L'incomplétude ou le foutu second ordre

Jean-Yves Girard

28 novembre 2025

Cet article est une sorte de codicille à $\exists$, *clef de voûte logique* [6]. Un de mes rares lecteurs [1] m'a fait remarquer que la section 4.5. était rédigée de façon un peu désinvolte. En effet, j'avais été effarouché à l'idée de refondre mon architecture afin d'y intégrer le *déréalisme* du second ordre qui, quantifiant sur des éléments subjectifs – les comportements –, imbrique Objet et Sujet. Une omission réparée dans ce papier qui oppose un premier ordre complet géré à la Curry à un second ordre incomplet géré à la Church.

Ordre	Premier	Second
Complétude	Oui	Non
Typage	Curry	Church
Certitude	Apodictique	Épidictique

1 Premier et second ordre

1.1 La ligne de démarcation

Si l'on comprend dans les grandes lignes la distinction entre premier et second ordre [2], on ne sait pas toujours où placer la frontière. En deux mots, le second ordre commence avec l'utilisation du quantificateur $\exists X$ où X réfère à un prédicat ou une proposition.

Techniquement parlant, il faut tenir compte de la *signature* : un $\forall X$ négatif doit être compté comme un $\exists X$ alors qu'un $\exists X$ négatif est assimilable à un $\forall X$. Ce qui peut se faire – facilement mais aux dépens de la lisibilité – en *définissant* les opérations négatives : $\neg\cdot, \sim\cdot, \cdot \Rightarrow A, \cdot \multimap A$.

1. Un grand merci à Valentin Maestracci !
2. Plus généralement entre premier ordre et ordres supérieurs – second, troisième, etc. – résumés ici par le second.

La définition de Dedekind des entiers naturels :

$$x \in \mathbb{N} \quad := \quad \forall X\ X(\bar{0}) \wedge \forall y\ (X(y) \Rightarrow X(Sy)) \ \Rightarrow\ X(x) \tag{1}$$

reste du premier ordre tandis que son utilisation dans le quantificateur numérique $\forall n A[n]$: $\forall x\ x \in \mathbb{N} \Rightarrow A[x]$, est du second ordre : $x \in \mathbb{N}$ apparaît à gauche de « $\Rightarrow$ » avec donc un $\forall X$ négatif. $x \in \mathbb{N}$ est donc du premier ordre côté pile, du second côté face.

Ces énoncés du genre *Janus bifrons* donnent lieu à un brouillage de cartes. Côté pile, on ne mentionne pas $\forall X$ et – incantation magique – on remplace les variables par de prétendues constantes $P, Q, \ldots$, façon de les quantifier universellement sans le dire, voir la section 1.2. Côté face, c'est le règne du *schéma* d'axiomes, un pour chaque valeur possible de X ; c'est ainsi que les utilisations négatives de $x \in \mathbb{N}$ donnent lieu au principe de récurrence (ou induction) de l'arithmétique de Peano :

$$\frac{B[\bar{0}] \qquad B[y] \Rightarrow B[Sy]}{\forall n\ B[n]} \tag{2}$$

qui correspond au choix $X := B[\cdot]$ dans la définition de Dedekind (1). L'animadversion envers le second ordre a conduit à privilégier les « définitions inductives » façon (2) au dépens de la Logique, avec des différences techniques souvent minces mais une architecture complètement faussée, les systèmes axiomatiques étant soumis à moins de contraintes que la Logique. Ce qui est l'effet recherché : on peut ainsi construire des tours d'extensions axiomatiques en ajoutant des principes tirés du chapeau, e.g., des consistances itérées, variations stériles sur le second théorème d'incomplétude.

On retrouve le même type de réduction dans le schéma d'axiomes de l'égalité :

$$x = y \wedge A(x] \ \Rightarrow\ A[y] \tag{3}$$

axiomatisation au premier ordre de la ringardissime égalité de Leibniz, « Toute propriété de x est propriété de y » :

$$x = y \quad := \quad \forall X\ X(x) \Rightarrow X(y) \tag{4}$$

(3) a toujours été la honte du calcul des prédicats : l'égalité, primitive logique s'il en est, se voit rétrogradée au statut axiomatique d'un prédicat quelconque. De plus, le second ordre étant incomplet, convenons qu'il ne faut pas en abuser comme dans (4), approche discutable qui postule des individus tombés du Ciel comme le monolithe de *2001* et qui auraient des propriétés, un peu comme les chiens ont des puces. Ces prétendus individus sont en fait des propositions particulièrement simples, typiquement les combinaisons multiplicatives de $\forall$ et $\exists$, cf. [4] et [5], et l'égalité l'équivalence linéaire $x \equiv y$.

1.2 Complétude et vérité

En logique classique, la complétude peut s'énoncer :

$$\text{Si } A \text{ est vrai dans tous les modèles, il est prouvable.} \tag{5}$$

Ce qui est techniquement correct, mais logiquement un peu court. En effet, les lettres $P, Q, \ldots$ qui désignent les prédicats occurrant dans A n'ont aucun statut : il s'agit de paramètres, autrement dit de variables, cf. *supra*. Pour atteindre la dimension logique, i.e., l'universel, il faut quantifier ces paramètres et remplacer A par sa clôture universelle $B := \forall P \forall Q\, A$. Laquelle est vraie quand A est vrai pour toute valeur de P, Q, i.e., dans tous les modèles. On obtient ainsi la formulation plus satisfaisante :

$$\text{Si } B \text{ est vrai, il est prouvable.} \tag{6}$$

Et l'on comprend mieux sa relation à l'incomplétude – le coup de tonnerre de 1931 – en remarquant que l'énoncé G de Gödel, vrai mais non prouvable, s'écrit $\forall n \ldots$: il se situe donc au second ordre, cf. 1.1 *supra*. La distinction entre complet et incomplet coïncide ainsi avec celle entre premier et second ordre : cette explication logique est d'autant plus satisfaisante que c'est **G** qui est incomplet et non pas le système, souvent *ad hoc*, dans lequel il est inséré ! Nous reviendrons sur ce point dans la section suivante.

1.3 Complétude et sous-formule

La formulation (6) souffre d'un défaut rédhibitoire : la vérité tarskiste n'a strictement aucun sens hors du cas classique. Pour s'en convaincre, il suffit d'essayer de la transposer en termes de modèles de Kripke ou de sémantique des phases : *no way* !

La vérité classique est en fait une façon de parler de ce qu'on pourrait prouver si l'on disposait du « système complet » où il ne manquerait rien. C'est une fiction qu'on peut approximer au moyen d'extensions du calcul des prédicats. Comment se comporte donc un énoncé A face au processus de saturation progressive d'un système ? En admettant – c'est bien la moindre des choses – que l'élimination des coupures fonctionne dans notre extension, la propriété de la sous-formule, découverte majeure de Gentzen, nous assure que les démonstrations sans coupures de A ne dépendent pas du système quand A est du premier ordre, autrement dit, que les méthodes sont complètes. Ce qui n'est pas le cas au second ordre, typiquement avec la quantification propositionnelle $A := \exists X\ X \wedge \neg X$ (ou encore $A := \exists X\ X \otimes {\sim}X$). Une démonstration sans coupures typique de $\vdash \exists X\ X \wedge \neg X, B$ s'écrit :

$$\dfrac{\dfrac{\vdash C, B \qquad \vdash \neg C}{\vdash C \wedge \neg C, B}}{\vdash \exists X\ X \wedge \neg X, B} \tag{7}$$

Elle utilise un C totalement imprévisible, qui dépend de l'extension du calcul des prédicats dans laquelle on se place.

Clarifions un point : on écrit et on répète que des systèmes, comme l'arithmétique qui est un morceau de logique du second ordre, sont incomplets. Autrement dit, ne prouvent pas tout ce qu'il faudrait prouver. Typiquement, la « force » du principe de récurrence (2) dépend des B qu'on se permet dans la définition de Dedekind (1) : il y a toute une littérature sur le sujet. Mais pourtant, même si on a choisi des B suffisamment « forts » pour prouver un A donné, cela ne clôt pas la liste des démonstrations possibles de A : de nouveaux B produiront de nouvelles démonstrations de A. Ainsi, l'énoncé de Gödel G qui n'est pas démontrable dans un système, le sera dans un autre, plus « fort »; tout en restant fondamentalement incomplet car on ne disposera jamais de *toutes* ses démonstrations. L'incomplétude passe ainsi des systèmes aux énoncés, ce qui est conceptuellement plus satisfaisant.

Pour comprendre l'incomplétude, il faut donc se débarrasser des deux piliers du réalisme axiomatique : la vérité tarskiste et les systèmes.

1.4 Le système $\mathbb{F}$

Rappelons que $\mathbb{F}$ [1] est un λ-calcul typé équipé d'une abstraction sur les types $\Lambda X\, t[X]$ et d'une application de types $t\{T\}$ régis par la réécriture :

$$(\Lambda X\, t[X])\{T\} \rightsquigarrow t[T] \tag{8}$$

L'incomplétude se manifeste déjà dans $\mathbb{F}$. Pour s'en convaincre, il suffit d'« oublier » le premier ordre dans le calcul des prédicats du second ordre, ce qui fait que les prédicats deviennent des propositions et que $x \in \mathbb{N}$ se simplifie en **nat** : $\forall X\ X \wedge (X \Rightarrow X) \Rightarrow X$. On a ainsi shunté le premier ordre qui n'apporte ici que des complications inutiles [3]. L'incomplétude des énoncés devient l'incomplétude des types, par exemple **nat** $\Rightarrow$ **nat** : les objets de ce type dépendent fortement des types T utilisables dans les $t\{T\}$.

Ce qui ne fonctionnait pas dans $\mathbb{F}$ c'est le mot « système ». Si la Syntaxe Transcendantale (ST) peut se résumer par le slogan anarchisant : « Ni Sémantique ni Système », ce qui suit peut se décrire comme le « non-système » $\mathbb{F}$.

3. Exercice instructif : inverser le « foncteur d'oubli » pour démontrer la normalisation du calcul des prédicats du second ordre à partir de celle de $\mathbb{F}$.

1.5 En syntaxe transcendantale

La ST [6] permet d'envisager la notion de preuve hors de tout système grâce à la notion de *comportement*, forme rigoureuse du génial mais un peu vague BHK dont le cas emblématique est celui de l'implication :

Définition 1 (Implication)
Une démonstration de $A \Rightarrow B$ est une fonction π associant à toute démonstration σ de A une démonstration $\pi(\sigma)$ de B.

Il s'agit, dans un espace analytique idoine – amélioration du λ-calcul pur –, d'un ensemble de *desseins* égal à son biorthogonal.

Une scie de ma jeunesse était la question de la démonstration auxiliaire [4] : « comment savons-nous que π est vraiment conforme à la définition 1 ? ». L'ineptie des réponses données à l'époque n'a d'égal que la violence mise à les défendre et à excommunier les hérétiques. L'idée fondamentale est celle d'une démonstration auxiliaire qu'on est tenté de traiter elle-même à la BHK : méta-démonstration, donc méta-méta-démonstrations à l'horizon et métastases en formation. Une idée aussi splendide que BHK devient ainsi une affligeante pyramide de Ponzi intellectuelle.

En ST, BHK correspondant à l'*usage*, i.e., à la conséquence logique, le bon vieux *Modus Ponens* devenant la fonction de la définition 1. Alors que le rôle de la démonstration auxiliaire est tenu par l'*usine* qui n'est en aucune façon un « méta-usage ». L'*usine*, non déductive, correspond aux démonstrations sans coupures ; elle a surgi comme critère de correction des réseaux, presque *ex nihilo* puisqu'elle n'a guère comme ancêtre que le Théorème d'Herbrand. Et joue un peu le rôle du système formel... sinon qu'il n'y a plus de système. « Systèmes je vous hais » pourrait-on dire en paraphrasant Gide : tout comme la Famille, la Religion, le Parti, la Mafia... le Système apporte sécurité mais aussi enfermement, c'est le collier qui tient attaché le chien de La Fontaine.

Revenons à la ST. Les énoncés logiques prennent la forme de *comportements* égaux à leur biorthogonal et les éléments du comportement A sont donc toutes les preuves possibles de A, *sub specie æternitatis* si l'on peut oser l'expression. La difficulté est de savoir les reconnaître, d'où la nécessité d'un préorthogonal fini, le *surmoi* constitutif de l'usine. Ce surmoi existe au premier ordre mais fait cruellement défaut au second : c'est l'incomplétude. Si le type **nat**, *Janus bifrons* s'il en est, admet un surmoi fini, ce n'est pas du tout le cas de son envers, présent dans **nat** $\Rightarrow$ **nat** auquel s'applique l'incomplétude et qui ne dispose d'aucun surmoi fini. Il sera cependant facile de fabriquer des surmois à la tête du client, qui ne fonctionnent pas pour A tout

4. Question purement idéologique vu le flou artistique de BHK !

entier mais seulement pour une démonstration donnée de A. Intégrés à la démonstration, il sont une sorte de clef destinée à la justifier ; la démonstration devient un être hybride, partie Objet, partie Sujet.

Ce qu'étaient déjà, à notre insu, les termes du système $\mathbb{F}$, typés explicitement « à la Church » et non pas implicitement, façon Curry [5]. Les deux approches sont en fait complémentaires :

Curry : correspond parfaitement à l'usage.

Church : est lié à l'usine, du moins au second ordre. Le typage explicite – notamment les $t\{T\}$ du système $\mathbf{F}$ – correspond à un surmoi *ad hoc* permettant de s'assurer que le dessein est du bon type.

Le typage explicite n'apparaît vraiment que dans les $t\{T\}$ qui sont des éliminations et donc des utilisations négatives de $\forall X$ qui se comportent ici comme des $\exists X$. Le cas complet s'accommodant parfaitement de « Curry », « Church » est donc une manifestation de l'incomplétude.

La principale nouveauté technique de cet article réside dans une modification profonde de la strate anlaytique : les desseins deviennent *déréalistes*, i.e., à la Church.

1.6 Un autre regard sur l'incomplétude

L'incomplétude est liée à la quantification existentielle, plus précisément à l'indétermination du domaine de quantification. Une indétermination qui n'affecte pas le cas universel, du moins tant qu'il n'interfère pas avec l'existence. En effet, rien n'est plus erroné que de voir $\forall X\, A[X]$ comme une conjonction infinie $\bigwedge_P A[P]$ où P varierait parmi toutes les propositions possibles : le théorème universel $\forall X\, X \Rightarrow X$ n'est pas démontré en faisant la liste de tous les $P \Rightarrow P$ – on n'aurait toujours pas fini – mais par un argument d'usine qui se réduit à trois valeurs de P (cf. [6], 4.5.1, voir aussi 14) :

$\mathbf{P}_1 = \mathbb{7}$ et donc $\sim\mathbf{P}_1 = \mathbb{7}$.

$\mathbf{P}_2 = \mathbb{7} \otimes \mathbb{7}$ et donc $\sim\mathbf{P}_2 = \mathbb{7} \parr \mathbb{7}$.

$\mathbf{P}_3 = \mathbb{7} \parr \mathbb{7}$ et donc $\sim\mathbf{P}_3 = \mathbb{7} \otimes \mathbb{7}$.

Le cas existentiel ressemble, par contre, à une disjonction infinie $\bigvee_P A[P]$, le problème étant que l'espace des P possibles est indéterminé. On a tendance à prendre par défaut toutes les propositions définissables au second ordre : c'est le choix opéré par le système $\mathbb{F}$ mais ce n'est pas la seule possibilité.

Par exemple en se restreignant aux combinaisons multiplicatives de $\mathbb{7}$ et $\mathbb{7}$, ce qui correspond au premier ordre qui n'est qu'un second ordre émasculé,

5. Bien qu'inventeur de $\mathbb{F}$, j'avoue un faible pour l'approche existentialiste de Curry.

cf. [4] et [5]. Quand on admet, parmi les P possibles, des propositions utilisant la « vraie » quantification du second ordre, on se heurte à des problèmes de circularité. Que certains ont voulu gérer au nom d'une sorte d'interdit biblique : « Tu ne cuisineras pas une proposition dans le lait de sa mère ». Ces « prédicativistes », sortes de pélerins de l'An Mil(-neuf-cent), agitent leur clochette – « Repentez-vous d'avoir utilisé des définitions impies » – en énonçant des interdits de leur cru.

Ces ukases ont au moins une vertu – involontaire –, celle de montrer que le domaine de la quantification existentielle est incomplet, i.e., pas bien défini puisque sujet à controverse. La ST ne se prononce pas sur cette question qu'elle renvoie à une strate externe, l'*épidictique* (section 3.4). Les gabarits (*infra*) tombant du Ciel, il est normal que leur choix donne lieu à des guerres de religion... mais elles ne sont plus du ressort de la Logique, laïque.

2 Desseins déréalistes

Je rechausse les bottes de [6] et retourne à sa section 4.5 en commençant par une modification de la strate analytique, l'introduction de desseins comportant une composante subjective.

2.1 Gabarits

Le typage, notion synthétique s'il en est, devient analytique dans cette modification inspirée de l'approche « Church ». Les desseins *déréalistes* utilisent, outre les étoiles habituelles, des étoiles normatives, les *gabarits* qui correspondent aux surmois de [6]. Un gabarit propose donc *plusieurs* tests ; cette pluralité induit un non-déterminisme profond et, partant, des problèmes de coordination.

Première approximation : un *gabarit* $\mathbf{S}$ est un ensemble fini (non vide) de desseins appelés *lamelles*. Ils peuvent être combinés avec les étoiles ordinaires pour former des desseins *déréalistes*. Incidemment, ces desseins déréalistes peuvent à leur tour être utilisés pour former des gabarits : un peu comme les bonnes vieilles boîtes de la logique linéaire [2], on peut les empiler. Il faut étendre la notion de disjonction entre étoiles au cas déréaliste. Deux étoiles sont *disjointes*, notation $\cdot \frown \cdot$ quand :

$[\![u_1, \ldots, u_m]\!] \frown [\![v_1, \ldots, v_n]\!]$ **:** les u_i sont disjoints des v_j.

$[\![u_1, \ldots, u_m]\!] \frown \mathbf{S}$ **:** si $[\![s_1, \ldots, s_n]\!] \in \mathcal{S} \in \mathbf{S}$, alors $[\![u_1, \ldots, u_m]\!]$ est disjoint de $[\![s_1, \ldots, s_n]\!]$

$\mathbf{S} \frown \mathbf{T}$ **:** si $[\![s_1, \ldots, s_m]\!] \in \mathcal{S} \in \mathbf{S}$ et $[\![t_1, \ldots, t_n]\!] \in \mathcal{T} \in \mathbf{T}$, alors $[\![s_1, \ldots, s_m]\!]$ est disjoint de $[\![t_1, \ldots, t_n]\!]$.

Ainsi, $\mathbf{S}$ peut-il être remplacé au cours de la normalisation par une quelconque de ses lamelles. Problème, les gabarits sont ordinairement exponentiés, ce qui veut dire qu'ils produisent des métastases, exponentiées ou non, $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \ldots$ et le choix non déterministe opéré dans $\mathbf{S}_1$ doit être indépendant de celui fait dans $\mathbf{S}_2$. Mais dans un monde régi par l'unification, comment coordonner les choix ? La solution consiste à introduire une sorte de pétiole permettant de distinguer les diverses métastases. Un gabarit prend désormais la forme $\mathbf{S}(\!| s_1, \ldots, s_m |\!)$ où $[\![s_1, \ldots, s_m]\!]$ est une étoile au sens habituel. Avec une condition reliant ce « pétiole » au « contenu » de la boîte $\mathbf{S}$:

Pour tout $\mathcal{S} \in \mathbf{S}(\!| s_1, \ldots, s_m |\!)$, tous les s_i apparaissent, à renommage de variables près, dans des étoiles de $\mathcal{S}$, forcément uniques.

Pour comprendre la condition, considérons un gabarit $\mathbf{S}(\!| p(x,y,y), q(x,x,y |\!)$ et une lamelle $\mathcal{S} \in \mathbf{S}(\!| p(x,y,y), q(x,x,y |\!)$. Deux possibilités :

1. $[\![p(x,y,y), \ldots]\!] \in \mathcal{S}$ et $[\![q(x,x,y), \ldots]\!] \in \mathcal{S}$.
2. $[\![p(x,y,y), q(x,x,y), \ldots]\!] \in \mathcal{S}$.

Ce qui exclut le cas $[\![p(x,y,y), q(y,y,x), \ldots]\!] \in \mathcal{S}$ dans lequel les variables sont synchronisées de façon différente.

Définition 2 (Desseins déréalistes)
Un dessein déréaliste est un ensemble d'étoiles, normatives ou non, deux à deux disjointes.

2.2 Normalisation

La notion de coupure est la même qu'auparavant : elle repose sur l'utilisation de *couleurs* complémentaires, qui ne sont autres que des lieux appariés, e.g., t/u. On peut donc former des gabarits genre $\mathbf{S}(\!| t, u, v, w |\!)$.

Pour expliquer la normalisation d'un dessein déréaliste, je vais commencer par le cas particulier où il n'y a pas de gabarits imbriqués. On procède en deux étapes, la première consistant à effectuer des duplications qui transforment un gabarit en métastatses distinctes.

1. On forme un diagramme Δ (cf. [3]), chaque gabarit $\mathbf{S}(\!| s_1, \ldots, s_m |\!)$ étant traité comme s'il s'agissait de l'étoile $[\![s_1, \ldots, s_m]\!]$. Si le diagramme réussit, soit θ son unificateur.

Soit $[\![t_1, \ldots, t_n]\!]$ le dessein résiduel de $\Delta\theta$. Si Δ n'utilise pas de gabarit, il donne alors lieu à l'étoile $[\![t_1, \ldots, t_n]\!]$. Sinon, il donne lieu à un gabarit $\mathbf{T}(\!| t_1, \ldots, t_n |\!)$ dont il reste à définir les lamelles. Si $\mathbf{S}_1(\!| \ldots |\!), \ldots, \mathbf{S}_k(\!| \ldots |\!)$ sont les gabarits de $\Delta\theta$, choisissons une lamelle $\mathcal{S}_i$ dans chaque $\mathbf{S}_i$: leur union

$\mathcal{S}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{S}_k$, à laquelle il faut ajouter les étoiles « ordinaires » de $\Delta\theta$, constitue un dessein $\mathcal{D}$. Dont la forme normale va constituer une des lamelles de $\mathbf{T}(\!| t_1, \ldots, t_n |\!)$. Avec une condition qui la relie au pétiole :

2. $\mathcal{D}$ se normalise en gardant les mêmes $t_1, \ldots, t_n$.

Dans le cas imbriqué, on se place dans un gabarit dont aucun sous-gabarit n'est coloré : on utilise la procédure précédente pour le normaliser, puis on recommence avec le résultat.

2.3 Second ordre et desseins déréalistes

Les étoiles normatives sont utilisées pour représenter la quantification existentielle du calcul des séquents :

$$\frac{\vdash C[T, \sim T], \Gamma}{\vdash \exists X\ C[X, \sim X], \Gamma} \tag{9}$$

au moyen d'une imbrication du Sujet dans l'Objet. Des gabarits idoines (*infra*, 3.3) sont introduits pour internaliser les critères de correction de T et de son envers $\sim T$. Dans le système $\mathbb{F}$, (9) correspond à la construction de $t\{T\}$. Informellement, si t est de la forme $\Lambda X \cdot u[X, \sim X]$, $t\{T\}$ se normalise en $u[T, \sim T]$; T nous est donné sous forme de gabarits exponentiés $!(\mathbf{C} \vdash \mathrm{\Upsilon})$ et $!(\underline{\mathbf{C}} \vdash \mathrm{\Upsilon})$[6], *idem* pour $\sim T$, dont les diverses métastases – copies de $(\!| \mathbf{C} \vdash \mathrm{\Upsilon} |\!)$, etc. – fournissent un critère de correction.

3 La quantification du second ordre

3.1 Quantification universelle

La définition donnée dans [6] est absolument parfaite mais décrite du seul point de vue de l'usine. Du point de vue usage, l'idée est d'utiliser l'intersection $\bigcap_{\mathbf{D}} \mathbf{C}[\mathbf{D}, \sim\mathbf{D}]$ où $\mathbf{D}$ varie parmi tous les comportements. Avec le danger que cette intersection soit vide, d'où le remplacement de $\mathbf{C}[\mathbf{X}, \sim\mathbf{X}]$ par

$$\mathbf{C}[\mathbf{X}, \sim\mathbf{X}]^\flat := (\mathbf{X} \parr \mathrm{\Upsilon}) \otimes (?\,\mathbf{X} \parr \mathrm{\Upsilon}) \otimes (\sim\mathbf{X} \parr \mathrm{\Upsilon}) \otimes (?\sim\mathbf{X} \parr \mathrm{\Upsilon}) \Rightarrow \mathbf{C}[\mathbf{X}, \sim\mathbf{X}]$$

Et donc :

$$\forall\mathbf{X}\ \mathbf{C}[\mathbf{X}, \sim\mathbf{X}] := \bigcap_{\mathbf{D}} \mathbf{C}[\mathbf{D}, \sim\mathbf{D}]^\flat \tag{10}$$

6. Abus de notation : j'utilise $\mathrm{\Upsilon}$, plus compréhensible, en lieu et place de ses délocalisations $\mathtt{w}, \mathtt{w}'$.

À gauche de $\mathbf{C}[\mathbf{X}, {\sim}\mathbf{X}]$ des surmois exponentiés : les chiens de ${\sim}\mathbf{X}$, ses cerbères[7], les chiens de $\mathbf{X}$ et ses cerbères. L'intersection n'est jamais vide comme on le vérifie aisément sur l'exemple le plus extrême qui soit, $\forall \mathbf{X}\, \mathbf{X}$: on obtient un dessein en combinant $\mathbf{X} \parr$ ヲ et ヲ. Ce qui revient à introduire une dimension subjective à travers le surmoi de $\mathbf{X}$: c'est le déréalisme.

Pour des raisons de consistance logique, les desseins qui habitent des types censément vides comme $\forall \mathbf{X}\, \mathbf{X}$ sont déclarés invisibles[8] et subséquemment recalés lors du test de vérité ! Rappelons qu'en présence de types vides, il n'y a que deux options pour la négation à la BHK : soit A est vide et $\neg A$ est réduit à la fonction vide, soit A est non vide et $\neg A$ est vide. Et donc les énoncés classiques, qui sont tous des négations, sont soit vides (faux) ou égaux à $\{\emptyset\}$ (vrais). Revanche de Tarski où nullité de la définition ? J'opte pour la seconde hypothèse, plus féconde intellectuellement.

3.2 Substitutions explicites

La notation $\mathbf{C}[\mathbf{D}]$ sous-entend que le comportement $\mathbf{C}$ « dépend » d'un paramètre $\mathbf{D}$ au moyen de la substitution de $\mathbf{D}$ pour la variable $\mathbf{X}$ dans $\mathbf{C} = \mathbf{C}[\mathbf{X}]$. Une telle substitution est habituellement opérée par un *Deus ex machina* tarskien, ce qui n'a pas de sens en ST : elle devient une opération interne, celle que les informaticiens ont qualifiée d'*explicite*, mauvaise terminologie mais idée splendide. Cette substitution explicite joue un rôle fondamental dans le traitement du quantificateur existentiel (9) : le critère de correction de la prémisse où la substitution tombait du Ciel sera simulé par celui de la conclusion, basé sur une substitution explicite.

Plutôt qu'une définition rendue illisible par une inflation d'indices, prenons un exemple simple : $\mathbf{C} = \mathbf{X} \parr \mathbf{X}$. Il nous faut quatre lieux, $\mathtt{x}_l(x)$ et $\mathtt{x}_r(x)$ pour les deux $\mathbf{X}$ ainsi que $\mathtt{w}_l(x)$ et $\mathtt{w}_r(x)$ pour « leurs » ヲ délocalisés. Le surmoi (partie « chiens ») associé à $\mathbf{C}$, paramétrique, est formé de deux lamelles : $[\![\, \mathtt{w}_l(x), \text{を}(x) \,]\!] + [\![\, \mathtt{w}_r(x) \,]\!]$ et $[\![\, \mathtt{w}_l(x) \,]\!] + [\![\, \mathtt{w}_r(x), \text{を}(x) \,]\!]$; je rappelle que を (« wo » en hiragana) est utilisé pour localiser la constante ヲ (« wo » en katakana). Ces lamelles correspondent aux deux positions de l'interrupteur du « $\parr$ », par exemple G : $[\![\, \mathtt{w}_l(x), \text{を}(x) \,]\!]$ relie la racine ヲ au « ヲ » du $\mathbf{X}$ gauche, $[\![\, \mathtt{w}_r(x) \,]\!]$ referme le « ヲ » du $\mathbf{X}$ droit sur lui-même.

Le surmoi « chien » de $\mathbf{D}$ est par contre localisé en $\mathtt{d}(x)$ et $\mathtt{w}_d(x)$; il nous est donné sous forme exponentiée, en utilisant donc une variable auxiliaire y qui sert à distinguer ses diverses métastases. La substitution explicite est

7. Parmi ces cerbères, le dessein réduit à $[\![\, \text{ヲ} \,]\!]$ qui ne sert à rien mais permet d'éviter que le gabarit associé soit vide.

8. Ils le sont en tout cas pour les sectateurs de l'« univalence ».

obtenue au moyen du dessein

$$[\![\, \mathtt{d}(x \cdot l), \mathtt{x}_l(x) \,]\!] + [\![\, \mathtt{w}_d(x \cdot l), \mathtt{w}_l(x) \,]\!] + [\![\, \mathtt{d}(x \cdot r), \mathtt{x}_r(x) \,]\!] + [\![\, \mathtt{w}_d(x \cdot r), \mathtt{w}_r(x) \,]\!]$$

Une coupure de ce dessein avec le surmoi $!(\mathbf{D} \parr \daleth)$ produira, modulo normalisation, le $\mathbf{C}[\mathbf{D}]$ attendu.

3.3 Quantification existentielle

Passons au cas existentiel, i.e., à la règle (cf. (9) :

$$\frac{\vdash \mathbf{C}[\mathbf{D}, \sim\mathbf{D}], \mathbf{\Gamma}}{\vdash \exists\mathbf{X}\ \mathbf{C}[\mathbf{X}, \sim\mathbf{X}], \mathbf{\Gamma}} \tag{11}$$

version « positivée » du $t\{T\}$ de $\mathbb{F}$, avec T dans le rôle de $\mathbf{D}$.

Il est nécessaire de remplacer $\mathbf{C}[\mathbf{X}, \sim\mathbf{X}]$ par $\mathbf{C}[\mathbf{X}, \sim\mathbf{X}]^\sharp$ qui n'est autre que l'envers de $(\sim\mathbf{C}[\sim\mathbf{X}, \mathbf{X}])^\flat$:

$$\mathbf{C}[\mathbf{X}, \sim\mathbf{X}]^\sharp := !(\mathbf{X} \parr \daleth) \otimes !(?\,\mathbf{X} \parr \daleth) \otimes !(\sim\mathbf{X} \parr \daleth) \otimes !(?\,\sim\mathbf{X} \parr \daleth) \otimes \mathbf{C}[\mathbf{X}, \sim\mathbf{X}]$$

Et de $\mathcal{D} \in \mathbf{C}[\mathbf{D}, \sim\mathbf{D}]$ par :

$$!(\mathbf{D} \parr \daleth) + !(?\,\mathbf{D} \parr \daleth) + !(\sim\mathbf{D} \parr \daleth) + !(?\,\sim\mathbf{D} \parr \daleth) + \mathcal{D}$$

où $!(\mathbf{D} \parr \daleth)$, etc. sont les gabarits correspondant aux chiens et cerbères de $\sim\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}$ – les $[\mathbf{D}] \vdash \daleth$ ou $[\sim\mathbf{D}] \vdash \daleth$ – préalablement exponentiés.

Le critère de correction pour $\exists\mathbf{X}\ \mathbf{C}[\mathbf{X}, \sim\mathbf{X}]$ consiste à relier les occurrences de $\mathbf{X}$ aux surmois idoines enfermés, comme le Génie dans sa bouteille, dans $!(\mathbf{D} \parr \daleth) + !(?\,\mathbf{D} \parr \daleth) + !(\sim\mathbf{D} \parr \daleth) + !(?\,\sim\mathbf{D} \parr \daleth)$. Ce qui induit une substitution explicite (section 3.2) qui permet de simuler les tests dans $\mathbf{C}[\mathbf{D}, \sim\mathbf{D}]$. Utilisant des métastastes de $!(\mathbf{D} \parr \daleth)$, ces choix de tests sont indépendants.

3.4 Le non-système $\mathbb{F}$

Passé le pont de l'usine, les fantômes – ceux de l'incomplétude – viennent à notre rencontre : si le cas existentiel jouit bien d'un critère de correction, ce dernier ne garantit pas pour autant la normalisation. Pour cela, il faudrait qu'un dessein (déréaliste) $\mathcal{D}$ passant les tests soit automatiquement dans

$$\bigcup_{\mathbf{D}} \mathbf{C}[\mathbf{D}, \sim\mathbf{D}]^\sharp \tag{12}$$

ou plutôt son biorthogonal, envers de $\forall\mathbf{X}\ {\sim}\mathbf{C}[{\sim}\mathbf{X},\mathbf{X}]$:

$$\sim\sim\bigcup_{\mathbf{D}}\mathbf{C}[\mathbf{D},{\sim}\mathbf{D}]^{\sharp} \tag{13}$$

Il est temps de refermer la boucle, celle que j'ai ouverte avec [1]. Le critère garantit en fait que le dessein est bien dans le système $\mathbb{F}$, ou plutôt ce qui en tient lieu puisqu'il n'y a plus de système : au second ordre, l'usine ne garantit plus l'usage. (13) est en fait l'équivalent de la bonne vieille *réductibilité*. Pour cela, j'avais élaboré une technique, les *candidats de réductibilité* (CR) de [1] ; ils deviennent ici des comportements $\mathfrak{D}, {\sim}\mathfrak{D}$. $\mathfrak{D}, {\sim}\mathfrak{D}$ « sont de bases » $[\mathbf{D}] \vdash \ni$ ou $[{\sim}\mathbf{D}] \vdash \ni$ quand ils « passent les tests » :

$$\mathfrak{D} \subset ([\mathbf{D}] \vdash \ni)^{\perp}, {\sim}\mathfrak{D} \subset ([\mathbf{D}] \vdash \ni)^{\perp}$$

Parmi les CR, $([\mathbf{D}] \vdash \ni)^{\perp}$ (qualifié de *canonique* dans [1]). Ainsi que les « vrais » comportements, par exemple ceux définis par (13) et (10). La démonstration, routinière, que

$$\mathcal{D} \in \bigcup_{\mathbf{D}}\mathbf{C}[\mathbf{D},{\sim}\mathbf{D}]^{\sharp}$$

reproduit celle donnée, il y a bien longtemps, pour $\mathbb{F}$; les variables libres de $\exists\mathbf{X}\ \mathbf{C}[\mathbf{X},{\sim}\mathbf{X}]$ reçoivent des « valeurs » sous forme de CR.

La ST oppose l'usage, monde des interactions réelles, à l'usine où elles ne sont que virtuelles et servent à étiqueter, autrement dit à « typer » i.e., à anticiper l'usage. Un typage tellement efficace au premier ordre qu'il garantit le bon usage de façon irréfragable, ce qu'on peut rendre par le terrifiant mot *apodictique*. Ce typage fonctionne toujours au second ordre mais que garantit-il au juste ? Que tout va bien si l'on restreint le cas existentiel à certains couples de surmois ${\sim}\mathbf{D} \parr \ni, ?{\sim}\mathbf{D} \parr \ni$ et $\mathbf{D} \parr \ni, ?\mathbf{D} \parr \ni$ « convenablement » choisis, i.e., pour lesquels un raisonnement basé sur les CR garantira le bon usage. Le jugement d'usine doit donc être validé de façon externe, autrement dit *épidictique* ; ce mot, qui réfère à la rhétorique de l'éloge, implique un point de vue périphérique.

Le typage à la Church du système $\mathbb{F}$ correspond à la dimension épidictique : dans $t\{T\}$, T tombe du Ciel. Mais il n'y a nul besoin de système – d'où le « non-système » – : il suffit de justifier l'utilisation des T (i.e., les parties gauches de $\mathbf{C}[\mathbf{D},{\sim}\mathbf{D}]^{\sharp}$) au moyen d'un argument externe, ensembliste sur les CR qui ne relève plus vraiment de la Logique. D'où des doutes légitimes – le remplacement d'« apo » par « épi » –, ce qui ne veut pas dire raisonnables ou féconds : on se mettrait à tourner en rond en tentant de creuser plus profond.

A Objet et Sujet

Au cœur de la Logique, la relation entre l'Objet et le Sujet, envisagée ici du strict point de vue normatif.

A.1 Version essentialiste

Tout tombe du Ciel, paraît-il. C'est ainsi que la Vérité serait la qualité de ce qui est vrai (Tarski) et l'Égalité la qualité de ceux qui sont égaux (Leibniz). Les propositions logiques vivraient dans un ailleurs indéfini et se manifesteraient à travers des *occurrences*, qui ne sont que la forme écrite et contingente de cette référence idéale ; un peu comme les apparitions de la Vierge.

Une conception illustrée, en particulier, par la Théorie des Catégories et son « Une place pour chaque chose et chaque chose à sa place ». Il y a deux sexes, les sources devant s'accoupler avec des buts, pas de « gays » ! De plus, le mariage doit respecter les castes, sinon souillure. On peut cependant changer de sexe : un *morphisme* de source A et de but B étant transposé en un morphisme de source $\sim B$ et de but $\sim A$. L'identité de source A et de but A se transpose ainsi en identité de source $\sim A$ et de but $\sim A$. Dans le monde sublunaire de la ST, les deux A reçoivent des localisations distinctes et le morphisme se réduit à une rallonge : mâle du côté de A-source, femelle du côté de A-but si A se lit, disons, `220V` ; sa transposée, qui correspond à la même rallonge, va de A-but, vu comme $\sim A$-source à A-source, vu comme $\sim A$-but : au lieu de raccorder l'appareil à la prise murale, elle raccorde la prise murale sur l'appareil, ce qui revient strictement au même, sauf pour les Catégories qui tiennent à cette distinction superfétatoire qui rappelle celle entre tasses pour gauchers et tasses pour droitiers. L'esprit de caste qui régente les Catégories stipule par ailleurs qu'une rallonge `220V` est fondamentalement distincte d'une rallonge `110V` ; on comprend mieux l'obstination d'`Apple` à multiplier à l'infini la forme de ses prises !

Je continue avec un exemple très simple, celui de l'*union* $X \cup Y$, une opération commutative et associative avec pour élément neutre $\emptyset$ qui souffre cependant d'un défaut rédhibitoire : elle se comporte mal par rapport aux isomorphismes. Par exemple $X \simeq X', X''$ n'implique pas $X \cup X \simeq X' \cup X''$. Les Catégories la remplacent donc par la *somme* $X + Y =: X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$ qui est compatible avec les isomorphismes, e.g., $X + X \simeq X' + X''$. Mais perd la commutativité, l'associativité et l'élément neutre dont ne subsistent que des ersatz sous forme de laborieux isomorphismes « canoniques ». Sans être expert ès droit canon, j'ai cru comprendre que celui entre $X + (Y + Z)$ et $(X + Y) + Z$ démarque l'égalité $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$: pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué ?

Pour résumer la discussion : il n'est pas question de remettre en cause l'intérêt de $X+Y$ et sa supériorité sur $X \cup Y$, seulement son *antériorité*. La construction de $X+Y$ incorpore des contraintes normatives qui la rendent opaque, contrairement à $X \cup Y$, qui en est le prototype sauvage, non domestiqué. De même en Logique, le connecteur $\otimes$ est *littéralement* commutatif et associatif : les propositions étant localisées quelque part, $A \otimes B$, qui se contente de les juxtaposer, ne diffère pas de $B \otimes A$. Ce n'est que modulo *délocalisation*, opération logiquement nécessaire mais pas primitive, que les deux se mettent à différer. Et si l'on se rappelle qu'à l'origine ils étaient identiques, on évite une indigestion de pentagrammes ! Incidemment, remarquons que $\otimes$ n'a pas d'élément neutre au premier ordre [9] : la juxtaposition demanderait qu'il soit vide, ce qui n'a pas de sens logique, voir l'échec des réseaux dans ce cas. La Théorie des Catégories en réclame cependant un, sorte de phlogistique ou de Lieutenant Kijé créé par la *doxa* qui obscurcit le débat aux dépens de $\exists$ et $\forall$, atomes aux propriétés étonnantes mais... sans statut catégorique.

A.2 Version existentialiste

La version existentialiste place l'Objet au centre, les diverses opérations normatives étant gérées interactivement. Pour comprendre le progrès par rapport à l'essentialisme béat, considérons le *sous-typage* $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$. En ST, un type (comportement) se définit comme l'orthogonal d'un ensemble fini, son surmoi. Qui peut le plus peut le moins : en remplaçant le surmoi de $\mathbf{A}$ par un surmoi plus laxiste – i.e., , en oubliant des tests –, on obtient un « surtype » $\mathbf{B}$ de $\mathbf{A}$. C'est ainsi que :

$$\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \parr \mathbf{C}) \quad \subset \quad (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \parr \mathbf{C} \tag{14}$$

mais aussi, en gardant à « $\otimes$ » son sens pré-catégorique, non délocalisé :

$$\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \parr \mathbf{C}) \quad \subset \quad (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}) \parr \mathbf{B} \tag{15}$$

avec une remarquable égalité :

$$\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \parr \mathbf{C}) \quad = \quad (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \parr \mathbf{C} \cap (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}) \parr \mathbf{B} \tag{16}$$

Les types intersections, contribution remarquable de l'informatique à la Logique, trouvent un statut grâce à la ST. Qu'on chercherait en vain dans le Paradis des Catégories où, tout étant à isomorphisme près, inclusion, union et intersection n'ont strictement aucun sens.

9. On peut le définir, mais au second ordre, au moyen de $\mathbf{1} := \forall \mathbf{X}\, \mathbf{X} \multimap \mathbf{X}$, un *Janus bifrons* d'envers $\bot := \exists \mathbf{X}\, \mathbf{X} \otimes \sim\mathbf{X}$; il ne s'agit donc pas d'un atome.

Sur l'intersection Le rôle de l'intersection est difficile à comprendre à cause des préjugés sémantiques : on est tenté de la réduire à une sorte de conjonction, ce qui conduit à des contresens absolus. Or la partie droite de (16) n'est pas une conjonction car elle ne fonctionne plus si l'on délocalise $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$.

De même, la réduction d'usine de la quantification universelle aux trois « valeurs » $\mathbf{P}_1 = \ni, \mathbf{P}_2 = \ni \otimes \ni$ et $\mathbf{P}_3 = \ni \parr \ni$ (section 1.6) ne doit pas être lue comme l'équivalence $\forall \mathbf{X}\, \mathbf{A}[\mathbf{X}] \equiv \mathbf{A}[\mathbf{P_1}] \,\&\, \mathbf{A}[\mathbf{P_2}] \,\&\, \mathbf{A}[\mathbf{P_3}]$. Pour comprendre le rôle des $\mathbf{P}_i$, revenons aux bons vieux réseaux où les variables ne recevaient aucune valeur. Ils souffraient d'un défaut rédhibitoire, les « axiomes » d'identité, liens tombés du Ciel qui s'écrivaient $[\![\, \mathbf{X}, {\sim}\mathbf{X} \,]\!]$, notation – totalement incorrecte mais lisible – pour une étoile liant une « occurrence » de $\mathbf{X}$ à une occurence de son envers. Les valeurs $\mathbf{P}_i$ servent à *justifier* la restriction à ces étoiles particulières aux dépens des, disons, $[\![\, \mathbf{X} \,]\!]$ ou $[\![\, \mathbf{X}, \mathbf{Y} \,]\!]$, voire $[\![\, \mathbf{X}, {\sim}\mathbf{X}, \mathbf{Y} \,]\!]$.

1. $\mathbf{X} = \mathbf{P}_3$ interdit $[\![\, \mathbf{X} \,]\!]$ (défaut de connexité).
2. $\mathbf{X} = \mathbf{Y} = \mathbf{P}_2$ interdit $[\![\, \mathbf{X}, \mathbf{Y} \,]\!]$ et $[\![\, \mathbf{X}, {\sim}\mathbf{X}, \mathbf{Y} \,]\!]$ (défaut d'acyclicité).

Ceci dit, si $\mathbf{P_1}, \mathbf{P_2}, \mathbf{P_3}$ sont de support $s[x]$ et si $\mathbf{P_2}$ (resp. $\mathbf{P_3}$) utilise respectivement le(s) chien(s) $[\![\, s[x \cdot g], s[x \cdot d], \text{を}(x) \,]\!]$ (resp. $[\![\, s[x \cdot g], \text{を}(x) \,]\!] + [\![\, s[x \cdot d] \,]\!]$ et $[\![\, s[x \cdot g] \,]\!] + [\![\, s[x \cdot d], \text{を}(x) \,]\!]$), la vérification ci-dessus ne sollicite que les bribes de $\mathbf{X}$ et ${\sim}\mathbf{X}$ situées en $s[x \cdot g]$ et $s[x \cdot d]$ et on ne saurait exclure une blague : un lien axiome réduit à une somme de bribes $[\![\, \mathbf{X}, {\sim}\mathbf{X} \,]\!]_g + [\![\, \mathbf{X}, {\sim}\mathbf{X} \,]\!]_d$. Comme on ne peut pas rajouter des positions correspondant à tous les couples (g', d') possibles, on introduit la valeur auto-duale $\mathbf{P_1}$ (unique chien $[\![\, s[x], \text{を}(x) \,]\!]$) : le test du gag $[\![\, \mathbf{X}, {\sim}\mathbf{X} \,]\!]_g + [\![\, \mathbf{X}, {\sim}\mathbf{X} \,]\!]_d$ ne donnerait plus la valeur $[\![\, \text{を}(x) \,]\!]$ mais $[\![\, \text{を}(x \cdot g) \,]\!] + [\![\, \text{を}(x \cdot g) \,]\!]$.

Le test est réduit à trois valeurs à cause de la locativité : le support de $\mathbf{P_2}$ et de son envers $\mathbf{P_3}$ est un *sous-lieu* de celui de $\mathbf{P_1}$!

A.3 Version déréaliste

La version existentialiste postule l'homogénéité entre l'objet et sa norme, vue comme un ensemble fini de « contre-objets » (gardiens) ; mais il ne cohabitent pas, les gardiens, « invisibles », restant dans leur niche. Ce paradigme se brise au second ordre sur l'incomplétude, i.e., l'absence de surmoi fini. Le dessein déréaliste amène avec lui son surmoi de poche garantissant qu'il est « convenablement » typé. Une sorte de logiciel embarqué qui peut tout à fait être mensonger – on pense au scandale Volkswagen – et qui ne peut être validé que de façon externe, *épidictique*. Il n'est pas question de chercher des limites à cette épidictique qui est au cœur-même de l'incomplétude.

La forme des objets s'en ressent donc : au niveau natif, ils comportent une partie subjective, les *gabarits*, sorte de normes sans valeur apodictique : on peut les utiliser dans des tests mais sans garantie. Cette épidictique, c'est un peu le λ-calcul pur version Church. Elle tombe du Ciel sans être une régression vers l'essentialisme car les normes ne se dissimulent plus derrière des diktats incompréhensibles : les gabarits, interactifs, sont en accès libre. Le remplacement du mot « axiomatique » par « épidictique » souligne l'aspect ouvert et interactif de cette approche : fini les systèmes et leurs bulles opaques.

Références

[1] J.-Y. Girard. **Une extension de l'interprétation fonctionnelle de Gödel à l'analyse et son application à l'élimination des coupures dans l'analyse et la théorie des types**. In Fenstad, editor, *Proceedings of the* 2nd *Scandinavian Logic Symposium*, pages 63 – 92, Amsterdam, 1971. North-Holland.

[2] J.-Y. Girard. **Linear logic**. *Theoretical Computer Science*, 50 :1 – 102, 1987.

[3] J.-Y. Girard. **Transcendental syntax 1 : deterministic case**. *Mathematical Structures in Computer Science*, pages 1–23, 2015. *Computing with lambda-terms. A special issue dedicated to Corrado Böhm for his 90th birthday.*

[4] J.-Y. Girard. **Transcendental syntax 3 : equality**. *Logical Methods in Computer Science*, 2016. *Special issue dedicated to Pierre-Louis Curien for his 60th birthday.*

[5] J.-Y. Girard. **Transcendental syntax 4 : logic without systems**. Technical report, http ://girard.perso.math.cnrs.fr/trsy4.pdf, 2020.

[6] J.-Y. Girard. **∀, clef de voûte logique**. Technical report, http ://girard.perso.math.cnrs.fr/wo.pdf, 2024.

VITAM IMPENDERE LOGICÆ