La logique aujourd'hui...

Jean-Yves Girard
Institut de Mathématiques de Luminy, UPR 9016 – **CNRS**
163, Avenue de Luminy, Case 930, F-13288 Marseille Cedex 09

girard@iml.univ-mrs.fr

21 mars 2007

Résumé

Exposé donné le 20 Décembre 2004, en clôture du cours donné à l'automne 2004 dans le cadre de l'Université Franco-Italienne, et publié en deux volumes [2, 3]. Titre complet :

La recherche en logique aujourd'hui, et ses relations avec la philosophie, les mathématiques, l'informatique et la physique.

Ouverture

« La logique s'écrit avec un alphabet $a, b, c, \ldots$: on forme des expressions — c'est la syntaxe — ; puis, on les interprète : c'est la sémantique. »

Après tout, cette description de la logique est peut-être correcte ; mais dans ce cas, c'est une activité qui a perdu tout intérêt. On sait, depuis 1931, que dans cette opposition :

Objet/Sujet

quelque chose se passe mal, c'est l'*incomplétude*. D'où l'introduction de ce troisième larron, le *méta*, pour constituer la Sainte Trinité :

Sémantique/Syntaxe/Méta

Le Fils (ou Verbe) n'est pas consubstantiel au Père : l'incomplétude est une sorte de Nestorianisme logique[1]

[1]En général, les références théologiques ne sont pas du tout déplacées dans les questions de fondements. On y reviendra à propos du thomisme.

Dans l'(ancien régime d')explication logique, on a ainsi introduit des méta-théories, puis des méta-méta-théories, etc. Les logiciens s'exposent ainsi à cette célèbre plaisanterie « Turtles all the way down »; mais, sensibles à la critique, ils ont ajouté une tortue supplémentaire, tout en bas, pour soutenir les autres, puis encore une autre pour sustenter celle-là, etc. Une mauvaise idée devient-elle bonne parce qu'on l'itère transfiniment ? Elle devient simplement une mauvaise idée transfinie.

Existence vs. essence

L'opposition essentialisme/existentialisme, c'est d'abord des noms :

Frege, Kreisel, Tarski / Brouwer, Curry, Gödel, Hilbert

Les logiciens plus contemporains sont tous plus ou moins essentialistes, en particulier Martin-Löf. On peut considérer que Prawitz, du temps de son activité (avant 1970) était plutôt existentialiste ; je me rattacherais moi-même à cette tendance minoritaire.

Quelques points de repère :

Tarski : $A \wedge B$ est vrai quand A est vrai *et* B est vrai, tout le reste à l'avenant : merci, Monsieur de La Palice ! C'est l'arrogance essentialiste poussée à l'extrême !

Kreisel : Une démonstration de $A \Rightarrow B$ est une fonction des démonstrations de A dans les démonstrations de B, plus une démonstration formelle de ceci dans un système *donné à l'avance*. Pour des énoncés de structure simple, ce machin se réduit au système « donné à l'avance », tout comme le monolithe de « 2001 » (*infra*) tombait du ciel.

Gödel : Ses positions, si on sait bien lire, sont beaucoup plus intéressantes que celles des susnommés, voir en particulier son dialogue avec Bernays — logicien assez obtus — dans les années 1940. Cela dit, les bonnes intentions de Gödel (on pourrait dire la même chose de Curry) sont « plombées » par l'absence d'horizon technique : comment discuter de tout ça sur la base du langage $a, b, c, \ldots$, de la liste de toutes les expressions ; cela mène, au mieux, au paradoxe de Richard ou à celui de Gödel qui n'en est, au fond, qu'une formalisation.

Pour l'essentialisme, la logique ne s'explique pas, on la *présuppose* : d'où l'importance du « méta », synonyme d'essence. Tout comme dans *2001, l'Odyssée de l'espace* ce *Deus ex machina* qui serait responsable de l'intelligence. Ceci a beau être dérisoire, ce n'est pas anecdotique pour autant : la notion d'infini est — tout comme celles de vérité ou de nécessité —, de nature essentialiste.

D'ailleurs, tous les essentialistes ne sont pas aussi infantiles qu'Arthur C. Clarke : leur saint patron est Thomas d'Aquin, qui n'était sûrement pas un imbécile.

L'essentialisme imprègne, à travers le thomisme — version officielle du catholicisme —, notre culture occidentale ; cela s'étend jusqu'à l'opposition existence/essence, puiqu'il nous force à choisir entre les deux termes, un peu comme ces démagogues autoritaires qui réduisent le débat politique à l'opposition entre l'ordre (i.e., eux-mêmes) et l'anarchie. L'existentialisme, du fait de ses remises en cause systématiques est, en effet, difficilement tenable. Ma position est, à l'opposé de cette exclusion, celle d'un *dialogue* entre existence et essence : la dialectique de l'œuf qui fait la poule et de la poule qui le lui rend bien ; ce qui ne privilégie aucun des deux termes.

Par exemple, la logique moderne, née sous des auspices violemment essentialistes (Frege), commence donc avec des règles « sorties du chapeau » ; puis l'étude formaliste (donc non essentialiste) de ces règles fait apparaître, sous l'essence, l'existence comme *géométrie* de ces règles. Réciproquement, à partir d'une géométrie sauvage, « non typée », les disciplines de *typage* réintroduisent l'essence comme une sorte de *surmoi*.

Le mépris

Quand on regarde la logique mathématique d'un peu loin, on est frappé pat son aspect *provincial* : il s'agit d'une sous-culture qui entretient un sentiment de supériorité. On pense à ce notaire de Frosinone qui ne donnera pas sa fille à un artiste bohème : on y prône, en effet, d'étranges valeurs.

Par exemple, alors que les mathématiciens se sont penchés très sérieusement sur la continuité, on s'est permis de bricoler une topologie *ad hoc*, mal foutue : les domaines de Scott. Cette topologie « alternative » ressemble aux devises non convertibles des ci-devant « démocraties populaires » : elles n'ont cours qu'à l'intérieur des frontières, ici, celles de la logique. Les logiciens prétendent que les domaines de Scott sont supérieurs à la « vraie » topologie. De quel droit ?

Frege, créateur de la logique moderne et essentialiste forcené, s'est permis de se moquer des intuitions géniales de Riemann qui anticipait sur la relativité générale (Einstein, 1917), dès 1855. « Foutaises » disait cet admirateur de Hitler. De quel droit ?

Pensons aussi à la discussion actuel/potentiel. Les logiciens ont inventé un machin pendable, les *modèles de Kripke* : on y aligne tous les possibles sur un mur, comme des trophées de chasse. Ce qui fait penser à ce « truc » de la littérature enfantine : « choisis ta fin ». Il s'agit, d'ailleurs, d'une vision infantile de la potentialité : s'il y a vraiment une liste de tous les mondes possibles, il n'y a plus vraiment de potentiel ! Il suffit de regarder la mécanique quantique en dimension 2 (le *spin*, booléen potentiel) pour voir l'abîme qui sépare la logique de la science vivante du XX^{e} siècle. Alors que les physiciens développaient des trésors d'inventivité en mécanique quantique, on s'est permis d'« expliquer » le quantique au moyen d'une « logique quantique ». De quel droit ?

La réponse se trouve dans un *mépris* essentialiste basé sur un impitoyable enchaînement de sophismes : on sait, depuis Zénon, réfuter la possibilité du mouvement ; ici, il n'est question que d'immobilisme de la pensée :

Quoi qu'on fasse, tout s'écrit avec $a, b, c, \ldots$ *, donc en logique.*

Autrement dit, on est les rois ! Rois des quoi, au juste ?

Revenons au quantique. En 1932, le grand von Neumann commit une erreur de jeunesse — la logique quantique. Il l'abandonna le soir-même, pour arriver rapidement aux algèbres — dites, de nos jours — de von Neumann, structures fondamentales. Que firent alors les logiciens ? Cette idée qui ne marchait pas —celle des projecteurs d'un espace de Hilbert comme valeurs de vérité—, ils l'*axiomatisèrent* (treillis orthomodulaires) ; ce faisant, ils la privaient de son médiocre contenu, au point que, de nos jours, le logicien quantique « de base » ne connaît même plus les espaces de Hilbert. La logique quantique se mit alors a végéter comme une théorie des treillis, si possible mal foutus. Finalement, dans « logique quantique », on ne trouve ni logique ni quantique, tout comme dans « démocratie populaire » il n'y avait ni l'un ni l'autre. On pense à Xerxes qui, au dire d'Hérodote, aurait fait fouetter la mer pour mauvaise conduite. La logique quantique est, de même, une punition infligée à la Nature, coupable d'« illogisme ».

La géométrie non commutative

Ce mépris logique fait que la contribution la plus remarquable aux fondements dans les années récentes ne vient pas de la logique, mais de la *géométrie non commutative* d'Alain Connes [1].

Il s'agit, au fond, d'une prise au sérieux du quantique. Un point, un atome ensembliste, c'est un vecteur propre, c'est une fréquence de résonance. Ce que nous percevons comme point est ce qui *résonne* pour nous. Il est possible — et vérifié — que deux entités puissent avoir des vecteurs propres incompatibles : les points de l'un ne reconnaissant pas les points de l'autre, tout comme dans le célèbre *principe d'incertitude*, la position et l'impulsion.

Le quantique, la géométrie non commutative posent la question de la place du *subjectif*, question éludée par la tradition logique, qui préfère vivre dans un fantasme d'objectivité à la Frege (le sens réfère à une dénotation objective). En fait l'objectivisme et le subjectivisme se rejoignent paradoxalement : ainsi, la soi-disant objectivité de l'astronomie ptolémaïque, basée sur une Terre plate à l'infini débouche sur les cycles et épicycles (déjà le méta !), i.e. sur rien du tout. Pour éviter le subjectivisme, il faut donc accepter la dimension subjective de la « réalité ».

En mécanique quantique, l'objectif s'exprime par une *fonction d'onde*, alors que le subjectif prend facilement la forme (ensembliste) d'une particule. C'est, en fait, que le sujet et lié à la *commutation* des opérateurs ; cette condition permet une « diagonalisation » commune : la « base » sur laquelle cette diagonalisation a lieu joue le rôle de *point de vue*. Rigoureusement, un point de vue est une algèbre *commutative*, et la diagonalisation s'exprime par le résultat bien connu :

Une algèbre d'opérateurs commutative est un espace de fonctions.

(fonctions continues pour une algèbre stellaire, mesurables pour une algèbre de von Neumann). On peut donc voir, métaphoriquement, une algèbre d'opérateurs non commutative comme l'espace des fonctions continues, mesurables, etc. sur un « non-ensemble ». C'est en cela que la géométrie non commutative dépasse l'essentialisme ensembliste, en faisant apparaître les ensembles comme le résultat d'un *point de vue*, i.e., du choix d'une sous-algèbre commutative au sein d'une totalité non commutative.

Avec le temps, j'ai un peu apprivoisé le « non commutatif » : c'est un monde où il n'y a plus d'objets réifiés, il n'y a que des illusions, des fantômes qui passent. On peut en tirer des « photos » — se restreindre à une sous-algèbre commutative — et cela ressemble alors au monde habituel. Mais ces photos restent subjectives, partielles et fondamentalement incompatibles : pas question de les monter en *diaporama*, i.e., d'en faire un modèle de Kripke.

En dimension 2, la version prétendument objective des booléens, ce sont les deux vecteurs de la base dite canonique. La version subjective c'est la même chose... quand on a donné un coup dans le gyroscope et que l'on a perdu la base : ce qu'il nous reste, c'est un projecteur de rang 1, i.e., un hermitien de trace 1 et de déterminant 0. Ce qui s'écrit matriciellement (avec un usage implicite des matrices de Pauli) $\begin{bmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{bmatrix}$, avec $t = 1/2$ et $t^2 = x^2 + y^2 + z^2$; cela s'appelle aussi un *spin*. Le processus de mesure, ou l'interaction logique dans les *espaces cohérents quantiques*, fait apparaître des combinaisons convexes de tels booléens. Ce qui ne change pas la trace, mais augmente le déterminant, qui peut aller jusqu'à la valeur $1/4$ (pour

$t = 1/2, x = y = z = 0$). Si on place les paramètres t, x, y, z dans l'espace-temps, on voit que les vrais booléens sont « à la vitesse de la lumière », et que le processus de mesure provoque un ralentissement progressif mesuré par l'augmentation du déterminant, de la valeur « pure » 0 jusqu'à la valeur d'arrêt $1/4$.

Notons, au passage, l'affinité profonde entre l'axiome d'*extensionalité* (qui réduit un ensemble à ses éléments) et le processus de mesure (qui réduit un opérateur à une forme diagonale).

Finalement, le quantique postule, non pas l'*opposition* entre objet et sujet, mais leur *intrication*. Ce qui montre au passage le contresens de la logique quantique, qui se place dans une dichotomie traditionnelle objet/sujet, comme si le logicien pouvait assumer une place hors du monde physique.

Les trois sous-sols

On a déjà mentionné les tortues-gigognes des « métas » emboîtés : une architecture inversée qui fait penser aux escroqueries pyramidales, ces systèmes où l'on paye pour entrer avec l'espoir de se rembourser grassement sur les prochains gogos.

À cette fuite en avant, je préfère un échafaudage plus modeste, non itératif, puisque basé sur trois niveaux, que vais introsuire par la métaphore du *courrier* :

-1 : le destinataire de la lettre « il y a un message pour M. XXX ».

-2 : le contenu de la lettre « Cher Monsieur XXX, Nous vous écrivons pour vous annoncer... »

-3 : le processus d'écriture, d'acheminement de la lettre (prix du timbre, bureau de tri, facteur...)

On voit que le niveau **-3** est plus primitif que le niveau **-2** (le processus d'écriture enferme le contenu) et que, de même, **-2** contient **-1**, puisque le contenu mentionne le destinataire. Par contre, sauf à limiter le contenu de façon rédhibitoire, **-2** ne se ramène pas à **-1** ; de même, le contenu d'une lettre ne reflète que très peu son histoire, et donc, **-3** ne se ramène pas à **-2**.

En termes logiques, le niveau **-1** est celui de la vérité, de la *prouvabilité*. Le niveau **-2** est celui des contenus ; en logique, c'est le niveau des *preuves*, des démonstrations comme fonctions, ou comme *morphismes*. Quant au niveau **-3**, il s'adresse à l'opérationalité, à la *procéduralité* ; c'est la *géométrie de l'interaction*, voir *infra*.

Jusqu'en 1970, la logique vivait presque exclusivement au niveau **-1** : vrai, prouvable, décidable, complet, cohérent, etc. Un logicien aussi intéressant que

Kreisel n'a d'ailleurs jamais réussi à dépasser ce niveau : quand le niveau **-2** s'est affirmé, il a freiné des quatre fers.

Autour de 1970, l'*isomorphisme de Curry-Howard*, mais aussi les travaux de Prawitz sur la *déduction naturelle*, De Bruijn et le système `Automath`, Scott et ses *domaines*[2] et mon tout premier travail en logique, le *système* **F**, inaugurent le niveau **-2**. On ne se contente plus de dire que $A \vee B$ est vrai — ce qui mène en toute rigueur à la logique *classique* —, on dit *comment* il est vrai : est-il vrai « par A » ou « par B » ? Pour reprendre la métaphore du courrier, la lettre est adressée à "XXX ou YYY", mais, quand on l'ouvre, on lit « Cher M. YYY, ... ». Question importante et non triviale puisque la disjonction logique n'est pas exclusive. Le niveau **-2**, c'est en fait un système sous-jacent de fonctions, de *morphismes* catégoriques.

-2 vs. -1

Pour comprendre la distinction entre les deux niveaux, revenons à cette vieillerie respectable, le syllogisme *Barbara*, qui s'exprime par la règle :

$$\frac{A \Rightarrow B \qquad B \Rightarrow C}{A \Rightarrow C} \tag{1}$$

Łukasiewicz (interprétation tarskienne *ante litteram*) nous dit que *Barbara* se justifie par la transitivité de l'inclusion : Sans nier la valeur mné-

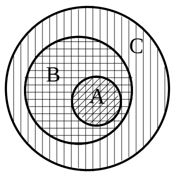

Fig. 1 – Le syllogisme selon Łukasiewicz

motechnique de ce dessin, son pouvoir explicatif est douteux : en effet, ne serait-ce pas plutôt *Barbara* qui justifie la transitivité de l'inclusion ?

Le niveau **-2** rompt avec cette entreprise de décervelage ; *Barbara* exprime alors la *composition* des morphismes : Le niveau **-2** ébauche un statut du *sujet*, qui s'exprime à travers le choix des morphismes : il y a, en effet, plusieurs « façons » d'aller de A vers B, ce qui reflète la pluralité des démonstrations possibles du même $A \Rightarrow B$.

Bien que nettement plus raffinée, cette interprétation est tout aussi essentialiste : en effet un morphisme (le mot dérive de « forme ») vient au monde

[2]Qui restent une contribution intéressante, à condition d'en voir les limites.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "g \circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & C \\ & B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

FIG. 2 – *Barbara* comme composition catégorique

avec, au poignet, des étiquettes de source, de but, etc. Cela dit, on a suffisamment progressé pour comprendre que l'objet de la logique n'est pas une fantasmatique « réalité », mais les règles de la logique elle-même, ou plutôt, la *géométrie* de ces règles. Ce changement de niveau, de point de vue, se traduit par un changement de logique, qui de classique, devient *intuitionniste*.

-3 vs. -2/-1

Le processus de fabrication d'un courrier contient ce courrier, mais seulement de façon *implicite*. Cela est manifeste dans les *courriels* collectifs, qu'on n'écrit jamais qu'une seule fois. Moins métaphoriquement, aux explications de niveau **-1** (l'inclusion) et **-2** (les morphismes) vient s'ajouter, au niveau **-3**, l'idée de *cablage*. Une démonstration de $A \Rightarrow B$ devient une espèce de boîte électrique avec des entrées et des sorties étiquetées A, B. *Barbara* s'exprime alors comme le branchement physique de telles boîtes à travers l'entrée/sortie commune B :

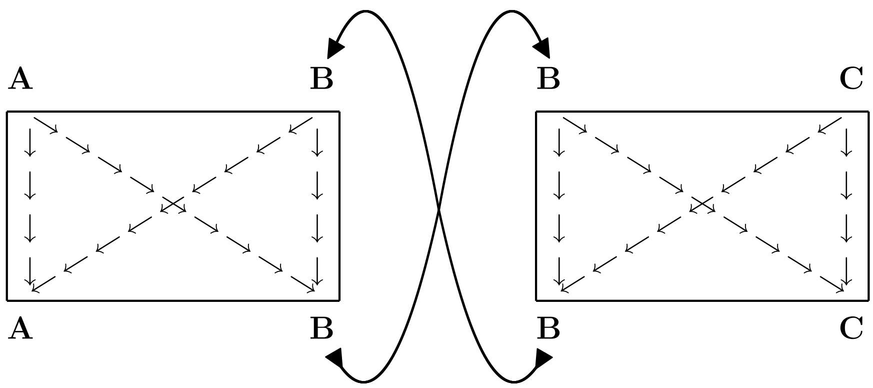

FIG. 3 – La géométrie de l'interaction comme branchement

Le niveau **-3** n'est pas essentialiste : en effet, s'il est impossible (cela n'a aucun sens) de composer des morphismes dont source et but ne se conviennent pas, rien n'empêche d'effectuer des branchements « interdits ». La meilleure preuve de cette possibilité, c'est précisément... son interdiction, qui, dans le monde courant, s'exprime par le choix de prises de formes variées. Il se passe réellement quelque chose en cas de branchement « illicite », ce quelque chose étant, le plus souvent, imprévisible !

Imparfait vs. parfait

Il s'agit, au départ, d'une distinction linguistique, celle entre « Je parle italien » (sous-entendu : toujours) et « Berlusconi parle à la télévision » (sous-entendu : une seule fois, peut être la seule !). Cette distinction est reflétée par la conjugaison (imparfait vs. passé simple ou composé), voire le changement de verbe dans les langues slaves (imperfectif vs. perfectif).

Cette distinction très naturelle n'est apparue en logique que tardivement — sans doute parce que les fondements assument une position *sub specie æternitatis* : l'éternel aux dépends du fugace, du contingent — avec la *logique linéaire* qui sépare les artefacts logiques en « actions », actes qui modifient l'état d'un système et des « observations » fonctionnant sur un mode pérenne.

Le monde *parfait*, qui correspond aux connecteurs logiques $\otimes, \parr, \multimap, \oplus, \&$ est un monde fini (car *achevé*), mais d'expressivité limitée ; il contient cependant toute la syllogistique d'Aristote. La perfection s'exprime à travers la *destruction* des hypothèses : l'implication linéaire (parfaite) $A \multimap B$ est *causale* car A produit sa conséquence B, mais est *consommé* dans ce processus. Il s'agit d'une interprétation *procédurale* : bien que la perfection s'accommode des niveaux **-1** (espaces de phases) et **-2** (espaces cohérents), elle prend vraiment tout son sens au niveau **-3**.

Typiquement, le fait que l'enchaînement :

$$\frac{A \multimap B \qquad A \multimap C}{A \multimap B \otimes C} \tag{2}$$

soit incorrect tient au fait que, si on dispose d'« appareillages » $\mathfrak{B}$ (resp. $\mathfrak{C}$) capables de produire B (resp. C) à partir de A, il n'y a aucun moyen, dans ce monde sublunaire, de les combiner en un appareillage produisant B *et* C (i.e., $B \otimes C$) à partir de A. Par contre, une simple juxtaposition de $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ produira un appareillage produisant B et C à partir de deux copies de A, ce qui est exprimé par l'enchaînement logique correct :

$$\frac{A \multimap B \qquad A \multimap C}{A \otimes A \multimap B \otimes C} \tag{3}$$

À l'heure actuelle, on peut considérer que la perfection a livré ses secrets ; en particulier, elle admet des interprétations presque satisfaisantes, typiquement la *ludique* et la *géométrie de l'interaction* (GdI).

La GdI

Il s'agit d'une interprétation de niveau **-3**, donc *procédurale.* Le syllogisme *Barbara* (1) peut se voir comme une espèce de « jeu de construction », voir la figure 3 *supra* : c'est ce que j'ai appelé *géométrie de l'interaction* (GdI). La GdI est, à ma connaissance, le seul exemple d'utilisation de « vraies » mathématiques en logique[3] : elle se formule, en effet, dans les algèbres de von Neumann.

Si les deux boîtes de la figure 3 sont représentées par des opérateurs linéaires u, v agissant respectivement sur des espaces de Hilbert $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}, \mathbf{B} \oplus \mathbf{C}$, alors *Barbara* s'interprète comme une « élimination des coupures[4] ». Le résultat de cette élimination, c'est l'opérateur linéaire
$w(x \oplus z) := x' \oplus z'$ agissant sur $\mathbf{A} \oplus \mathbf{C}$ et donné par les équations :

$$u(x \oplus y) = x' \oplus y' \tag{4}$$
$$v(y' \oplus z) = y \oplus z' \tag{5}$$

On peut montrer que, sous l'hypothèse raisonnable $\|u\|, \|v\| \leq 1$, l'équation (4) a une « solution » dans toute algèbre de von Neumann, solution au sens littéral, ou obtenue par des méthodes de prolongement. La composante cachée, ou encore *introspective*, y, y', correspond à la procéduralité, au calcul. C'est l'existence de cette composante qui fait que le niveau **-3** se pose, contrairement aux niveaux **-1,-2** —explications statiques—, en explication *dynamique.*

Reprenons encore la veine théologique : le néo-platonisme a introduit la notion d'*hypostase* (littéralement : soubassement) pour donner un analogue de la Trinité chrétienne. On sait (et les bûchers nous interdisent d'en douter) que ces trois hypostases sont indépendantes ; par contre rien de tel pour **-1,-2** et **-3** : le niveau **-3** a pour vocation de contenir **-2** et **-1**.

---

[3] À ne pas confondre avec les utilisations de la logique, typiquement la théorie des modèles, en mathématiques, qui sont légion.

[4] La coupure est la version moderne, due à Gentzen, du syllogisme ; il s'agit donc d'un branchement *formel*, dont l'élimination revient à « effectuer » le branchement.

Dans un monde essentialiste, on obéit aveuglément à la loi, ce qui interdit toute différenciation ; toutes les démonstrations sont correctes et identiques, ce qui est contre nature puiqu'on ne peut pas distinguer deux démonstrations du même énoncé A. Cette indistinction est typique du niveau **-1** ; à l'opposé, le niveau **-3** fait reposer la vertu sur le vice : tout énoncé va admettre des démonstrations, mais celles-ci n'auront pas forcément force de loi. Il faut alors distinguer entre des *bonnes* et des *mauvaises* démonstrations : nous verrons que cette discrimination est fondamentalement *subjective*.

Par contre, les niveaux **-2** et **-1** sont indépendants : en effet, l'interprétation catégorique, qui suppose aussi une abondance de morphismes, s'accommode mal d'une distinction entre bons et mauvais morphismes.

L'infini, l'iconoclasme et le point aveugle

Pour Thomas d'Aquin, Dieu a toutes les qualités : sa bonté est infinie, même son infinitude est infinie ! Cette vision a profondément influencé les fondements ensemblistes, et tout spécialement Cantor, dans les années 1880. Les principes qui gèrent l'infini thomiste se retrouvent, de façon cachée, en logique classique — et aussi en logique intuitionniste, étonnamment peu originale sur ce plan. La logique linéaire innove en introduisant la *perfection* (jusque-là absente de l'univers logique) et, partant, l'*imperfection* comme expression de la pérennité : c'est le « non-fini » qui crèe l'infini.

L'arbitrage opéré par la logique linéaire lors de sa création en 1986 est, cependant, relativement conservateur : en effet, l'opération de pérennisation, l'*exponentielle*[5] $!A$, permet d'exprimer la logique intuitionniste ($A \Rightarrow B$ se traduit en $!A \multimap B$) ainsi que la logique classique (au moyen d'une *polarisation*, i.e., d'une dichotomie des énoncés en deux classes échangées par la négation). Ce choix a pour principal avantage de relier la logique linéaire aux autres « vraies » logiques, en évitant d'en faire une *tératologique* du genre de l'infortunée « relevance logic ». Ce faisant, elle gomme la radicalité du propos : peut-on sérieusement opposer un monde labile, interactif (la perfection) à un monde rigide, « germanique », géré par le surmoi (l'imperfection) sans moyen terme entre les deux ? Par exemple, entre l'amour parfait « Je t'aime jusqu'à minuit » et l'amour imparfait à la Héloïse & Abélard « Je t'aime pour toujours », la vie fait un compromis honorable. De même, pourquoi faudrait-il choisir entre le fini et l'infini débridé ; n'y aurait-il pas un infini « simple », infini, mais pas infiniment infini ? La question n'est donc pas celle de l'infini (i.e., la pérennité), mais de l'infinité de l'infini (i.e., la pérennité de

[5] Ainsi nommée à cause de $!(A \,\&\, B) \sim !A \otimes !B$.

la pérennité). D'après Tarski, mais aussi Kripke — avec sa réduction de l'infini potentiel à l'infini actuel via l'ensemble de tous les possibles — il s'agit d'un mur de briques, une Muraille de Chine en un peu plus long. Il s'agit en fait d'une *idée*, avec, à l'arrière-plan, ce fantasme d'un monde des idées libre de toute pesanteur. Tout cela a été résumé par l'effroyable sentence de Konecker : « Dieu a fait les entiers, l'homme a fait le reste ».

Autrement dit, il y a un *point aveugle* : c'est l'essentialisme, exprimé, non pas par l'exponentielle, mais par les règles logiques qui la gèrent ; rappelons que l'exponentielle gère, en amont de l'infini, l'idée de *pérennité*. C'est une drôle de chose : elle ne concerne ni la vie, ni les guerres, ni les royaumes, rien de sublunaire : *sic transit*. Ni même les systèmes solaires et galactiques... Elle est de l'autre monde : c'est ainsi que l'on pérennise les morts par le souvenir. Le monde physique n'offre, en matière de pérennité, que des à-peu-près résumés par l'image du verre d'eau que l'on peut indéfiniment ponctionner sur la mer. C'est une pérennité modeste, qui ne permet pas de ponctionner une mer sur la mer, du moins pas éternellement. Et pourtant, si les principes officiels de la pérennité contiennent bien :

$$!A \quad \multimap \quad !A \otimes A \tag{6}$$

qui dit que la mer ($!A$, verre d'eau pérennisé) contient un verre d'eau (A) et toujours une mer ($!A$), ils mentionnent aussi :

$$!A \quad \multimap \quad !A \otimes !A \tag{7}$$

qui dit qu'une mer en contient deux, voire :

$$!A \quad \multimap \quad !!A \tag{8}$$

franchement douteux : une mer contiendrait une mer de mers !

Dans le non-dit subliminal des logiciens, il y a l'idée que tout ce qui n'est pas classique est une danseuse : quand la bise souffle, on rentre se réchauffer chez Papa Métatarski. C'est, par exemple, la vision dominante chez les constructivistes qui croient — tel Martin-Löf — en l'ensemble des entiers, et donc au caractère un peu superfétatoire de leur activité : il y a une timidité incroyable là-dedans. Cependant, l'opposition existence/essence, relayée techniquement par l'opposition parfait/imparfait, n'est pas un fioriture ; il est temps de montrer le drapeau et d'affirmer que les règles de la logique sont fausses : c'est la thèse *iconoclaste*. L'iconoclasme est, littéralement, la destruction des images ; il s'agit ici d'images mentales consubtantielles à la pensée occidentale. L'iconoclasme va forcément reposer sur une approche indirecte, contre-intuitive. Par exemple sur des *manipulations formelles* : en modifiant, sans justification, les règles des exponentielles. « ! » (et son dual « ? ») font partie de la cohorte des modalités et d'ailleurs, leur graphisme devrait être $\Box, \Diamond$, si la modalité n'avait été prostituée à l'écriture de systèmes plus ineptes les uns que les autres, par exemple **S5** dont j'ai voulu éviter le voisinage infamant. Les « logiciens » modaux s'appuient sur le côté cassant, tranchant — bref, essentialiste —, des modalités (et de leur bonne à tout faire, la sémantique de Kripke), pour torturer la logique à toutes les sauces. On peut, cependant, essayer de faire jouer, pour une fois, cette esthétique du *Deus ex machina* dans le bon sens : l'exponentielle se prête à des variations, typiquement les logiques *allégées* du genre **LLL** (voir *infra*), ce qui permet sinon de fonder, du moins de *plausibiliser*, l'iconoclasme.

Iconoclasme et complexité

L'iconoclasme réfère aussi à la destruction des mosaïques bizantines au VIIIe siècle, et l'emploi de ce mot expose à des critiques de la part de certains qui prétendent défendre la déduction classique, cénsément essentielle aux mathématiques. En fait, le besoin d'un *infini infini* n'est attesté que par des bizarreries combinatoires concoctées par le *Jurassic Park* fondationnel (la secte des *reverse mathematics*) : pour les vraies mathématiques, la déduction classique est avant tout un pis-aller commode ; mais la commodité a-t-elle une valeur fondationnelle ?

On peut, d'autre part, jutifier l'iconoclasme en revenant à l'origine procédurale de l'infini : il réside dans la croissance de certaines fonctions, plus généralement, dans leur *complexité* algorithmique. Ainsi, la procédure d'élimination des coupures de la logique usuelle (classique, intuitionniste, linéaire avec exponentielles orthodoxes) fait-elle intervenir les bornes :

$$2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^h}}}}}} \tag{9}$$

qu'on ne peut fondamentalement pas améliorer. De telles fonctions sont, du point de vue fondationnel, un non-sens : « Arrêtez, arrêtez chauffeur... Je n'peux pas, la manette est coincée ! ». La « tour d'exponentielles » est le surgeon inattendu du postulat thomiste de base (la préexistence des entiers), si bien résumé par Kronecker. Comment corriger cette aberration « non prédicative »[6] ? Je ne veux pas dire que, nécessairement, (9) soit à rejeter ; mais, de

[6]Je rappelle au passage que l'expression « prédicatif », lancée par Poincaré et qui a pris un sens quasi-religieux dans certaines sectes dont les idées combattent violemment celles de... Poincaré, mettait le doigt sur l'idée de définir un objet sans présupposer son

telles bornes devraient résulter d'un choix délibéré et non pas d'une fatalité sublie.

On pourrait penser déléguer cette tâche à la théorie de la complexité ; en effet, la question de savoir si des classes de complexité telles que **P** (*solution* en temps polynomial) et **NP** (*vérification* en temps polynomial) sont égales est d'un immense intérêt théorique, intérêt reconnu par son inclusion dans la liste des « problèmes du millénium ». Sa solution suppose une distinction *opératoire* entre potentiel et liste de possibilités ; il faut bien reconnaître que cette distinction n'existe pas dans l'esprit des logiciens (rappelons encore ces débilitants modèles de Kripke), d'où l'effarant désert conceptuel que constitue la *théorie de la complexité* : avec des outils aussi ingrats que les machines de Turing, il n'est pas étonnant qu'en plus de trente ans, aucun théorème de séparation entre ces classes n'a été obtenu.

Je propose de prendre la complexité au sérieux en considérant les classes (du moins celles qui s'y prêteront) comme des mesures de l'infini, un peu comme les *cardinaux* de la théorie des ensembles, mais — affranchis de thomisme — redescendus sur Terre.

Les *logiques iconoclastes* comme **LLL** (*Light Linear Logic*) renvoient un signal très positif : en effet, les bornes sur l'élimination des coupures dans ce système sont données par des polynômes dont le degré dépend d'un paramètre de *profondeur* ; en fait **LLL** correspond, dans tous les sens possibles (pouvoir expressif, complexité de l'élimination des coupures), à la classe **P** (temps polynomial). Ce système reste expérimental, car manquant de recul : alors que la logique « orthodoxe » s'appuie sur la théorie des ensembles et la combinatoire finie, rien de tel pour **LLL** : les restrictions quant aux exponentielles « sortent du chapeau », un paradoxe pour une approche qui prétend rompre avec l'essentialisme.

Le paradoxe de Richard (1905) « Le plus petit entier qu'on ne peut pas définir en moins de vingt mots » est usuellement ramené à l'ambiguïté du mot « définir »; et d'ailleurs, une définition précise de ce mot amène au théorème de Gödel de 1931, de l'aveu-même de de dernier. De fait, « définir » est employé en deux positions, une position « normale », dans le texte et une position « méta », ce qui mène à la notion de *profondeur*, fondamentale dans **LLL** : en effet, la pérennisation $!A$ consiste dans le décalage, l'*enfouissement* en profondeur 1 de A ; aucun contact n'étant possible entre niveaux, l'algorithmique polynomiale qui sous-tend **LLL** est finalement polynomiale. Et d'ailleurs, l'argument diagonal de Cantor — repris *mutatis mutandis* par Russell, Gödel, Turing, etc. — repose sur la transformation $\varphi_n(m) \rightsquigarrow \varphi_n(n)$,

existence ; Kreisel avait, en son temps, remarqué que « le plus petit entier tel que... » est non prédicatif.

ce qui est impossible si n et m évoluent à des *profondeurs* différentes.

Le *Jurassic Park* fondamentaliste préfère parler de définitions, méta-définitions etc., ce qui mène aux tortues transfinies. Plutôt que cette cavalerie indigeste, on cherchera un espace *géométrique* possédant une notion de profondeur (ou d'emboîtement). La physique nous propose un objet assez naturel à travers l'*algèbre de Clifford*, qui correspond aux *fermions*, particules asociales[7], que nous allons décrire à travers une de ses variantes, l'*algèbre CAR*, qui constitue le niveau 0 d'une analyse de la profondeur ; l'enfouissement se pérsentant comme un *produit croisé*.

L'algèbre CAR

Étant donné un espace de Hilbert $\mathbf{H}$, on introduit les *créateurs* $C_x (x \in \mathbf{H})$ et leurs adjoints, les *annihilateurs* $A_x := C_x^*$, de façon à fabriquer une *algèbre stellaire* régie par les relations[8] CAR :

$$C_x A_y + A_y C_x = \langle x \mid y \rangle I \tag{10}$$

$$C_x C_y + C_y C_x = 0 \tag{11}$$

$$A_x A_y + A_y A_x = 0 \tag{12}$$

Si $e \in \mathbf{H}$ est de norme 1, les expressions $\alpha_{11} C_e A_e + \alpha_{12} C_e + \alpha_{21} A_e + \alpha_{22} A_e C_e$ peuvent s'identifier aux matrices $\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$; si $\mathbf{H}$ est de dimension n, l'algèbre CAR correspond aux matrices carrées $2^n \times 2^n$: l'algèbre CAR généralise donc les algèbres de matrices.

Logiquement, l'algèbre CAR permet de gérer des lieux, des *loci* disjoints. Ainsi, la double implication logique, représentée par le *séquent* $A, B \vdash C$ fait intervenir, si A, B, C ont été localisés en $e, f, g \in \mathbf{H}$ deux à deux orthogonaux, l'expression $C_e A_f A_g + C_f A_g A_e + C_g A_e A_f$. Sans entrer dans les détails, observons que l'antisymétrie (11) (12) interdit de former $A, A \vdash B$[9]... conformément au principe fondamental de la *perfection* qui s'oppose à toute réutilisation.

On s'aperçoit ainsi que, par rapport au vieux principe « La logique s'écrit avec un alphabet $a, b, c, \ldots$ », on a introduit l'idée d'un comportement fermionique — techniquement : antisymétrique — du langage, en contraste avec l'idée courante d'un langage *sub specie æternitatatis*, hors de toute contrainte physique ou géométrique.

[7] À l'opposé des *bosons*, particules grégaires, berlusconiennes.

[8] *Canonical anticommutation relations* ; (12) est conséquence de (11).

[9] La *ludique* nous apprend que ce que l'on dénote incorrectement ainsi n'est autre que $A, A' \vdash B$, où A' est une *délocalisation*, i.e., une copie isomorphe de A.

L'algèbre CAR n'accepte, au mieux, que la perfection. Pour gérer l'imparfait, il est nécessaire de fournir des outils de manipulation *globale*. Par exemple, si $\mathbf{H} = \mathbf{K} \oplus \mathbf{K}$ s'écrit comme somme directe de deux sous-espaces isomorphes, l'ajout à l'algèbre CAR du *twist* $\sigma(x \oplus y) := y \oplus x$. Le twist permet une manipulation globale des créateurs et des annihilateurs. En fait, l'algèbre CAR induit une *algèbre de von Neumann* de type $\mathbf{II}_1$, le *facteur hyperfini* $\mathcal{R}$, célèbre objet dû à Murray & von Neumann [1], et il en est de même de son « produit croisé » $\mathcal{R} \rtimes \sigma$, et de tous les produits croisés $\mathcal{R} \simeq \mathcal{R} \rtimes \mathfrak{G}$ avec un groupe *localement fini* d'automorphismes externes. Ce produit croisé introduit une *stratification* qui correspond à la profondeur évoquée au sujet de **LLL** ; mais cette stratification est *subjective*, voir *infra*.

L'idée d'un groupe localement fini, i.e., union filtrante de sous-groupes finis, pour expliquer l'imperfection, est iconoclaste. En effet, dans un tel groupe, un ensemble fini engendre un sous-groupe lui aussi fini, quoique peut-être très gros. En particulier, si ce groupe représente, en quelque sorte, le « langage », les sophismes habituels deviennent inopérants : de même qu'il est faux que l'on puisse s'éloigner indéfiniment de la Terre, il est tout aussi faux qu'on puisse créer *ad libitum*, de façon interne, de nouvelles expressions.

Comme $\mathcal{R} \simeq \mathcal{R} \rtimes \mathfrak{G}$, il est difficile de comprendre le statut du groupe $\mathfrak{G}$, sauf à revenir sur la question du *subjectif*.

La réhabilitation du subjectif

On peut voir la logique moderne comme une théorie du $\lambda \acute{o} \gamma o \varsigma$ sans sujet. L'exemple classique de l'étoile du matin et de l'étoile du soir, deux *sens* différents donnés à la même *dénotation*, Vénus, montre les limites de la pensée de Frege : la dychotomie objet/sujet est claire et nette et le sujet n'a qu'à bien se tenir (au plus près de l'objet) !

Comme dans la littérature russe, c'est l'idiot du village qui révèle le non-dit : ainsi, l'intelligence artificielle refuse-t-elle au sujet le peu de place consenti par Frege. Par exemple, certains n'ont pas hésité à évoquer de prétendues valeurs de vérité cognitives du genre « je ne sais pas »; ce que l'on sait par contre, c'est que cela ne marche pas. La palme est remportée par la mal nommée « logique épistémique », collection de devinettes basées sur le fait que quelqu'un n'a pas répondu à une question : dans ce monde-là, non seulement sujet et objet sont bien constitués, mais, à tout moment, on sait ce que l'on sait, ce que l'on ne sait pas, ce que l'on pourrait savoir et comment l'obtenir. C'est la logique de Guantanamo : un sujet est un objet que l'on n'a pas torturé suffisamment. Cette logique n'existe d'ailleurs que comme fantasme totalitaire ; sur le plan technique, c'est un désert bureaucratique.

Ce qui rejoint la remarque faite *supra* sur l'astronomie ptolémaïque : le refus du sujet conduit au subjectivisme. Il en va de même — et c'est moins surprenant — de l'"omniprésence du sujet ; d'ailleurs, quand la logique se déboutonne et abandonne l'objectivisme de rigueur, elle verse dans l'« intensionnel », qui est un subjectivisme débridé et stérile. La question est de placer le sujet à son juste niveau ; c'est ce qu'à fait, en son temps, la mécanique classique en définissant un moyen terme entre le repère absolu et les repères arbitraires : les repères galiléens.

Quand on tente de reconstruire le niveau **-1** (vrai, prouvable) à partir du niveau **-3**, on doit comprendre ce qu'est une démonstration *convaincante* ; on est ainsi amené à cerner la classe des opérateurs qui ressemblent à des *cablages* : en dimension finie, il s'agit des *matrices* à coefficients $0, 1$ comportant au plus un « 1 » par ligne et par colonne. Cette définition est *subjective*, puisque reliée à l'écriture matricielle, elle-même référant à une *base* de l'espace. Cette définition se laisse généraliser en dimension infinie en remplaçant la base par un *point de vue*, i.e., par une sous-algèbre commutative maximale $\mathcal{P}$ du facteur hyperfini ; une « bonne » démonstration devient alors un élément du *normalisateur* de $\mathcal{P}$, i.e., une isométrie partielle u telle que :

$$u\mathcal{P}u^* \quad \subset \quad \mathcal{P} \tag{13}$$

La vérité se définit alors comme la présence d'une bonne démonstration ; elle est donc *subjective*, puisque relative au point de vue $\mathcal{P}$. On découvre incidemment que les impératifs techniques liés à la vérité coïncident avec ceux qui régissent la pérennité ; on est ainsi amené à définir la pérennisation par rapport à un point de vue. Ceci permet une approche homogène — sinon en qualité, du moins dans ses intentions — à la révolution quantique du XX$^{\text{e}}$ siècle.

Les paradoxes qui résultent de cette posture *subjective mais non subjectiviste* sont facilement digestibles : il suffira de rappeler que l'interaction des démonstrations — pratique *déductive* et donc subjective — suppose un point de vue commun[10] : c'est l'*intersubjectivité*. En résumé :

$$\textit{Vérité} = \textit{Pérennité} = \textit{Intersubjectivité}$$

Une belle question

J'ai débuté en logique il y a trente cinq ans, en 1969, au temps de l'isomorphisme de Curry-Howard. Après des années de travail jalonnées par d'incontestables succès, mais aussi d'indéniables fourvoiements, je suis arrivé

[10]Exemple : la logique habituelle se situe par rapport à un point de vue fixe, mais non perçu comme tel : la combinatoire ensembliste.

à... formuler une question : celle de l'*iconoclasme*, en liaison avec une renégociation du rapport objet/sujet.

C'est modeste, mais consolons-nous en évoquant le grand Kepler. Rien n'est plus ridicule que ce prix Nobel en... économie, H. Simon, qui a « redécouvert » la loi $R^2 = kT^3$, ordinateur à l'appui. Kepler, astrologue, « inventa » l'astronomie *ex nihilo* ou presque, en posant de nouvelles questions, certaines excellentes comme celle de la relation entre demi-grands axes et périodes, d'autres plus douteuses comme celle de la relation entre planètes et polyèdres réguliers. La réponse à ces questions est facile, d'ailleurs H. Simon et sa machine, qui ne sont pas des aigles, ne l'auraient pas trouvée sinon ; la vraie difficulté était de poser la question.

Mallarmé pensait que le monde se refermera sur un beau livre ; la logique se refermerait-t-elle sur une belle question ?

Références

[1] A. Connes. **Non-commutative geometry**. Academic Press, San Diego, CA, 1994.

[2] J.-Y. Girard. **Le point aveugle, tome 1 : vers la perfection**. Visions des Sciences. Hermann, Paris, 2006. 296 pp.

[3] J.-Y. Girard. **Le point aveugle, tome 2 : vers l'imperfection**. Visions des Sciences. Hermann, Paris, 2007. 299 pp.