qu'à relire la ludique, i.e., l'oignon cognitif, à la lumière de la GdI pour se débarrasser, une fois pour toutes j'espère, de ces improbables *rayons X de la connaissance*.

NON SI NON LA

Références

- [1] J.-Y. Girard. **Le point aveugle, tome 1 : vers la perfection**. Visions des Sciences. Hermann, Paris, 2006. 296 pp.
- [2] J.-Y. Girard. **Le point aveugle, tome 2 : vers l'imperfection**. Visions des Sciences. Hermann, Paris, 2007. 299 pp.