La syntaxe transcendantale, manifeste

Jean-Yves Girard

26 mai 2011

La prison appelée la vie enferme toutes les prisons.
Jacques Audiberti, *Le retour du divin*, 1943.

Plutôt que d'actualiser une notice de titres et travaux devenue illisible et en partie obsolète, je me suis livré à l'exercice du *bilan*, en mettant l'accent sur mes derniers résultats et leur dimension programmatique : le chantier de la *syntaxe transcendantale*, ouvert en 1986 par mon *théorème de séquentialisation.*

Parmi les modèles de l'arithmétique, un seul possède un nom : il est appelé *standard*... pour cette raison. Les autres ne sont que des bouche-trous dont le statut est résumé par ce mot : *incomplétude.* On peut rallonger la sauce au moyen de « modèles à moutarde » ou, plus sérieusement, en raffinant le paradigme de l'évaluation *aléthique* en évaluation *fonctionnelle*, voire *interactive*... l'incomplétude demeure. C'est l'idée-même d'évaluation, i.e., de *sémantique*, qui est en cause : on sait, en effet, depuis les paradoxes du siècle passé, que l'évaluation suppose un cadre *préformaté.* L'incomplétude correspond à l'impossibilité de sortir, non pas d'un format particulier, mais de *tout* format. Pour dépasser l'incomplétude, on est amené à remplacer le cadre *évaluatif* par un cadre *déontique* qui gère obligations et interdictions, i.e., la *normativité* du langage ; il ne s'agit pas d'un regard *externe*, mais d'une *interaction* qui ne se base plus sur la *réfutation*, mais sur la *récusation.* L'espace des interdits est suffisamment vaste pour fournir les « modèles » qu'aucune sémantique ne saurait construire.

Plutôt que d'*évaluer* le langage, on s'interroge alors sur ses *conditions de possibilité* : on produit ainsi une *syntaxe transcendantale* qui rend compte de l'élimination des coupures, de la normalisation forte, des propriétés de Church-Rosser, de la disjonction, de la sous-formule, etc. qu'aucun cadre sémantique n'a jamais su *justifier.* C'est ainsi que la *Géométrie de l'Interaction* (GdI), explique les principales propriétés de la syntaxe tout en jetant un doute salutaire sur certaines idées bien établies. Formulée dans les algèbres de von Neumann, elle est basée sur la relation $\mathfrak{a} \in \mathbf{A}$ entre un *épistate* et une *dichologie*, forme transcendantale de l'antique relation sujet/prédicat ; il ne s'agit pas d'une brosse à reluire à la Kripke, puisqu'elle refuse le *calcul des prédicats* — extension bâtarde du calcul propositionnel basée sur une notion métaphysique de *terme* : elle se trouve ainsi en accord avec la *Théorie des Types* de Martin-Löf, qui remplace les termes par les *preuves.* Avec une nouveauté radicale : les *épistates* sont plus qu'une forme transcendantale des preuves : ils contiennent les *artefacts* déontiques, « chiens de garde » de la normativité — des éléments « non standards », mais effectifs. En particulier, les énoncés Π^0_1, Roche Tarpéïenne du constructivisme, deviennent plus accessibles.

Le dernier état publié de la GdI se trouve dans [Girard, 2011a]. Le texte qui suit présente des améliorations majeures, en particulier :

1. Le remplacement des opérateurs par leur graphe dans l'esprit des opérateurs non bornés. Ce qui permet une dualité plus simple et donne un statut transcendantal à la *normalisation forte*.
2. L'abandon de la restriction $\alpha(1_{\mathcal{A}}) \neq 0$ sur les diatraces induit une simplification essentielle : la logique *parfaite* n'est plus *polarisée*.
3. L'introduction de sommes et produits dépendants donne un statut transcendantal à une synthèse entre Logique Linéaire et Théorie des Types : fondamentalement $\Pi x \in A \; B(x) \quad = \quad \Pi y \in \sim B \; \sim A(y)$.

1 L'architecture logique

1.1 La syntaxe transcendantale

La *syntaxe transcendantale* substitue à la *sémantique* — i.e., à la métaphysique du « réel » — l'étude des *conditions de possibilité* du langage logique.

Logique et philosophie Il me faut, bizarrement, justifier l'ancrage philosophique de ce texte. Un préjugé tenace tient, en effet, à opposer des techniciens, astucieux mais frustes, à des penseurs d'autant plus profonds que leur pendule retarde. La logique qui — science réflexive par excellence — se situe à l'interface des mathématiques et de la philosophie, a beaucoup pâti de ce Yalta épistémologique. C'est ainsi que, n'ayant jamais trouvé d'interlocuteur compétent dans ce désert où le vent coulis de la philosophie analytique susurre « sémantique, sémantique », je me suis rabattu sur la polémique, par exemple[1] [Ringard, 1990]. Avant d'être amené sur le tard (2001) à cofonder un groupe de réflexion pluridisciplinaire : **LIGC**[2] qui m'a permis de comprendre que — débarrassée de son arrogante incompétence — le rôle de la philosophie est d'*éclairer* le chemin. Ainsi, trouve-t-on chez Kant, Hegel, Wittgenstein des intuitions extraordinaires et irremplaçables. Mais qui ne prennent guère sens qu'*a posteriori* : plutôt qu'un phare, la philosophie est un *catadioptre*. Faute de tranchant technique, elle se révèle, en effet, incapable de *tracer* la voie ; d'ailleurs, sa posture spéculative conduit aux affligeantes « logiques » philosophiques, dont on ne sait jamais s'il leur manque une roue ou si elles en ont une de trop.

L'évacuation du sujet Il était difficile de tirer la leçon de l'échec des logiques philosophiques : leur méthodologie inepte répondait, après tout, à une thématique sclérosée. La situation a changé dans les années 1980 : on a pu observer *in vivo* la création et l'échec de nombreuses logiques à motivation *informatique*, par exemple des « logiques » non monotones. Et découvrir que toutes ces atrocités logiques — les anciennes comme les nouvelles — résultent d'un même positionnement, l'*évacuation du sujet*. La philosophie analytique dominante postule, en effet, l'*objectivité* et l'*inéluctabilité* de la connaissance : la logique — activité cognitive par excellence — est ainsi privée de sujet ; étonnant, non ?

[1] *Plantez un fanion et regardez qui salue* : les docteurs ès modèles de Kripke se sont senti visés, alors qu'ils ne l'étaient nullement. On ne naît pas *montre à moutarde*, on le devient.

[2] `http://www.ligc.fr/`

L'ordinateur comme sujet L'ordinateur se positionne comme *sujet*, puisque machine qui interprète son environnement ; peut-on aussi évacuer ce sujet-là ? La question se pose, par exemple, pour les *bases de données* qui n'obéissent pas à l'axiomatique ordinaire : la banque qui vous dit *instantanément* « Mme Worth n'a pas de compte chez nous » n'a pas de fichier de ses *non-clients*. Cette remarque — tout à fait géniale — a été *bousillée* par l'objectivisation, i.e., la sémantique : une hypothétique *valeur de vérité* qui dirait si Mme Worth est ou non cliente… *indépendamment de tout protocole de recherche*. Comme elle peut être cliente indirecte — cas d'une succursale —, sous son nom de jeune fille, voire un numéro en Suisse — gare alors au secret bancaire —, la réponse risque de… tarder. De même, la présence d'un fichier sur un ordinateur n'a pas de sens objectif : on peut se tromper d'extension, le fichier peut être invisible ou, pire, « effacé », i.e., en *squat*, auquel cas des logiciels policiers peuvent — à grand'peine — en récupérer des fragments ; mais s'agit-il encore du même fichier ? Ces questions n'ont vraiment de sens que lorsqu'on définit des critères précis, e.g., une *procédure* de recherche ; et la réponse « non » n'arrive que lorsque l'on atteint un *signe* de fin de liste. Ignorer ce symbole[3] qui — purement procédural — n'a rien d'objectif, conduit au désastre des logiques non monotones « Si je ne peux pas prouver A, je conclus $\neg A$ » — règle impraticable du fait de l'*indécidabilité* : ces « logiques » sont *problématiques*, euphémisme du milieu pour « complètement foireuses ». Les réponses de l'ordinateur ne réfèrent, en fait, qu'à lui-même, pas à une « sémantique » tombée du ciel ; l'ordinateur n'est pas plus dispensateur de vérité que la mal nommée *Pravda* — ou d'impertinence que le tout aussi mal nommé *Figaro*. D'ailleurs, tous les omnicients roquets s'acharnent contre *Internet* au nom de « la » vérité.

La prégnance de la syntaxe La logique ne peut jamais être que de la syntaxe. L'expliquer comme un démarquage de la réalité est tout simplement absurde : cette « réalité » — qui est en fait un autre langage — n'est pas plus réelle que le Paradis des Chrétiens. De même, on ne connaît le monde que par ses cinq sens ; à l'empirisme qui conduirait à un monde amorphe, Kant répond au moyen du *sujet transcendantal* qui rend compte de la *structuration* de la connaissance. La prégnance de la syntaxe ne se traduit pas par une amorphie de la logique, qui est en effet structurée, principalement autour de l'*élimination des coupures* de [Gentzen, 1934] ; à l'infantilisme langage/objet — ou sens/dénotation — se substitue implicite/explicite, ou encore avec/sans coupures. Sur le modèle du sujet transcendantal, je propose donc une *syntaxe transcendantale*. C'est, à mon avis, la question logique fondamentale. Pourquoi m'a-t-il m'a fallu quarante ans pour la formuler ? Réponse dans les paragraphes précédents.

Séparation Une syntaxe transcendantale est, quelque part, un langage *idéalisé*, i.e., débarrassé de ses scories bureaucratiques — tout comme le sujet transcendantal est dégagé des contingences physiologiques ou psychologiques. Ceci suppose un processus de *séparation* : on identifie les éléments syntaxiques — propositions, preuves — qui ne diffèrent que par des détails non signifiants. En quelque sorte, on *quotiente* par la notion d'*isomorphisme*. Mais dissimule un piège redoutable : « isomorphisme » suppose que nous connaissions déjà les *formes* pertinentes, alors que le problème est, précisément, de *déterminer* ces

[3]Problème similaire avec la *négation par échec* dans PROLOG, voir 1.2.5 *infra*.

formes. Ainsi, peut-on penser que la distinction entre $A \wedge B$ et $B \wedge A$ n'est qu'une contingence bureaucratique ; et aussi que la distinction entre les deux *occurrences* de A dans $A \wedge A$ n'est qu'une facilité *descriptive*. Ces deux identifications sont à peu près incompatibles, mais on ne tranchera pas entre elles par une démarche *spéculative*, par exemple en relisant les « bons » auteurs : il nous faut une structuration *technique*, voir section 2 *infra*. Dans ce cas précis, la *locativité*, introduite dans [Girard, 2001], ne fera pas de différence entre $A \wedge B$ et $B \wedge A$, mais écrira $A \wedge A$ sous la forme $A' \wedge A"$ d'une conjonction entre copies *délocalisées*. Ce qui fait intervenir et le *locus* — l'endroit où est écrit le texte — et la forme, i.e., l'oubli du *locus* : on peut s'en abstraire au niveau -2, « spirituel », mais pas au niveau -4, « locatif » (voir *infra*).

Questions de normativité La déduction naturelle, ébauchée par Gentzen, mais réellemnt due à [Prawitz, 1965], se présente — pour la logique intuitionniste — comme un « quotient » du calcul des séquents. Pour les connecteurs *négatifs* $\Rightarrow, \wedge, \forall$, les aspects *normatifs* y sont d'une discrétion absolue : en effet, une démonstration s'écrit comme un arbre dont la racine contient l'unique conclusion ; la dernière *règle* utilisée est le point de départ d'une vérification récursive de la correction syntaxique. La déduction naturelle est bien moins pimpante avec les connecteurs *positifs* qui s'accommoderaient mieux d'arbres renversés, d'où la restriction de fait au *fragment négatif*. Avec la *logique linéaire*, il n'est plus possible de négliger les connecteurs positifs qui, comme $\otimes$, jouent un rôle essentiel. Le conflit entre les deux styles d'arbre — conclusion en bas ou en haut — est résolu à l'aide de *conclusions multiples*, aux dépens de toute normativité *a priori* : certaines conclusions sont des « dernières règles », mais lesquelles ? D'où l'introduction, pour la première fois en logique, d'une normativité syntaxique *a posteriori* : le critère de correction des réseaux de [Girard, 1987a] fait intervenir des *interrupteurs*. La découverte de l'homogénéité de ces interrupteurs aux réseaux — ils forment des espèces de démonstrations de la négation — m'a permis d'entrevoir, pour la première fois, la fin du paradigme sémantique : ces « démonstrations de l'ombre » n'ont qu'une valeur *normative*, en aucune façon *évaluative* ; elles incitent à repenser l'architecture logique.

Complétion Au-delà de l'*idéalisation* — résumée par la séparation —, les *conditions de possibilité* sont ainsi à chercher dans une *complétion* du langage au moyen d'éléments « invisibles[4] » : d'autres formules logiques, d'autres preuves et ces *artefacts* morphologiquement homogènes que sont les *tests* normatifs. Par analogie avec la topologie, nous avons affaire à un double processus de *séparation/complétion*.

Des conditions suffisantes *Conditions de possibilité* signifie *conditions suffisantes* ; il faut résister à la tentation qui voudrait en faire des conditions *nécessaires*. Cette recherche d'une *apodictique*, analogue à la Pierre Philosophale des alchimistes, mène, tôt ou tard, à une aporie, voir *infra*, 1.3.3. Et j'en suis d'ailleurs à ma troisième ou quatrième syntaxe transcendantale, Sisyphe sur le métier remettant son ouvrage : récemment, en proposant une explication transcendantale de la *normalisation forte*. Sur la nécessité, voir 2.5 *infra*.

[4] L'informatique nous apprend l'importance des fichiers invisibles, genre `.mailrc`, etc., que l'utilisateur ne voit pas, mais qui font tout fonctionner.

1.2 Les enfers

Une aporie ? Le problème pourrait tourner à l'aporie, comme la définition de la beauté : entre le Charybde de la bureaucratie intégrale — la syntaxe impure et molle — et le Scylla de la réduction *aléthique* — l'identification bête et méchante à la vérité — on pourrait ne jamais trouver de niveau d'abstraction stable. La bureaucratie intégrale est ce qui sous-tend les approches du style « codage », par exemple, la *réalisabilité* de Kleene : tout ce qui peut prétendre au satut de syntaxe est pris en compte, interdisant ainsi tout espoir de structuration. À l'opposé, la réduction de la syntaxe à la vérité donnerait du syllogisme la lecture « de `vrai` et `vrai` on conclut `vrai` ». Ces deux lectures inadéquates (le texte *verbatim* et la valeur `vrai`) sont réunies dans le diptyque Frégéen sens/dénotation. Est-il possible de se positionner entre la *poubelle* du codage et le *décervelage* sémantique ?

Implicite vs. explicite La caractéristique de la syntaxe, c'est l'absence d'accès immédiat : on *verbalise* ce qui nous échappe, sous forme de papier-monnaie ou de raisonnement — voire de poésie, comme Maurice Scève dans sa *Délie*. En logique, l'*élimination des coupures* de Gentzen décrit exactement, sur un mode syntaxique, la coexistence entre l'*implicite* et l'*explicite*, ce qui est nettement plus convaincant que l'opposition entre *sens* et *dénotation*. La syntaxe transcendantale va donc s'établir au niveau où nous pourrons gérer naturellement l'*ambivalence* implicite/explicite. Ce qui amène à raffiner le paradigme fondationnel en quatre *enfers* (= sous-sols, mondes inférieurs) $-1, -2, -3, -4$, dont seuls les derniers, qui ne postulent pas la *transparence*, i.e., l'identité entre implicite et explicite, répondent à la question. Les sous-sols fondationnels ont été introduits dans mon livre [Girard, 2007], au nombre de trois ; il m'a semblé plus conforme à la structure logique de subdiviser mon ancien -3 en -3 (évaluatif, *essentialiste*) et -4 (déontique, *existentialiste*) : la principale ligne de fracture logique étant, en effet, le départ essence/existence.

1.2.1 Le niveau aléthique, -1

La sémantique D'après $\acute{\alpha}\lambda\acute{\eta}\theta\epsilon\iota\alpha$ (= vérité), ce niveau ne s'intéresse qu'à ce qui est prouvable, i.e., la cohérence et une de ses conditions de possibilité, la *vérité*. C'est le niveau *sémantique* proprement dit.

Cohérence Au siècle dernier, l'explication la plus convaincante — quoique fautive — de la logique est due à [Hilbert, 1926]. Cette réflexion du langage sur lui-même est fondée sur la *cohérence* ; éliminant toute référence à des notions douteuses comme la *vérité*, elle aurait conduit à une forme d'apodictique. Le second théorème d'incomplétude [Gödel, 1931] a réfuté cette idée — intéressante, mais qui pêchait par simplisme, plus précisément par *scientisme*. Plus récemment, les « logiques » paraconsistantes ont prétendu contourner l'obstacle par une cohérence *a priori*, effet collatéral d'un raisonnement à la tête du client : le chèque de Bernard Madoff « pas vu, pas pris » ; la « Pierre Philosophale » apodictique se trouverait-elle aux Îles Caïmans ?

Le pléonasme Face à l'échec du *Programme de Hilbert*, des visions encore plus simplistes se sont imposées. Ainsi, l'idée Frégéenne — relayée par Russell — que le langage décrit le réel et qui conduit à un désastre intellectuel. La définition tarskienne de la vérité comme *caractérisant ce qui est vrai* fait irrésistiblement penser à la *vertu dormitive de l'opium.* Ce pléonasme est l'indice d'un *point aveugle* ; il ne fonctionne qu'en liaison avec l'élimination des coupures : internalisant *localement* la vérité par $V(\ulcorner A[\bar{n}] \urcorner) \Leftrightarrow A[n]$, on obtient le *schéma de réflexion*[5] de [Kreisel and Levy, 1968] $\forall n\, Thm_{\mathcal{T}}(\ulcorner A[\bar{n}] \urcorner) \Rightarrow \forall n\, A[n]$. L'élimination des coupures, qui permet de se contenter d'une vérité *locale*, est en fait la « vraie » vérité, tout le reste appartient à l'imaginaire vériste[6].

L'incomplétude Le premier théorème d'incomplétude [Gödel, 1931] montre les limites de l'approche « vériste » : l'arithmétique est *incomplète.* Ce que des commentateurs superficiels ont interprété par un manque d'axiomes ; pourtant, personne ne parle d'incomplétude pour la théorie des anneaux : c'est qu'il y a des modèles pour ou contre tout axiome supplémentaire. Dans le cas de l'arithmétique, il n'y a qu'un seul modèle — que l'on appelle « standard » pour cette raison — et des machins, qualifiés de « non standard » pour la même raison. Autrement dit, le niveau -1 ne fournit *pas assez* de modèles ; il faudra descendre au niveau -4 pour touver des éléments « non standards » intéressants.

Frege Frege, figure emblématique de la *philosophie analytique*, opposait *sens* et *dénotation*, ce qui se décline, suivant les milieux, en syntaxe/sémantique ou encore langage/modèle. Ceci est d'une pauvreté affligeante : prenez votre théorème préféré ; sa dénotation est `vrai` et son sens, c'est... le texte *verbatim.* Autrement dit, le langage décrit une réalité externe et intangible, le monde *sémantique.* Ce monde transparent de référence réduit l'opacité de la connaissance à une espèce de friction que l'on pourrait minimiser avec des lubrifiants, par exemple des ordinateurs très puissants... en contradiction avec l'incomplétude qui réfute toute idée de transparence. L'origine de cette pensée de Jivaro est à chercher dans un rejet de l'idéalisme allemand, Kant et Hegel en particulier.

De Ptolémée à Kripke Cette naïveté est à rapprocher de la science du Moyen-Âge : au *sens* « position de Saturne », Ptolémée associait sa *dénotation*, un point sur un épicycle ; mais ce petit cercle qui tournait autour du grand cercle de l'écliptique n'était que la parallaxe induite par le mouvement de l'observateur, du sujet. De même, le chosisme analytique *expulse* le sujet au nom d'un fétichisme du réel, ce qui induit une *métastase de l'objet* qui se démultiplie à l'infini dans les « univers parallèles » des *modèles de Kripke*, ces épicycles du XX$^{\text{e}}$siècle, qui prétendent traiter les subtilités cognitives à coup de modèles, de valeurs de vérité biscornues. C'est ainsi que d'aucuns prétendent interpréter les *contrefactuelles* — dont l'exemple typique est « si les cons volaient » — au moyen d'univers parallèles ou ils sont, nul doute, chefs d'escadrille. Et, pour éviter de dire que l'anse de la tasse est à gauche ou à droite en fonction du *point de vue* adopté, on produira un modèle de Kripke à deux univers parallèles — anse à gauche vs. anse à droite — : comme toujours, l'objectivisme mène à la pire métaphysique, au délire subjectiviste. Comme si l'on pouvait parler de l'évaluation d'un énoncé sans référer à la *construction*, la mise en scène, qui fait

[5]Pour tout sous-système finiment axiomatisé $\mathcal{T}$ de l'arithmétique.

[6]En logique intuitionniste, c'est le pléonasme qui assure le schéma de réflexion ; et non pas les *modèles de Kripke*, à côté de la plaque comme d'habitude.

de l'un langage, l'autre modèle avant même de penser à interpréter l'un dans l'autre. La prise de conscience de cette mise en scène est l'origine du *constructivisme* — terme qui a malheureusement pris une lourde connotation normative, celle de mathématiques *kasher*.

Un manque de tranchant Du fait du manque de tranchant des outils *sémantiques*, toute tentative de réflexion qui resterait au niveau -1 est condamnée à l'échec ; dès le niveau -2, nous serons débarrassés des principales indignités du niveau -1, logiques philosophiques et/ou modèles à moutarde.

1.2.2 Le niveau fonctionnel, -2

Curry-Howard Ce niveau est celui de l'interprétation fonctionnelle, ou encore catégorique. Les démonstrations deviennent des *morphismes* : c'est ce que l'on appelle le paradigme de Curry-Howard [Howard, 1980].

La sorbet sémantique D'aucuns veulent y voir un autre type de sémantique, dite *catégorique*, qu'ils raffineront en *sémantique des jeux* au niveau -3. Dieu merci, les logiciens ne sont pas cuisiniers, car on aurait droit au plat unique, disons au sorbet : aux poires au niveau -1, il admet de la vanille et du lait au niveau -2, pour devenir sorbet chaud à la tortue au niveau -3. Personne n'ayant encore taxé le niveau -4 (la grande création de ma vie) de sémantique de je-ne-sais-trop-quoi, nous attendons encore le sorbet de petit salé aux lentilles ! Derrière l'effet de *novlangue* imposé par la philosophie analytique — qui cherche à préserver coûte que coûte un certain infantilisme objet/sujet —, se cache l'*essentialisme* commun aux trois enfers supérieurs : ils sont *normatifs*, car ils présupposent une *forme* — modèle, structure catégorique, règle du jeu. À l'intérieur de ce cadre préformaté, -1 parle de prouvabilité, -2 de preuves, -3 de leur dynamique d'explicitation.

Le retour du sujet Brouwer, fondateur de l'*intuitionnisme*, pêche parfois par subjectivisme. Ce n'est pas le cas du niveau fonctionnel qui se contente de s'opposer à la castration analytique en donnant un statut au *sujet* : alors que le niveau -1 considère la démonstration comme un processus de connaissance objectif et inéluctable, le niveau -2 différencie, tout comme les mathématiciens d'ailleurs, plusieurs démonstrations d'un même énoncé. Dans le cas d'une implication $A \Rightarrow B$, ces diverses démonstrations sont représentées par les *morphismes* de A dans B. Le syllogisme *Barbara* est « expliqué » au niveau -1 par la transitivité de l'inclusion — si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$ —, ce qui est douteux : n'est-ce pas plutôt *Barbara* qui explique la transitivité ? Le niveau -2 interprète *Barbara* de façon autrement convaincante par la *composition* des morphismes : à partir de $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ et $g \in \mathrm{Mor}(B, C)$, on construit $g \circ f \in \mathrm{Mor}(A, C)$. On voit que la « sémantique » catégorique est basée sur une cohabitation subtile entre objet — aux sens philosophique et catégorique — et sujet, dont le manque d'objectivité est reflété par la *variabilité* des morphismes.

Le cahier des charges Les règles de la logique ne sont pas arbitraires ; elles obéissent à une normativité qui ne sera vraiment comprise qu'au niveau -4. Cette normativité est une sorte de *cahier des charges* permettant de gérer l'*implicite*. Toute la question est dans la nature de cet implicite[7] : si l'on dit que c'est la valeur de vérité `vrai` ou `faux` d'un énoncé, on se place au niveau -1, mais on n'arrive pas à expliquer la différence entre deux démonstrations : comme démonstrations et contre-modèles s'excluent mutuellement, ces derniers ne peuvent pas séparer les démonstrations. Au niveau -2, on déclare que l'implicite réside dans les constructions — on dirait maintenant les programmes — implicites aux démonstrations. Ainsi, une démonstration intuitionniste de $A \vee B$ est — implicitement, car explicitement, ce serait idiot ! — une démonstration de A ou une démonstration de B : le *bit* `gauche/droite` qui différencie ces deux possibilités est inaccessible au niveau -1, par exemple quand les deux sont prouvables, ce qui est le cas le plus utile. Il ne va pas tout à fait de soi que cet implicite admette une gestion *compositionnelle*, autrement dit que ce contenu implicite reste stable tout au long du calcul : cette cohérence du niveau -2 s'exprime par l'existence de catégories de preuves non dégénérées. Dans le cas intuitionniste, cette cohérence catégorique est fournie par une propriété remarquable de la syntaxe, le théorème de [Church and Rosser, 1936] qui s'applique à la *déduction naturelle*. Ceci dit, on peut essayer de faire bénéficier la logique classique — qui vivrait plutôt au niveau -1 — d'une interprétation catégorique ; ce qui est difficile, car les diagrammes catégoriques classiques, trop nombreux, sont incohérents — autrement dit, le contenu explicite des démonstrations n'est pas préservé par la conséquence logique. Ce n'est que tardivement [Girard, 1991], que j'ai réussi à donner une interprétation catégorique à la logique classique, grâce au système *polarisé* **LC**.

La transparence contre-attaque Malgré toutes ses qualités, le niveau -2 postule encore un univers transparent de référence. Les connecteurs logiques y sont, en effet, présentés comme solutions de *problèmes universels*, ce que l'on écrit à l'aide de *diagrammes commutatifs*. Or, dans ces diagrammes, un côté représente l'implicite, l'autre son explicitation partielle : autrement dit, *un côté est plus commutatif que l'autre*. Quand on représente par une égalité la *réécriture* qui permet de déterminer les valeurs implicites, e.g., un *bit* `gauche/droite`, contenues dans une démonstration, on dissimule la complexité algorithmique du calcul sous-jacent, qui peut ne pas se terminer dans cette vie. On nous dit qu'il s'agit d'égalités que l'on « implémente » en réécritures $u \to v$ « v est plus égal que u » ; cette lecture est symptomatique de la Vulgate, i.e., du réductionnisme sémantique qui s'accroche ici aux branches. Il se trouve que la dynamique de la réécriture est très bien charpentée, par exemple autour du théorème de Church-Rosser et des résultats de *normalisation forte* que l'on peut faire remonter à [Prawitz, 1965] : elle va trouver sa forme transcendantale aux niveaux -3 et -4, qui ne postuleront plus la transparence.

La logique linéaire Alors que toutes les remises en cause de la logique basées sur le niveau -1 ont échoué par manque de tranchant, le niveau -2 est à l'origine de la *logique linéaire* [Girard, 1987a]. À cette époque, la principale interprétation catégorique était fournie par les *domaines de* [Scott, 1976], structures un peu boursouflées dont l'unique mérite était de fournir une catégorie cartésienne close (CCC) — i.e., adaptée à la logique intuitionniste — effective.

[7]Dans le monde des traîtres ou *traders*, -1 serait « voici un chèque » ; -2 serait « il vaut 200 € » ; -3 « pour le toucher, signez au dos » ; et -4 « c'est peut-être un chèque en bois ».

Peu excité par la pseudo-topologie à l'œuvre dans ces domaines, je les ai simplifiés radicalement, ce qui a conduit à des structures plus amènes : les espaces cohérents, voir, e.g., [Girard, 2007], ch. 8. Conçus au départ pour interpréter la logique intuitionniste, ils devaient faire apparaître une structure logique plus fine : c'est ainsi qu'est apparue la *logique linéaire*, qui possède une négation involutive, clef des niveaux plus profonds, puisqu'elle correspond à l'échange des partenaires de l'interaction[8] au niveau -3, à la *récusation* au niveau -4.

1.2.3 Le niveau interactif, -3

La dynamique On entre ici dans les profondeurs *dynamiques*, dont les enfers supérieurs $-2, -1$ sont, en quelque sorte, les invariants statiques. Cette dynamique prend la forme particulière d'un processus d'*explicitation interactive*. Reprenons l'analogie bancaire : un billet de 200 € correspond à une *question* (l'implicite) dont la *réponse* est rarement totalement explicite ; elle peut, en effet, consister en de nouvelles questions (deux billets de 100 €), ou une réponse partielle (un lecteur de DVD, qui demande maintenant un disque).

Jeux logiques Les *jeux logiques* ont été introduits par [Gentzen, 1936] comme un outil dans sa vaine tentative de démonstration de cohérence. On peut les voir comme un dialogue asymétrique entre un « démontreur » (joueur `I`) et un « réfuteur » (joueur `II`) : chacun s'essaye à construire, l'un une démonstration, l'autre un contre-modèle, l'un des deux au plus — l'un des deux exactement dans le cas classique — pouvant réussir. Cette explication interactive est bancale : elle place, en effet, un des deux joueurs en position de *sujet*, l'autre en position d'*objet*, on se demande bien pourquoi. De plus, si les stratégies gagnantes ont une signification claire — démonstrations pour `I`, contre-modèles pour `II` —, les stratégies « ordinaires » restent dans les limbes : ainsi les stratégies non-gagnantes pour `I` sont des espèces de cathédrales tronquées dans lesquelles on ne célèbrera jamais la messe : elles ne prendront leur sens qu'au niveau -4.

Sémantique des jeux Bien que le paradigme internalise l'opposition syntaxe/sémantique, la pensée unique en fait un sorbet de plus, la *sémantique des jeux*, dont la caractéristique principale est la présence d'un troisième partenaire, l'*arbitre*, i.e., la *règle du jeu*, qui, régulant l'interaction, lui échappe. Dans ses versions les plus récentes, e.g., [Hyland and Ong, 1994], elle donne une version interactive de l'*élimination des coupures* pour la logique intuitionniste. On est obligé de se restreindre au cas où `II` commence, ce qui correspond au *fragment négatif* $\Rightarrow, \wedge, \forall$, déjà responsable de la structure arborescente de la déduction naturelle. Surtout, on n'a pas de « système clos », formé d'une stratégie et d'une contre-stratégie : l'approche ne comprend bien, en effet, que les stratégies *gagnantes*, qui sont trop peu nombreuses. Ainsi, à une stratégie gagnante σ dans le jeu $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$, on pourra opposer une stratégie gagnante τ dans le jeu $\mathbf{A}$ — que l'on peut voir comme une contre-stratégie partielle dans le jeu $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ —, mais pour « clore le système », il nous faudrait une contre-stratégie gagnante τ' pour $\mathbf{B}$, ce qui n'est pas possible. Cette « clôture partielle » induit une *évaluation partielle*, i.e., une stratégie gagnante $[\sigma]\tau$ pour $\mathbf{B}$: c'est l'application de la « fonction » σ à l'« argument » τ, forme simplifiée de la composition catégorique.

[8] La négation classique est, elle aussi, involutive : son interprétation comme échange des partenaires est délicate et passe par la médiation de la logique linéaire [Girard, 1991].

L'involution La logique linéaire est naturellement munie d'une négation *involutive*, dont l'interprétation ne peut être que l'*échange* des joueurs `I` et `II`. Ces derniers devenant homogènes, il n'est plus question de répartition sujet/objet, du moins pas comme un *a priori* hors de toute discussion. La logique intuitionniste — dans laquelle il n'y a pas de « bonne » négation — permettait de renvoyer aux calendes la question de l'opposition stratégie/contre-stratégie : avec la négation linéaire qui échange les deux, cette procrastination devient impossible. Mais l'on doit alors se débarrasser du troisième partenaire, l'arbitre, et passer au véritable niveau fondationnel, -4.

1.2.4 Le niveau déontique, -4

L'anomie On ne peut pas parler de fondements en présupposant ces *formes* que sont : les modèles au niveau -1, le choix des *morphismes* au niveau -2, la règle du jeu au niveau -3. Si elles font toutes sens, elles ne tombent pas du ciel. C'est ainsi que l'on a le droit de s'interroger sur :

Q1 : La différence entre conjonction et disjonction (réponse dans cette section).

Q2 : La différence entre démonstration et modèle (réponse en 1.3.3).

Q3 : La possibilité d'un jeu à trois joueurs ou plus (réponse en 2.3.3).

en évitant les réponses pré-formatées. D'où le besoin d'un niveau *anomique*, i.e., sans loi, où les notions ne sont pas encore différenciées. Dans cet enfer *existentialiste* que constitue le niveau -4, la principale question est de nature *déontique* : gérer les interdictions, les lois, ... bref, la *normativité*.

Les épistates Dans la Grèce antique, on appelait *épistate* un juge temporaire, lui-même jugeable — pas vraiment un omniprésident rendant la justice sous son chêne — ; je propose d'appeler *épistate* une démonstration sous sa forme transcendantale. Ce qui correspond — *modulo* l'abandon de la règle du jeu — aux stratégies dans toutes leurs formes, démonstrations ou modèles, achevées ou tronquées ; ainsi que ces nouveautés de la logique linéaire que sont les *interrupteurs* des réseaux de démonstration. Entre épistates s'établit un dialogue *anomique*, un *jeu sans règle* et sans gagnant.

L'évaluation Aucun sophisme ne peut réduire un jeu sans règle à un jeu avec règle laxiste. On sait, en effet, depuis le paradoxe énumératif de Cantor et sa descendance (Russell, Gödel, Turing, etc.) qu'il y a conflit entre *généralité* et *évaluation* : par exemple, on ne peut répondre à la question $x \in y$, qu'en *restreignant* la notion d'ensemble (Russell) ; par contre, dans le monde relativement anomique du calcul pur, l'évaluation n'a pas toujours lieu, c'est ce que dit l'*indécidabilité* (Turing). Pour assurer l'évaluation, on est amené à faire des hypothèses normatives : par exemple, [Gentzen, 1938] utilise des ordinaux pour garantir la *terminaison* d'un jeu. Pour revenir à la ligne de fracture entre -3 et -4, la *règle* des jeux logiques interdit le match nul : le résultat de l'évaluation (la sémantique) est contenu dans le résultat du match. Sur un jeu sans règle, plane ainsi l'épée de Damoclès du match nul, de la « scène de ménage »; et l'interdiction du match nul n'est pas une règle du jeu : elle ne s'impose à *aucun moment* à *aucun des joueurs*. Mais l'absence de match nul produit une règle du jeu *implicite* : c'est ainsi que, du niveau -4, on remontera au niveau -3.

La rallonge La rallonge électrique est la plus belle métaphore logique que je connaisse, car elle explique l'implication $A \Rightarrow A$. En effet, on lui fournit A, disons, 220 volts et elle restitue A, toujours 220 volts. Vue du niveau -3, la rallonge a des prises de *formes* complémentaires mâle/femelle, qui essayent d'*interdire* tout branchement autre que celui que l'on vient de mentionner. Au niveau -4, on est beaucoup plus barbare : on tripatouille les prises pour pouvoir brancher n'importe quoi : les deux prises l'une sur l'autre, du courant des deux côtés, un appareil des deux côtés, qui n'a pas tenté cela n'a pas eu d'enfance. Et l'on s'aperçoit que seule fonctionne la situation dans laquelle un des deux côtés *fournit* X (= 220, 127, 380 volts) alors que l'autre le *consomme*. De 220 volts $\Rightarrow$ 220 volts on est ainsi passé à $\forall X(X \Rightarrow X)$: la rallonge transmet n'importe quoi, pourvu que source et but soient de même voltage et de polarités (producteur/consommateur) opposées.

Le typage Ce qui nous amène naturellement au *typage* : introduit au départ par Russell pour contrôler les antinomies de la théorie des ensembles, il n'est plus guère utilisé que dans les calculs fonctionnels, typiquement dans le *système* **F** de [Girard, 1971]. Un tel système peut être vu comme un calcul typé *a priori*, donc essentialiste. La rallonge possède diverses versions typées, par exemple $\lambda x^A x$ de type $A \Rightarrow A$ ou $\Lambda X \lambda x^X x$ de type $\forall X(X \Rightarrow X)$. L'effacement du typage, du contrôle externe, produit le λ-terme « pur » λxx ; on peut voir *a contrario* les termes de **F** comme des *typages* du λ-terme non typé, anomique, λxx. Mais il y a plus que cela dans le niveau -4 : il y a le dialogue déontique — les tests normatifs — qui internalise, autant que faire se peut, ce processus de typage.

Du côté de chez Hegel La normativité apparaît donc comme une *horror vacui*, peur de ce vide que serait une évaluation divergente. On peut « typer » les épistates en fonction des « contre-épistates » avec lesquels ils sont consensuels. La version réflexive de cette idée : « **A** définit la norme pour sa négation $\sim$**A** qui elle-même définit la norme pour **A** » réhabilite le *fondement contradictoire* de la logique. Cette idée géniale de Hegel a été décriée, car fautive dans un monde *déjà normé* : ainsi, au niveau -1, la cohérence interdit toute coexistence entre **A** et sa négation ; au niveau -3, la règle du jeu crèe simultanément **A** et $\sim$**A**. Dans le monde anomique que constitue le quatrième sous-sol, elle explique l'émergence de la normativité. C'est ainsi que l'on répondra à la question `Q1` en disant que la dichologie « conjonction » est incluse dans le dichologie « disjonction », plus laxiste, i.e., dont le polaire — l'espace des tests normatifs — est plus petit.

Sujet vs. prédicat Un ensemble d'épistates égal à son bipolaire est appelé *dichologie*. Dichologies et épistates constituent ainsi la forme transcendantale des propositions et de leurs preuves. Tout cela répond, non pas au calcul des prédicats — extension baclée du calcul propositionnel, qui ne fonctionne bien qu'au niveau -1 —, mais à une vision proche de la Théorie des Types de [Martin-Löf, 1984], système basé sur la relation *sujet/prédicat*, déjà présente chez Aristote. Simplement, alors que Martin-Löf lit $t \in P$ comme « t est une preuve de P », les « termes » t envisagés ici sont, avant tout, des *chiens de garde* de la normativité ; on a ainsi plus d'objets que prévu, ce qui devrait éviter certaines apories fondationnelles, voir 2.4.5 *infra*.

1.2.5 Le statut de la négation

Récuser ou réfuter ? Les quatre enfers se différencient par le statut qu'ils donnent à la négation logique. Au niveau -1, la négation correspond aux contre-modèles, aux réfutations ; au niveau -2, du moins avec la logique linéaire, seule dotée d'une bonne négation vivant dans ces eaux, c'est l'*espace dual* ; au niveau -3, la négation est l'échange des joueurs ; au niveau -4, c'est l'espace des *interdictions*. L'opposition la plus spectaculaire se produit entre le niveau -1, ou la négation *réfute*, et le niveau -4, où elle *récuse*. C'est une distinction que la justice connaît bien : c'est « la question ne sera pas posée » de l'Affaire Dreyfus et, plus récemment, dans une affaire de prévarication, le débat entre réfutation — condamnation comme issue possible d'un procès — et récusation — blanchiment par abandon des poursuites. La négation, connecteur logique, est une opération *interne* : les aspects tenus pour externes, typiquement la dimension normative, déontique, de la logique, font maintenant partie de la logique elle-même et non pas d'une réflexion sur la logique, d'une prétendue « méta-logique ».

PROLOG Si l'expression « être victime de son succès » s'applique, c'est bien au langage PROLOG, coqueluche de l'industrie japonaise dans les années 1980. Au départ, un idée remarquable que j'ai expliquée dans [Girard et al., 1990] comme une opposition implicite/explicite : on pose une *question* dans le monde « déclaratif », soumis à la conséquence logique (l'implicite, d'« impliquer »), le calcul *avec coupures* ; on y *répond* dans le monde explicite au moyen d'une recherche de preuves *sans coupures*. Et l'idée, non moins remarquable, d'expliquer la négation par l'*échec* de la recherche. Hélas, le milieu PROLOG ne s'est jamais avisé que le slogan « PROLOG = logique + contrôle » est antinomique à l'idée de la *négation par échec* : en effet, la *programmation logique* s'est toujours placée sous le signe de la sacro-sainte sémantique, ici, déclarative, alors que l'échec, notion *procédurale*, réfère à un sujet — machine, mais sujet quand même. La schizophrénie entre une logique *externe*, garante du résultat, et un « contrôle » — i.e., un pilotage à vue — *interne*, garant de l'efficacité, est à l'origine du naufrage de PROLOG : la logique doit assumer les deux aspects, sinon on obtient un langage inefficace *et* instable. Le sujet de la *négation* de PROLOG a fait couler beaucoup d'encre — ou plutôt de moutarde, vu ce qu'il en reste vingt ans après — : du fait de l'instabilité de PROLOG, on pouvait écrire tout et son contraire. J'ai quand même appris beaucoup en m'intéressant à ce problème marginal. Par exemple, que l'on peut discuter les règles de la logique en fonction de leur *procéduralité* ; mais cela ne peut pas aller jusqu'à donner à la conjonction les règles de la disjonction, comme je l'ai vu faire : tant qu'à faire, on change aussi le nom du connecteur ! J'ai aussi compris qu'un domaine d'étude, se mérite, se construit : il n'y a pas de logique des objets mal fichus.

1.3 Retour sur Terre

1.3.1 Spécificité des niveaux

-1 C'est le seul niveau qui identifie toutes les démonstrations d'une même proposition. Considérons une disjonction intuitionniste $A \vee B$ (ou linéaire additive $A \oplus B$) : si l'on sait distinguer les démonstrations « venant de A » des démonstrations « venant de B », c'est que l'on n'est pas au niveau -1.

-2 C'est un niveau *statique*, ce qui s'exprime par la *linéarité* : les connecteurs de base $\otimes, \parr, \&, \oplus$ y sont représentés par des produits tensoriels, des sommes ou produits directs ; la dualité y est bilinéaire, ainsi $\sharp(a \cap b) \leq 1$ (espaces cohérents, [Girard, 1987a]) ou $|\langle u \mid v \rangle| \leq 1$ (espaces de Banach cohérents, [Girard, 1999a]) ou encore $0 \leq \mathrm{tr}(uv) \leq 1$ (espaces cohérents quantiques [Girard, 2004]). En logique intuitionniste, le niveau -2 est caractérisé par la linéarité de l'application d'une fonction à un argument fixé, i.e., de $f \rightsquigarrow f(a)$, plus généralement, de $f \rightsquigarrow f \circ g$. Les niveaux -3 et -4 ne sont pas du tout linéaires, au point que l'on doit introduire des combinaisons linéaires *formelles* au niveau -4.

-3 La présence d'une *règle du jeu* induit encore une *métastase de l'objet*, typique de la réification sémantique : ainsi, elle introduit une rallonge distincte pour chaque voltage, e.g., 220 volts $\Rightarrow$ 220 volts, 127 volts $\Rightarrow$ 127 volts. Alors que -4, anomique, adopte le point de vue *polymorphe* d'une seule rallonge que l'on peut brancher *ad libitum*, quitte à faire sauter les plombs.

-4 Parmi les traits distinctifs du niveau -4, mentionnons la *locativité*. Ainsi, alors que le niveau -2 va gérer le passage de $A \multimap B$ à $\sim B \multimap \sim A$ par la construction d'une application adjointe[9], le niveau -4 ne distingue pas l'adjointe de la fonction de départ : c'est nous, qui par l'utilisation — de A vers B ou de $\sim B$ vers $\sim A$ — décidons de voir l'anse à gauche ou l'anse à droite, voir 2.3.3.

1.3.2 Fondements relatifs

Le *fondement relatif* réduit les enfers au seul niveau -4.

$\mathbf{-2 \rightsquigarrow -1}$ Mauvais début : le niveau -2 n'a pas de délégué au niveau -1. Autrement dit, on peut être cohérent du point de vue calculatoire, mais incohérent du point de vue aléthique. Ainsi, la logique linéaire, conçue au niveau -2, a été finalisée au niveau -1 — ceci dit, sur des points relativement mineurs.

$\mathbf{-3 \rightsquigarrow -1}$ C'est beaucoup plus facile : on dit que **A** est *vrai* quand `I` a une stratégie gagnante dans le jeu **A**. Cette définition interactive de la vérité possède toutes qualités attendues ; par exemple, elle implique la cohérence logique. Le niveau -1 ainsi obtenu n'obéit pas aux tables de vérité classiques : il faudrait pour cela que soit `I`, soit `II` ait une stratégie gagnante.

$\mathbf{-3 \rightsquigarrow -2}$ Les stratégies gagnantes du jeu $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ deviennent les morphismes de **A** dans **B** ; la *stratégie du copieur* du jeu $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}$ — analogue amusant de la rallonge : on joue contre deux joueurs, l'un blanc, l'autre noir, en recopiant les coups de l'un dans le jeu avec l'autre et *vice versa* — joue le rôle de morphisme identique. La composition est une variation sur l'évaluation partielle $[\sigma]\tau$.

$\mathbf{-4 \rightsquigarrow -3}$ Dans la dichologie $\mathbf{A}/\sim\mathbf{A}$, on peut se restreindre aux épistates qui ne sont pas ostensiblement déontiques — les « chiens de garde normatifs » ainsi exclus jouant le rôle de l'arbitre invisible — ; on obtient alors un jeu au sens habituel, dans lequel les épistates — ou plutôt les classes d'équivalence d'épistates — jouent le rôle de stratégies : on les appelle épistates argumentatifs ou *arguments*. Parmi les arguments, certains sont *irréfragables*, i.e., gagnants.

[9] Ce qui n'est pas ridicule : cette adjonction est à l'origine de la négation linéaire.

1.3.3 L'épidictique

La syntaxe transcendantale ne doit pas être transcendantale au point de couper les ponts avec le langage.

L'apodictique La question que se posaient les logiciens des années 1960 était celle de la *preuve apodictique*. On disposait à l'époque d'une syntaxe transcendantale très rudimentaire, l'*interprétation BHK* — Brouwer-Heyting-Kolmogoroff — remontant aux années 1930 voir 2.1.1 *infra*, pour laquelle une démonstration de $A \Rightarrow B$ est une *fonction* envoyant les démonstrations de A dans les démonstrations de B ; une « fonction » assez fumeuse, définie sur des espaces encore plus volatiles. Mais comment s'assurer que cette fonction fait bien ce qu'elle est supposée faire ? Une réponse à cette question aurait produit un fondement *apodictique*, i.e., absolu, irréfragable ; avec le recul, on dira que la prétention du propos n'avait d'égal que le vide technique qu'elle surplombait. C'est à ce problème que [Kreisel, 1965] avait répondu par une pirouette, entraînant des excommunications en chaîne. Dans ma terminologie, la question est de *vérifier* qu'un épistate u appartient bien à une dichologie $\mathbf{A}$; comme cette appartenance est conditionnée à une infinité de tests — les éléments de $\sim\mathbf{A}$ —, on voit tout de suite que l'apodictique se heurte à l'*indécidabilité*, ou encore à l'*incomplétude*. Et essayer de remplacer la vérification par un raisonnement — qui ne peut être qu'isomorphe à u — initie un processus rappelant Dupond et Dupont dans le désert qui suivent leur trace, puis la trace de leur trace — une fuite en avant appelée « méta ». Donc, on abandonne toute idée d'apodictique[10].

L'épidictique On qualifie d'*épidictique* l'arrogant qui se prétend infaillible, apodictique, mais qui ne l'est peut-être pas plus que Sarkozy ; un terme équivalent, malheureusement trop connoté, serait « axiomatique[11] ». Par épidictique, j'entends ce que nous imaginons de l'apodictique idéale formée par les arguments irréfragables du niveau -4. J'ai bien dit « imaginons », car on ne peut être sûr de rien. L'épidictique est une apodictique du pauvre, sur laquelle plane un certain doute : on a essayé de trouver les principes les plus convaincants possibles, mais le serpent ne se mord-il pas la queue ?

Le sujet transcendantal Les épistates vivent dans une algèbre de von Neumann, qui n'est pas précisément un objet syntaxique. D'où la question, qui ne se posait pas au temps de Kreisel — les « fonctions » BHK étaient des codages peu ragoûtants — du *statut syntaxique* des opérateurs. C'est ici qu'il faut faire intervenir le *sujet transcendantal* et penser qu'il n'y a pas de démonstration sans choix d'un support matériel. On ramène ce choix à celui d'un monoïde dénombrable formé d'opérateurs, le *monoïde épidictique* $\mathcal{E}$. On répond à la question `Q2` en appelant *démonstration* tout argument irréfragable appartenant à $\mathcal{E}$. Les démonstrations ont toutes les qualités que l'on attend d'elles, par exemple elles sont stables par élimination des coupures : la dualité $\mathbf{A}/\sim\mathbf{A}$ appliquée aux démonstrations, induit une *nilpotence* du calcul, i.e., la forme transcendantale de la *normalisation forte* de [Prawitz, 1965]. Les démonstrations apparaissent ainsi sous une forme « non typée », i.e., sans la subjectivité associée à leur justification

[10] Je serai amené à nuancer ce tir de barrage, voir 2.3.6, *infra*.

[11] « Officier » en grec moderne, la corvée de chiottes étant, sans doute, un *axiome*.

étape par étape ; mais les aspects *dialectaux* du niveau -4 permettent de représenter tout type de commentaire, e.g., « application de la règle $\mathcal{R}$ » ou « parce que je le vaux bien », voire « révélation de N. D. de Fátima », au moyen de l'espace auxiliaire, qui n'est défini qu'à isomorphisme près ; à l'intérieur d'une même classe d'isomorphie, les différences correspondent à la *subjectivité*, qui peut prendre la forme d'un système bureaucratique bien ordonné ou celle du plus pur délire : il ne me semble pas nécessaire de trancher.

Une conjecture Bien que l'apodictique soit une illusion, certaines propositions — ou plutôt les dichologies associées — sont « plus absolues » que d'autres. Ainsi, les propositions Π^1 — universellement quantifiées au *second ordre*[12] — qui vérifient la *complétude* dans ses formes externe — *vrai* $\Rightarrow$ *prouvable* — et interne — la *propriété de la sous-formule* — sont-elles plus *sûres* que les autres. Parmi ces propositions, celles qui sont *parfaites*, i.e., qui n'utilisent pas les *exponentielles* !, ?, sont encore plus sûres. Dans ce dernier cas — moralement apodictique —, je conjecture que le monoïde épidictique ne sert à rien, i.e., la forme suivante de *complétude* : tout argument irréfragable est (équivalent à) une démonstration. Hors du cadre Π^1, il faut s'attendre à une forme nouvelle d'incomplétude : l'existence d'arguments irréfragables ne s'exprimant pas comme éléments d'un quelconque monoïde épidictique donné à l'avance.

Le statut du calcul Le monoïde épidictique est l'espace dans lequel va s'inscrire la syntaxe au sens le plus terre à terre. En particulier, c'est l'espace du *calcul*, au sens habituel. Comme le choix de $\mathcal{E}$ est tout, sauf unique, la question de savoir si ce choix peut être relié à la *complexité* algorithmique est ouverte.

1.3.4 Les entiers

Théories logiques Le seul *artefact* important qui n'ait pas de statut transcendantal est la notion de *théorie logique*. En particulier, les *systèmes d'arithmétique* qui traitent des entiers naturels et qui constituent — suivant le mot fameux de Kronecker — une réalité première. Or, s'il y a une multitude de systèmes d'arithmétique, il n'y a qu'un seul modèle respectable, $\mathbb{N}$: c'est l'incomplétude que l'on va essayer de dépasser en cherchant des dichologies « non standard ». Ce qui suit est tiré de mon dernier article [Girard, 2011b].

Isomorphismes Le *système* **F** de [Girard, 1971], permet de définir les entiers au moyen de la dichologie **nat** $:= \forall \boldsymbol{X}((\boldsymbol{X} \Rightarrow \boldsymbol{X}) \Rightarrow (\boldsymbol{X} \Rightarrow \boldsymbol{X}))$, qui est « standard », autrement dit, dont il n'y a aucun miracle à attendre. Par contre, le niveau -4 étant celui des expérimentations existentialistes, il est possible de poser les questions de façon non précontrainte par la logique. L'entier $n > 0$ s'y écrit comme une matrice 4×4 à coefficients dans le facteur hyperfini :

$$M_n := \begin{bmatrix} 0 & v & u & 0 \\ v^* & 0 & 0 & w \\ u^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w^* & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

[12] Ne pas confondre avec les Π^0_1 qui appartiennent, en fait, à la classe duale Σ^1.

Les isométries partielles u, v, w correspondent respectivement aux écritures suivantes : le premier bâton, le bâton suivant, le mot « fin ». On peut les caractériser par des équations, e.g., $w^*w = v^{n-1}uu^*$, ce qui les rend uniques à isomorphisme — interne — près. Ceci dit, le niveau -4 n'a cure de cette isomorphie : il faut ici s'inspirer de la mécanique quantique, dans le même esprit que [Girard, 2004], qui se plaçait au niveau -2 : on *observe* un entier M_n au moyen de Φ, matrice 4×4, le *résultat* de la mesure étant un scalaire $\ll \Phi \mid M_n \gg$. Mais M_n n'étant qu'une *représentation* de n, deux *représentations* M_n, N_n, quoique isomorphes, peuvent être observées différemment, tout simplement parce que les coefficients de la matrice observante Φ « interfèrent » avec ceux des observées. L'origine de la normativité logique — qui mène à des produits très sophistiqués du genre **nat** — est à chercher dans l'*objectivité de la mesure* :

$$\ll \Phi \mid M_n \gg = \ll \Phi \mid N_n \gg \tag{2}$$

qui dit que le résultat ne dépend pas de la représentation.

Variables muettes La logique résoud cette question — l'absence d'interférence — par une surenchère normative qui conduit à l'aporie du modèle standard, unique car ayant tué tous ses concurrents valables. Ce qui est à rapprocher de la question des *variables muettes*, sujet tarte par excellence et prétexte à des débauches d'algèbre universelle. Une variable, libre ou muette, est l'*adresse* où chercher une valeur : les variables libres correspondent à des adresses partagées, mais les variables muettes, privées, sont *autistes*. C'est pour cela que l'on doit les renommer, i.e., appliquer des automorphismes, pour éviter des conflits, des « captures de variables ». Cette discipline — qu'il ne s'agit pas de remettre en cause — est trop sévère : c'est un scaphandre qui nous protège des intempéries, mais qui interdit aussi toute communication fine avec l'extérieur. On peut lui préférer un simple parapluie, même s'il ne protège pas contre les *tsunami* ; autrement dit, *paramétrer* les isomorphismes qui régulent l'« autisme ».

LOGSPACE J'ai donc recherché des hypothèses — simples, mais pas simplistes — permettant d'assurer l'objectivité de la mesure. C'est ainsi que j'ai obtenu deux sous-algèbres $\mathcal{O}, \mathcal{S}$ telles que, si les coefficients des représentations et des observations sont respectivement dans $\mathcal{O}$ et $\mathcal{S}$, alors (2) est vérifiée. Se souvenant du sujet transcendantal — i.e., la restriction au *monoïde épidictique* naturel dans ce cas —, on s'aperçoit que l'évaluation se fait en *espace logarithmique*[13], voir 2.4.5 *infra.*

Une définition non standard du « non standard » La restriction à $\mathcal{M}_4(\mathcal{O})$ est plus laxiste que la construction logique standard : on peut considérer ces représentations comme « non standard ». Surtout, pour obliger l'adversaire — l'observation — à l'« objectivité », il faut introduire des épistates purement déontiques, normatifs, qui énoncent précisément l'équation (2). Nous venons de définir un « modèle non standard », plus prometteur que les entiers non standard habituels qui n'ont jamais trouvé de place dans ce monde trop normatif que constitue l'axiomatisation logique. Se souvenant du sorbet sémantique, reste à trouver le mot idoine pour cette version non standard du « non standard ».

[13]Je rappelle que LOGSPACE correspond aux « calculs Alzheimer », i.e., sans mémoire.

1.4 Enjeux fondationnels

Le simplisme fondationnel — e.g., les démonstrations de cohérence — a régenté la logique du siècle passé. La recherche d'une improbable Pierre Philosophale doit céder la place à des problématiques moins infantiles.

1.4.1 La logique est-elle correcte ?

L'unité de la logique La première véritable question qui se pose est celle de la *correction* des règles logiques. Cette correction n'est pas vraiment battue en brèche par la création de la logique intuitionniste : Kreisel faisait remarquer en son temps que la logique intuitionniste n'est pas une « logique alternative », mais plutôt un raffinement de la logique classique. On dira la même chose de la logique linéaire, symétrisation de la logique intuitionniste. Et d'ailleurs, mon article [Girard, 1993] présente les logiques classique, intuitionniste, linéaire, comme des *fragments* d'une logique unifiée **LU**.

L'iconoclasme La logique linéaire fait apparaître une ligne de fracture entre *parfait* et *imparfait*, voir les titres des deux parties de mon livre [Girard, 2007]. L'imparfait gère la *réutilisation*, condition de possibilité de l'*infini* — au sens étymologique de « non terminé ». Alors que le parfait est à peu près hors de toute critique, j'ai découvert que l'imparfait est tout, sauf absolu : les logiques *allégées* présentent une version « iconoclaste » de l'imparfait. En effet, l'imparfait, c'est la pérennité ; mais ceci implique-t-il, à l'instar de Thomas d'Aquin postulant, en plus de la perfection de Dieu, la perfection de sa perfection, la *pérennité de la pérennité* ? Il ne s'agit pas d'une question purement spéculative : la perénnité de la pérennité s'écrit au moyen des implications $!A \multimap A$ et $!A \multimap !!A$. Les logiques iconoclastes de [Girard, 1998] refusent ce principe, proposant ainsi une version « douce » de l'infini, e.g., **LLL** (*Light Linear Logic*) et donc une algorithmique plus humaine, par exemple le *temps polynomial* pour **LLL**.

Plusieurs logiques ? La *géométrie de l'interaction* (GdI) se place dans une algèbre de von Neumann. La logique *imparfaite* est vraisemblablement sensible au choix de l'algèbre : j'ai ainsi fait le choix du *facteur hyperfini* parce que le type $\mathbf{II_1}$ semble particulièrement adapté à l'iconoclasme. Mais on peut sans doute — c'est en tout cas la direction que j'avais suivie dans mes premiers articles de GdI [Girard, 1989a][Girard, 1990][Girard, 1995] — travailler dans $\mathcal{B}(\mathbb{H})$, i.e., en type $\mathbf{I}_\infty$, auquel cas on devrait retrouver la logique « habituelle ».

1.4.2 L'iconoclasme, jusqu'où ?

L'univers fondationnel usuel est assez mal fichu, mais on y a ses habitudes, ses petits conforts. Une logique iconoclaste nous présente un monde abstrait plus « physique » — par exemple où les calculs se terminent dans cette vie —, mais aussi privé de certains points de repère. Typiquement ceux de la *réflexion* : les logiques iconoclastes pêchent par l'absence d'homogénéité entre la logique et la réflexion sur la logique, ce que le grossier pléonasme tarskien faisait sans problème. Ce qui incite à penser la *variabilité* de la logique dans un cadre unique, par exemple en la paramétrant au moyen du *monoïde épidictique* $\mathcal{E}$.

2 La géométrie de l'interaction

2.1 Historique

2.1.1 BHK

Brouwer-Heyting-Kolmogoroff[14], interprétation très ancienne ($\sim$ 1930) ne vaut plus que pour certaines idées générales, par exemple qu'une démonstration de $A \Rightarrow B$ est une « fonction » de A dans B. Ces fonctions sont-elles des graphes, des morphismes catégoriques, des algorithmes ? BHK ne tranche pas ; à l'idée de fonction, on pourrait substituer celle d'*adjonction*, mais il faut encore trouver le cadre idoine. La normativité de BHK est externe, *a priori*, ce qui en fait une interprétation *essentialiste*, une espèce de niveau -3 rudimentaire.

2.1.2 La ludique

La ludique [Girard, 2001] est une tentative bien plus aboutie, quoique restreinte à la logique *parfaite*, sans exponentielles. Elle est basée sur une analyse du fragment multiplicatif/additif **MALL** de la logique linéaire. Les épistates ludiques — les *desseins* — sont une abstraction des démonstrations ; une règle spécifique, le *daimon* ✠, permet d'y inclure les démonstrations tronquées. En termes de jeux, ✠ est un abandon : le *gain* se définit donc par l'absence de *daimon*. Le passage du niveau -4 au niveau -3 est très spectaculaire : un *comportement* (dichologie ludique) induit un jeu, à travers l'*incarnation* qui consiste à ne retenir d'un dessein $\mathfrak{D}$ que sa « partie utile » (relativement au comportement en question) $|\mathfrak{D}|$. C'est ainsi que la conjonction additive &, définie au niveau -4 par une intersection, devient un produit cartésien au niveau -3 ; c'est le *mystère de l'incarnation* :

$$|\mathbf{A} \cap \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \times |\mathbf{B}| \tag{3}$$

sous des hypothèses *locatives* appropriées et naturelles. La ludique est *non dialectale* (voir *infra*), ce qui explique sans doute ses limites. La coexistence de la ludique et de la GdI laisse ouverte la possibilité de plusieurs syntaxes transcendantales, même si certaines semblent plus abouties que d'autres.

2.1.3 Du côté des réseaux

Les réseaux Les *réseaux de démonstration* sont la généralisation de la déduction naturelle en présence d'une négation involutive ; pour cela, on se restreint au *fragment multiplicatif* **MLL** de la logique linéaire (connecteurs $\otimes, \parr$) et l'on écrit des démonstrations à plusieurs conclusions, les *réseaux*. Le *critère de correction* — la normativité implicite — de [Girard, 1987a] ne diffère pas structurellement de l'élimination des coupures : on est bien au niveau -4. Ces opérations font apparaître les artefacts logiques — les démonstrations et leurs chiens de garde normatifs — comme des *permutations* d'un ensemble fini, celui des *littéraux*, i.e., des atomes $p, \sim q, \ldots$ de l'énoncé que l'on prétend démontrer. Il est en fait possible de reconstruire ce modeste et néanmoins crucial fragment de logique à partir de ces permutations ; c'est cette remarque [Girard, 1988] qui m'a amené au programme de *Géométrie de l'Interaction* de [Girard, 1989b].

[14]Dans cette affaire, Brouwer ne fait qu'un avec son porte-plume Heyting.

La locativité Dès ses balbutiements, la GdI s'affirme comme *locative*. En effet, les littéraux de $A \otimes A$ sont ceux des deux « occurrences », ce qui oblige à considérer $A \otimes A$ comme une abréviation — commode, mais incorrecte — de $A' \otimes A"$ où $A', A"$ sont deux copies *délocalisées* de A. En contre-partie de ce pédantisme, $A \otimes B \ = \ B \otimes A$: il s'agit bien d'une égalité et pas seulement d'un isomorphisme, car les littéraux sont *les mêmes* dans les deux cas. La locativité est à la base du mystère de l'incarnation (3) : une intersection ne devient un produit cartésien que si les *loci* sont disjoints. De même, le *lemme du Chinois* $p\mathbb{Z} \cap q\mathbb{Z} \simeq p\mathbb{Z} \times q\mathbb{Z}$ suppose une hypothèse « locative » : p, q premiers entre eux.

Dualité La relation entre un réseau et un *test*, un « chien de garde », normatif, formulée en termes de permutations d'un même ensemble fini de littéraux s'écrit sous la forme symétrique :

$$\sigma \perp \tau \quad \Leftrightarrow \quad \sigma\tau \text{ cyclique} \tag{4}$$

elle reste valable quand σ, τ correspondent toutes deux à des tests. On obtient ainsi la première syntaxe trancendantale convaincante en définissant les épistates comme des permutations, les dichologies devenant alors les ensembles d'épistates égaux à leur « biorthogonal » :

$$\mathbf{A} \ = \ \mathbf{A}^{\perp\perp} \tag{5}$$

la négation involutive étant donc interprétée par l'orthogonal :

$$\sim\!\mathbf{A} \ := \ \mathbf{A}^{\perp} \tag{6}$$

L'adjonction La logique linéaire décompose l'implication en deux étapes, sa partie implicative, l'implication *linéaire* $\multimap$ et la *pérennisation* !, forme transcendantale de l'*infini* ; c'est la principale découverte de [Girard, 1987a] :

$$A \Rightarrow B \ = \ !A \multimap B \tag{7}$$

Les enjeux fondationnels se situant du côté de l'infini, donc de $!A$, on a tout intérêt à soigner l'interprétation de $\multimap$. Pour ceci, nous allons changer le paradigme non interactif BHK « une fonction de A dans B » en une *adjonction*. Si A, B sont disjoints et non vides, si σ, τ, φ sont des permutations de $A, B, A+B$, on définit une permutation résiduelle $[\varphi]\sigma$ de B par $[\varphi]\sigma(b) := \varphi(\sigma\varphi)^n(b)$, où n est uniquement déterminé par la condition $\varphi(\sigma\varphi)^n(b) \in B$:

$$\varphi(\sigma + \tau) \text{ cyclique} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma\varphi \text{ nilpotent et } ([\varphi]\sigma)\tau \text{ cyclique} \tag{8}$$

Cette équation fait le lien entre le test $\sigma + \tau$ appliqué à φ et le test τ appliqué à $[\varphi]\sigma$, qui se comporte comme l'« application » de la « fonction » φ à l'« argument » σ, cette application étant conditionnée à la *nilpotence* de $\varphi\sigma$. C'est l'analogue anomique de l'*évaluation partielle* du niveau -3, 1.2.3 *supra* : la cyclicité induit une règle du jeu et la nilpotence correspond à l'absence de boucles dans l'évaluation partielle.

L'équation de rétroaction Malgré son rôle central, $\multimap$ ne résume pas toute la logique, en particulier pas la pérennisation qui, de par sa nature potentiellement infinie, ne peut pas vivre dans des espaces de permutation finis. On va donc considérer les permutations comme des *opérateurs* agissant sur des espaces de Hilbert, ce qui se généralisera en dimension infinie. Si l'on reprend l'exemple précédent, on peut voir σ, τ, φ comme des unitaires opérant sur les Hilbert $\mathbf{C}^A, \mathbf{C}^B, \mathbf{C}^{A+B}$; on voit que, si φ s'écrit comme la matrice-bloc $\begin{pmatrix} \varphi_{AA} & \varphi_{AB} \\ \varphi_{BA} & \varphi_{BB} \end{pmatrix}$, la nilpotence de $\sigma\varphi$ correspond à l'*inversibilité* de $I - \sigma\varphi$ et que :

$$\begin{aligned} [\varphi]\sigma &= I_B(\varphi_{BB} + \varphi_{BA}\sigma\varphi_{AB} + \varphi_{BA}\sigma\varphi_{AA}\sigma\varphi_{AB} + \dots)I_B \\ &= (I - \sigma^2)\varphi(I - \sigma\varphi)^{-1}(I - \sigma^2) \end{aligned} \tag{9}$$

En fait, $[\varphi]\sigma$ est l'unique solution $y' = ([\varphi]\sigma)(y)$ de l'*équation de rétroaction* ($x, x' \in \mathbf{C}^A, y, y' \in \mathbf{C}^B$) :

$$\varphi(x \oplus y) = x' + y' \tag{10}$$

$$\sigma(x') = x \tag{11}$$

2.2 La Géométrie de l'Interaction

2.2.1 Types d'algèbres

Les diverses GdI C'est un certain flottement quant aux généralisations possibles de la GdI au cas infini qui m'amène à douter de la *nécessité* des choix effectués en syntaxe transcendantale. Ce flottement est-il une maladie de jeunesse ou le reflet d'une diversité intrinsèque de la logique, qui s'exprimerait, par exemple par le choix d'un *type* (**I** ou **II**) d'algèbre de von Neumann ?

Type I [Girard, 1989a], [Girard, 1990] et [Girard, 1995] se plaçaient dans $\mathcal{B}(\mathbb{H})$, définissant une GdI de type $\mathbf{I}_\infty$, démontrant ainsi la viabilité et la généralité de l'approche. Qui laissait, cependant, beaucoup à désirer ; ainsi, faute de pouvoir clore le système — ce qui nous rapproche du niveau -3 —, l'orthogonalité prenait la forme « uv nilpotent » qui permet pas de remonter vers le niveau -1. De plus, la gestion de la nilpotence ne fonctionnait que grâce à la restriction à un monoïde épidictique ; cette restriction est *ad hoc* dans le sens où elle intervient trop tôt, à un moment où le *sujet transcendantal* ne devrait jouer aucun rôle. Cette première GdI a été relayée par les informaticiens, je pense à [Abramsky et al., 1994] et surtout [Gonthier et al., 1992].

Type II Les logiques iconoclastes [Girard, 1998] n'admettant pas d'explication vraiment convaincante au niveau -2 — ce qui n'était pas le cas pour la logique linéaire, élaborée à ce niveau —, j'ai repris la GdI dans des algèbres de von Neumann de type $\neq$ **I**, i.e., diffuses. Le besoin d'une trace — à défaut, d'une semi-trace — amène au type $\mathbf{II}_1$. Les contraintes liées aux exponentielles — beaucoup d'automorphismes — m'ont conduit au *facteur hyperfini.* Il est ensuite difficile de s'orienter dans le maquis des possibilités ; c'est ainsi que [Girard, 2006] « résoud » l'équation de rétroaction (10–11) en norme ≤ 1 dans une algèbre de von Neumann. [Girard, 2007] et [Girard, 2011a] suivent des options opposées quant au *dialecte.* La nouvelle version (2.3, *infra*) est *dialectale* en norme quelconque : la restriction $\|u\| \leq 1$ manquait de souplesse.

2.2.2 Clore le système

La clôture du système L'adjonction (8) fait intervenir deux notions : *cyclicité* et *nilpotence*. La nilpotence correspond à l'évaluation partielle dans un système ouvert, à l'application d'une fonction à un argument : c'est la forme transcendantale de la *normalisation forte* de [Prawitz, 1965]. La cyclicité correspond à la « clôture du système », au fondement contradictoire ; sous des hypothèses appropriées, elle induit des effets collatéraux de nilpotence. Ces notions passent mal en dimension infinie : il est difficile de bien traiter l'une sans maltraiter l'autre. Par exemple, la première GdI [Girard, 1989a] s'appuyait sur les isométries partielles induites par des permutations partielles d'une base distinguée et n'arrivait à généraliser que la nilpotence. [Girard, 2011a] se base sur la solution [Girard, 2006] de l'équation de rétroaction en norme ≤ 1 et généralise la cyclicité au moyen d'une condition sur le déterminant : $\det(1 - uv) \neq 0, 1$; mais on n'y trouve pas d'analogue à la nilpotence. Dans la version en cours (2.3.1 *infra*), les opérateurs sont remplacés par des graphes : le conflit lié à la *clôture du système* semble enfin résolu.

L'invariant scalaire La condition de cyclicité est *qualitative* : $\sigma\tau$ est cyclique ou ne l'est pas. Il se trouve que le traitement purement qualitatif de la dualité se révèle insuffisant. En effet la contrainte normative la plus courante consiste à munir une dichologie d'une relation d'équivalence : par exemple, on va demander que $\mathfrak{a}', \mathfrak{a}' \in \mathbf{A}$ se comportent de même façon face à $\mathfrak{b}$, qui n'est même pas censé être dans $\sim\mathbf{A}$. Pour pouvoir accéder à ce type de normativité sans réviser toute l'architecture, on est amené à supposer que le résultat de la clôture est un scalaire $\ll \mathfrak{a} \mid \mathfrak{b} \gg$, la dualité s'écrivant $\ll \mathfrak{a} \mid \mathfrak{b} \gg \neq 0$. On choisit $\mathfrak{a}_0 \in \mathbf{A}$ et l'on forme — c'est en fait l'opération dialectale de base — les combinaisons linéaires $\mathfrak{a}_0 + \lambda \,.\, \mathfrak{a} - \lambda \,.\, \mathfrak{a}'$: réclamer leur appartenance à $\mathbf{A}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ revient à demander que $\ll \mathfrak{a} \mid \mathfrak{b} \gg \; = \; \ll \mathfrak{a}' \mid \mathfrak{b} \gg$. L'*adjonction* qui prend la forme $\ll [\mathfrak{F}]\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b} \gg = \ll \mathfrak{F} \mid \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b} \gg$ suppose :

$$\ll \mathfrak{u} \mid \mathfrak{v} \gg \; = \; \ll \mathfrak{v} \mid \mathfrak{u} \gg \tag{12}$$

ce qui restreint le choix à la trace (variante : au déterminant) et exclut les algèbres de type **III**.

2.2.3 L'hypothèse dialectale

Dialectes Introduit dans [Girard, 1995], le *dialecte* permet d'étendre la GdI au cas additif. En termes de *réseaux*, il s'agit d'un problème de *superposition* : pour obtenir une démonstration de $C \multimap A \,\&\, B$, il faut « sommer » une démonstration de $C \multimap A$ et une démonstration de $C \multimap B$, ce qui produit une perte irrémédiable d'information du côté de C. On introduit donc des « tranches » indicées, une pour A, une pour B. Se pose alors la question du statut de ces indices : *public* ou *privé* ? Dans le mode « privé », l'indice de la tranche A n'est pas réputé correspondre à A : c'est l'option dialectale. En termes mathématiques, nos opérateurs ne vont pas vivre dans le facteur hyperfini, mais dans sa tensorisation avec un espace auxiliaire, le *dialecte* $\mathcal{D}$ — dans la pratique, une algèbre de von Neumann de dimension finie. Ainsi, $\mathcal{D} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ correspond-il à un réseau à deux tranches. La superposition est parfois appelée « contraction additive » ; la contraction multiplicative, la vraie, utilisera aussi des dialectes, mais non commutatifs cette fois, typiquement $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Les combinaisons linéaires formelles (*supra*) sont aussi un exemple de *dialecte* — et donc une motivation majeure pour la GdI dialectale. Pour tenir compte des coefficients $\lambda \in \mathbb{R}$, on est amené à équiper le dialecte d'une *diatrace* : il s'agit d'un élément tracial et hermitien du prédual, pas forcément positif. Ainsi, la combinaison $\mathfrak{a}_0 + \lambda.\mathfrak{b} - \lambda.\mathfrak{c}$ utilise-t-elle le dialecte $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ et la diatrace $\delta(x \oplus y \oplus z) := x + \lambda(y - z)$.

L'autisme Le caractère privé du dialecte s'exprime par la tensorisation : pour calculer $\ll \mathfrak{a} \mid \mathfrak{b} \gg$, pour construire $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}$, il faut harmoniser les dialectes respectifs $\mathcal{D}, \mathcal{E}$ de $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ en $\mathcal{D} \otimes \mathcal{E}$. Ce qui explique la bilinéarité de $\ll \cdot \mid \cdot \gg$ par rapport aux combinaisons formelles. Le dialecte exprime une de mes vieilles idées, la « communication sans compréhension ». Sans que l'index a de A soit public, l'interaction sera capable de le déterminer : en effet, la tranche indicée a répondra mal à un test de type $\sim B$.

Dialecte vs. ressource La tensorisation des dialectes rend impossible la duplication *interne*. Il n'y a, en effet, aucun moyen d'exprimer les $\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}$ à partir des $\mathcal{D} \otimes \mathcal{E}$, $\mathcal{E}$ étant donné à l'avance. Pour dupliquer — i.e., appliquer la règle de contraction —, on est amené à supposer l'absence de dialecte, autrement dit que $\mathcal{D} = \mathbb{C}$. À sa création, la logique linéaire [Girard, 1987a] avait beaucoup insisté — même un peu trop — sur la notion de *ressource*. La ressource, non duplicable, réfutait la contraction et expliquait la différence entre les deux conjonctions $A \otimes B$ et $A \,\&\, B$. On peut donc voir le dialecte comme la forme transcendantale de cette notion au statut un peu vague.

2.3 La GdI aujourd'hui

2.3.1 L'adjonction

La logique n'est jamais que la mise en scène — support, dialecte, diatrace — de l'*adjonction* qui définit l'implication linéaire. Malheureusement, nous en avons deux, assez incompatibles, que la gestion dialectale va permettre de réconcilier miraculeusement. Dans ce qui suit, $\mathcal{H}$ est le *facteur hyperfini*, algèbre de von Neumann de type $\mathbf{II}_1$.

Mode majeur (ou fermé) La première idée — nouveauté technique radicale de ces notes — est qu'un épistate (non dialectal) est un *graphe* de $\mathcal{H}$. J'entends par là un projecteur $\pi \;\boldsymbol{\eta}\; \mathcal{M}_2(\mathcal{H})$, non nécessairement fermé[15] : plus précisément π peut s'écrire comme la réunion $\bigcup \pi_n$ d'une famille croissante de projecteurs $\pi_n \in \mathcal{M}_2(\mathcal{H})$; autrement dit, π est le « projecteur » correspondant à l'image (dans $\mathcal{L}^2(\mathcal{H}) \oplus \mathcal{L}^2(\mathcal{H})$) d'un opérateur de $\mathcal{M}_2(\mathcal{H})$. Deux épistates $\pi, \nu \;\boldsymbol{\eta}\; \mathcal{M}_2(\mathcal{H})$ sont *polaires* si et seulement si le scalaire :

$$\ll \pi \mid \nu \gg := \mathrm{tr}(\overline{\pi \cap \nu^{\mathrm{op}}}) \tag{13}$$

est non nul. ν^{op} est obtenu à partir de ν en permutant les indices $1, 2$ de $\mathcal{M}_2(\mathcal{H})$; $\pi \cap \nu^{\mathrm{op}}$ dénote le graphe dont l'image est l'intersection des images de π et ν^{op} et dont on prend la clôture.

[15] $\pi \;\boldsymbol{\eta}\; \mathcal{H}$ signifie que π est « affilié » à $\mathcal{H}$, i.e., que $u\pi u* = u$ pour tout unitaire u du commutant de $\mathcal{H}$, voir [Kadison and Ringrose, 1983], p. 342.

L'invariant scalaire Considérons une décomposition de l'identité en somme de deux projecteurs $I = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$; soient $\mathrm{Dom}_{\boldsymbol{a}} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{a} \end{bmatrix}, \mathrm{Dom}_{\boldsymbol{b}} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$. Supposons que φ, π, ν soient des graphes tels que $\pi \subset \mathrm{Dom}_{\boldsymbol{a}}$ (i.e., $\pi \leq \mathrm{Dom}_{\boldsymbol{a}}$), $\nu \subset \mathrm{Dom}_{\boldsymbol{b}}$. On définit $[\varphi]\pi \subset \mathrm{Dom}_{\boldsymbol{b}}$ par son image, sous-espace non nécessairement fermé de $\mathcal{L}^2(\mathcal{H}) \oplus \mathcal{L}^2(\mathcal{H})$:

$$\mathrm{Im}([\varphi]\pi) := \{y \in \boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{b} \ ; \ \exists x \in \boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{b} \quad x + y \in \varphi \text{ et } x^{\mathrm{op}} \in \pi\} \tag{14}$$

On vérifie que :

$$\ll \varphi \mid \pi + \nu \gg \, = \, \ll \varphi \mid \pi \gg + \ll [\varphi]\pi \mid \nu \gg \tag{15}$$

On traite d'abord le cas des graphes clos, puis on passe à la limite en utilisant la continuité ultrafaible de la trace. Cette adjonction est de même structure que celle utilisée dans les versions récentes [Girard, 2007], [Girard, 2011a] de la GdI, dont les principaux acquis seront donc préservés.

Mode mineur (ou ouvert) Dans le mode ouvert — qui correspond à l'évaluation partielle, à la nilpotence, alors que le mode majeur correspond à la cyclicité —, un épistate (non dialectal) est un opérateur $a \in \mathcal{H}$. Deux épistates $a, b \in \mathcal{H}$ sont *polaires* ssi $I - ab$ est inversible. Il n'y a pas d'invariant scalaire en mode mineur ; par contre, si $F, a, b \in \mathcal{H}$ avec $a \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot a = a$, $b \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot b = b$ et si $F \perp a$ on peut définir :

$$[F]a := \boldsymbol{b}a(I - Fa)^{-1}F\boldsymbol{b} \tag{16}$$

En mode mineur, le problème de l'adjonction est celui de la relation entre :

1. $I - F(a + b)$ inversible.
2. $I - Fa$ inversible et $I - ([F]a)b$ inversible.

Sous l'hypothèse « $I - Fa$ inversible », $I - F(a+b)$ est inversible ssi $I - ([F]a)b$ l'est et donc (2) implique (1). La réciproque est obtenue en invoquant l'aspect *dialectal* : en effet, une dichologie contenant b va aussi contenir la somme formelle $b \boldsymbol{+} 0_{\boldsymbol{b}}$ et le « produit tensoriel » logique entre a et $b \boldsymbol{+} 0_{\boldsymbol{b}}$ devient la somme formelle $(a+b) \boldsymbol{+} a$; la dualité requiert l'inversibilité de $(I - F(a+b)) \boldsymbol{+} (I - Fa)$, i.e., l'inversibilité des deux éléments de la somme.

Homogénéisation On peut essayer de rapprocher les deux modes en remarquant qu'un opérateur a peut être remplacé par son graphe $\Gamma(a)$. Si $a \perp b$, alors $\Gamma(a) \cap \Gamma(b)^{\mathrm{op}}$ est d'image $\{x \oplus y \ ; \ y = a(x) \text{ et } x = b(y)\}$; mais, comme $I - ab$ est inversible, l'équation $y = ab(y)$ n'a pas de solution non triviale, et donc $\Gamma(a) \cap \Gamma(b)^{\mathrm{op}} = 0$, i.e., $\ll \Gamma(a) \mid \Gamma(b) \gg = 0$. Une fois de plus, le mode dialectal va nous sauver :

1. En harmonisant les dialectes comme dans [Girard, 2011a], voir 2.3 *infra*, π, ν deviennent respectivement $\pi^\ddagger, \nu^\dagger$ et $\ll \pi \mid \nu \gg := \mathrm{tr}(\overline{\pi^\ddagger \cap \nu^{\mathrm{op}\dagger}})$.
2. En utilisant les projecteurs centraux des dialectes respectifs de π, ν, on peut identifier des « composantes mineures », i.e., des graphes fonctionnels, $\Gamma(\pi_i)$, $\Gamma(\nu_j)$ de π et ν. On demande que ces composantes soient polaires au sens mineur : $I - \pi_i \nu_j$ inversible.

Le gain La clef de la remontée vers les enfers supérieurs, c'est une bonne notion de *gain*. Anticipant sur les définitions de 2.3.2, on dira qu'un épistate $\mathfrak{a} := a \cdot\!+\!\cdot \alpha + A$ est *gagnant* dans la dichologie $\mathbf{A}$ quand :

1. $\mathfrak{a}$ est sans mise, i.e. $a = 0$.
2. A est le graphe $\Gamma(u)$ d'une isométrie partielle.
3. Le dialecte de a est positif ; typiquement s'il est égal à $\mathbb{C}$, cas « sans dialecte ». On peut toujours se ramener au cas où le dialecte est isomorphe au facteur hyperfini $\mathcal{H}$.

Si $\mathfrak{F} \in \mathbf{A} \multimap \mathbf{B}, \mathfrak{a} \in \mathbf{A}$ sont gagnants, alors $[\mathfrak{F}]\mathfrak{a} \in \mathbf{B}$ est gagnant. Et donc, avec $\mathbf{B} := \perp$ (2.4.1, *infra*), si $a \in \mathbf{A}$ est gagnant et si $b \in \sim\!\mathbf{A}$, alors b ne l'est pas.

La normalisation forte La *nilpotence* de Fa, qui implique l'inversibilité de $I - Fa$, induit un développement fini de la clôture transitive dans le graphe $\Gamma(F) \cap (\Gamma(a)^{\mathrm{op}} + \mathrm{Dom}_{\boldsymbol{b}})$:

$$[F]a = \boldsymbol{b}F(a + aFa + aFaFa + \ldots + a(Fa)^{N-1})\boldsymbol{b} \tag{17}$$

Pour combler le fossé entre « $I - Fa$ inversible » et « Fa nilpotent », il faut faire intervenir le *sujet transcendantal* qui s'exprime par le choix d'un *monoïde épidictique* $\mathcal{E}$, voir 2.4.3 *infra*, dont la propriété fondamentale est que :

$$u \in \mathcal{E} \quad \text{et} \quad I - u \ \text{ inversible} \qquad \Rightarrow \qquad u \ \text{ nilpotent} \tag{18}$$

On appelle *démonstration* un épistate gagnant dont l'isométrie partielle sous-jacente est un élément de $\mathcal{E}$. Si $\mathfrak{F} \in \mathbf{A} \multimap \mathbf{B}, \mathfrak{a} \in \mathbf{A}$ sont des démonstrations, alors $[\mathfrak{F}]\mathfrak{a} \in \mathbf{B}$ est une démonstration ; de plus, le produit des isométries partielles sous-jacentes est nilpotent. Conformément à [Girard, 1989a], cette nilpotence apparaît comme la condition de possibilité, la *forme transcendantale*, de la normalisation forte, i.e., de la *terminaison* des réécritures. Il s'agit, *grosso modo*, de se rapprocher de l'idée originale de *matrice de permutation*, ce qui n'a déjà qu'un sens subjectif en dimension finie : rappelons que les matrices sont des opérateurs *subjectifs*, i.e., vus à travers une base.

2.3.2 Mise en scène

La mise en scène de l'adjonction (15) est très proche de celle de [Girard, 2011a] ; la principale innovation consiste en l'abandon de la restriction $\delta(I_{\mathcal{AD}}) \neq 0$ sur les diatraces, ce qui induit une interprétation *non polarisée.*

Support Soit $\mathcal{R}$ le facteur hyperfini de type $\mathbf{II}_\infty$; si $\boldsymbol{a} \in \mathcal{R}$ est un projecteur fini, on considère l'algèbre $\mathcal{R}_{\boldsymbol{a}} := \boldsymbol{a}\mathcal{R}\boldsymbol{a} := \{\boldsymbol{a}u\boldsymbol{a} \,; u \in \mathcal{R}\}$, qui est, si $\boldsymbol{a} \neq 0$, isomorphe au facteur hyperfini de type $\mathbf{II}_1$. On fixe une trace dans $\mathcal{R}$, ce qui fait que $\mathcal{R}_{\boldsymbol{a}}$ hérite d'une trace (non normalisée) par restriction.

Dialecte Un *dialecte* est une algèbre $\mathcal{D}$ finie et hyperfinie, i.e., isomorphe à une sous-algèbre du facteur hyperfini (de type $\mathbf{II}_1$). Un dialecte est équipé d'une *diatrace*, i.e., d'un élément tracial ($\delta(uv) = \delta(vu)$) et hermitien ($\delta(uu^*) \in \mathbb{R}$) du *prédual*, i.e., de l'ensemble des formes linéaires *ultrafaiblement* continues sur $\mathcal{D}$.

Epistates Si $\boldsymbol{a} \in \mathcal{R}$ est un projecteur fini, on appelle *épistate* de support $\boldsymbol{a}$ la donnée, notée $\mathfrak{a} = a \cdot + \cdot \alpha + A$:

1. $a \in \mathbb{R}$, la *mise* de $\mathfrak{a}$, habituellement nulle.
2. α, la *diatrace* sur le *dialecte* (non noté) $\mathcal{A}$ de $\mathfrak{a}$.
3. A, un *graphe*, i.e., un projecteur non clos *affilié* à $\mathcal{M}_2(\boldsymbol{a}\mathcal{R}\boldsymbol{a} \otimes \mathcal{A})$.

Harmonisation Pour mettre en dualité les épistates $\mathfrak{a} = a \cdot + \cdot \alpha + A$ et $\mathfrak{b} = b \cdot + \cdot \beta + B$ de même support $\boldsymbol{a}$, il faut d'abord harmoniser leurs dialectes $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ en $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$; on obtient ainsi $\mathfrak{a}^\ddagger := a\beta(I_\mathcal{B}) \cdot + \cdot \alpha \otimes \beta + A^\ddagger$ (avec $A^\ddagger := A \otimes I_\mathcal{B}$) $\mathfrak{b}^\dagger := b\alpha(I_\mathcal{A}) \cdot + \cdot \alpha \otimes \beta + B^\dagger$ (où $B^\dagger$ est obtenu à partir de $B \otimes I_\mathcal{A}$ au moyen de l'isomorphisme $\mathcal{R} \otimes (\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}) \sim \mathcal{R} \otimes (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$. La même harmonisation sera nécessaire dans le cas du produit tensoriel logique, *infra*.

Dualité $\mathfrak{a} = a \cdot + \cdot \alpha + A$ e $\mathfrak{b} = b \cdot + \cdot \beta + B$ de même support $\boldsymbol{a}$ sont *polaires*, notation $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$, ssi :

$$\ll \mathfrak{a} \mid \mathfrak{b} \gg := a\beta(I_\mathcal{B}) + b\alpha(I_\mathcal{A}) + \mathrm{tr}(\overline{A^\ddagger \cap B^{\mathrm{op}\dagger}}) \neq 0 \tag{19}$$

et si, pour tous projecteurs *centraux* $\mathtt{a} \in \mathcal{A}, \mathtt{b} \in \mathcal{B}$ tels que $A\mathtt{a}$ et $B\mathtt{b}$ soient des graphes fonctionnels[16] $\Gamma(u), \Gamma(v)$:

$$I - (u^\ddagger v^\dagger(\boldsymbol{a} \otimes \mathtt{a} \otimes \mathtt{b})) \quad \text{est inversible.} \tag{20}$$

Inflation Une opération naturelle, liée à l'*autisme* est le *changement de dialecte*, obtenu au moyen d'un isomorphisme φ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}'$ tel que $\alpha'\varphi = \alpha$; par *inflation*, j'entends un changement de dialecte qui ne préserve pas forcément l'identité, typiquement un plongement $\iota = \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}'$ qui transforme $\mathfrak{a}$: $\iota(\mathfrak{a}) := a \cdot + \cdot \alpha \oplus \alpha' + A$. L'inflation peut permettre de détruire la fonctionalité d'un graphe : ainsi, un graphe de $\boldsymbol{a}\mathcal{R}\boldsymbol{a}$, enflé en graphe de $\boldsymbol{a}\mathcal{R}\boldsymbol{a} \otimes \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ perd-il sa fonctionnalité. L'inflation permet donc de se débarrasser à bon compte de la forme mineure de la dualité.

Dichologies On appelle *dichologie* de support $\boldsymbol{a}$ un ensemble $\mathbf{A}$ d'épistates égal à son bipolaire et tel que $\mathbf{A}$ et $\sim\mathbf{A}$ soient stables par inflation. Parmi les dichologies, on distinguera les dichologies *dégénérées* $\mathbf{0}_{\boldsymbol{a}} := \emptyset$ et son polaire $\top$ formé de tous les épistates de support $\boldsymbol{a}$. Dans le cas non dégénéré, la stabilité de $\sim\mathbf{A}$ par inflation est équivalente au fait que les épistates de $\mathbf{A}$ sont *sans mise* : en effet, dans (19), $\beta(I_\mathcal{B})$ peut prendre une valeur arbitraire par inflation, et donc $a = 0$. On peut donc présenter les dichologies non dégénérées comme celles faisant interagir des épistates sans mise.

La polarisation La *polarisation* distingue deux classes duales de propositions : positives (actives : *je* joue) et négatives (passives : *tu* joues). Cette distinction fondamentale est due, pour l'essentiel, à [Andreoli and Pareschi, 1991], bien que son existence *pragmatique* soit plus ancienne, ainsi la restriction au *fragment négatif* à l'œuvre en déduction naturelle, en sémantique des jeux. Il ne

[16] Version légèrement simplifiée : il faut en fait *se donner*, pour chaque épistate $\mathfrak{a}$, une « partie fonctionnelle », i.e., un projecteur central $\mathtt{a} \in \mathcal{A}$ tel que $A\mathtt{a}$ soit un graphe fonctionnel.

s'agit pas de la remettre en cause, mais de connaître son statut exact : doit-elle rester implicite ou faire partie des contraintes bureaucratiques ? Par exemple, mon travail sur la logique classique [Girard, 1991], est basé sur une polarisation *explicite* des exponentielles, que l'on retrouvera plus bas avec la distinction pérenne/co-pérenne ; cette polarisation est la seule façon connue d'éviter l'incohérence au niveau -2. C'est au niveau *parfait* que la question se pose vraiment : la *ludique* [Girard, 2001] est basée sur une polarisation explicite assez pénible. [Girard, 2011a] n'utilise qu'une polarisation allégée et visiblement fautive : la peur d'annulations intempestives dans (19) m'avait conduit à la restriction $\alpha(I_{\mathcal{A}}) \neq 0$. Mais ces annulations sont tout, sauf intempestives ; elles permettent, tout au contraire, de se débarrasser du dernier reliquat de polarisation explicite. En résumé, la polarisation explicite — hors le cas imparfait, pérenne/co-pérenne — n'a pas de statut en syntaxe transcendantale.

2.3.3 Multiplicatifs

Connecteurs Les connecteurs multiplicatifs répondent à la question `Q3` : « Comment réduire un jeu à plusieurs joueurs à un jeu à deux joueurs ? » en introduisant des connecteurs de *socialisation.* L'hypothèse de base est locative : on suppose que les supports $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ des dichologies $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont disjoints, i.e., que $\boldsymbol{ab} = 0$. Si $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ sont de supports respectifs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$, on définit :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b} \quad &:= \quad a\beta(I_{\mathcal{B}}) + b\alpha(I_{\mathcal{A}}) \cdot\!+\!\cdot\, \alpha \otimes \beta + (A^{\ddagger} + B^{\dagger}) \\
\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \quad &:= \quad \sim\sim\{\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}\ ;\ \mathfrak{a} \in \mathbf{A},\ \mathfrak{b} \in \mathbf{B}\}
\end{aligned}$$

Et, par dualité, $\mathbf{A} \parr \mathbf{B} := \sim(\sim\mathbf{A} \otimes \sim\mathbf{B})$, $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B} := \sim\mathbf{A} \parr \mathbf{B} = \sim(\mathbf{A} \otimes \sim\mathbf{B})$.

L'adjonction L'associativité des multiplicatifs résulte d'une *adjonction* qui fait apparaître, $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ comme l'« espace des fonctions », au choix, de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{B}$ ou de $\sim\mathbf{B}$ dans $\sim\mathbf{A}$. Si $\mathfrak{f} := f \cdot\!+\!\cdot\, \varphi + F$, $\mathfrak{a} := a \cdot\!+\!\cdot\, \alpha + A$ sont des épistates de supports $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{a}$, on définit l'*application* $[\mathfrak{f}]\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{f}$ à $\mathfrak{a}$ dans le style de (14) :

$$[\mathfrak{f}]\mathfrak{a} := f\alpha(I_{\mathcal{A}}) + a\varphi(I_{\mathcal{F}}) + \mathrm{tr}(\overline{F^{\ddagger} \cap A^{\mathrm{op}\dagger}}) \cdot\!+\!\cdot\, \varphi \otimes \alpha + [F^{\ddagger}]A^{\dagger} \tag{21}$$

sous la réserve suivante, qui prend en compte le « mode mineur[17] » :

Pour tous projecteurs *centraux* $\mathtt{f} \in \mathcal{F}, \mathtt{a} \in \mathcal{A}$ tels que $F\mathtt{f} = \Gamma(u)$ et $A\mathtt{a} = \Gamma(v)$ soient fonctionnels, $I - u^{\ddagger}v^{\dagger}(\mathtt{f} \otimes \mathtt{a})$ est inversible.

Si $\mathbf{B} \neq \mathsf{T}_{\boldsymbol{b}}$, on voit que $\mathfrak{f} \in \mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ ssi pour tout $\mathfrak{a} \in \mathbf{A}$, l'application $[\mathfrak{f}]\mathfrak{a}$ est définie et appartient à $\mathbf{B}$. Un exemple typique est la mal nommée « fonction identique » : *délocalisons* $\mathbf{A}$, de support $\boldsymbol{a}$ au moyen de l'isométrie partielle φ en $\boldsymbol{a}'$ disjoint de $\boldsymbol{a}$; l'épistate *sans dialecte* (i.e., de dialecte $\mathbb{C}$ et diatrace 1) $\mathfrak{id}_{\varphi} := 0 \cdot\!+\!\cdot\, 1 + \Gamma(\varphi + \varphi^*)$ est un élément de $\mathbf{A} \multimap \varphi(\mathbf{A})$. On voit facilement que, pour $\mathfrak{a} \in \mathbf{A}$, $[\mathfrak{id}_{\varphi}]\mathfrak{a} = \varphi\mathfrak{a}\varphi^*$; dualement, pour $\mathfrak{a}' \in \varphi(\mathbf{A})$, $[\mathfrak{id}_{\varphi}]\mathfrak{a}' = \varphi^*\mathfrak{a}'\varphi$. Les multiplicatifs sont commutatifs et associatifs ; mais ils n'ont pas d'éléments neutres, du moins parmi les dichologies proprement dites, voir 2.4.1 *infra.*

[17] Voir note 16.

La locativité Le *même* $\mathfrak{f}$ peut être vu comme fonction allant de $\mathbf{A}$ vers $\mathbf{B}$ ou de $\sim\mathbf{B}$ vers $\sim\mathbf{A}$, alors que le bon sens catégorique distingue le morphisme $\mathfrak{f}$ de son adjoint[18] $\mathfrak{f}^*$. *Modulo* la dualité, c'est de la *commutativité* du produit tensoriel qu'il s'agit. Dans le monde catégorique, un produit tensoriel non dégénéré *ne peut pas* être commutatif : la « commutativité » catégorique s'exprime sous forme d'isomorphismes et de diagrammes de cohérence. L'égalité — que les catégoriciens dans leur dogmatisme, décriraient comme un *isomorphisme qui s'ignore* —, nous situe par-delà les catégories. Au niveau -4, $[[\mathfrak{f}]\mathfrak{a}]\mathfrak{b} = [[\mathfrak{f}]\mathfrak{b}]\mathfrak{a}$, ce qui se comprend, puisque $[\mathfrak{f}]\mathfrak{a}$ signifiant « brancher $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{a}$ », etc. $[[\mathfrak{f}]\mathfrak{a}]\mathfrak{b}$ et $[[\mathfrak{f}]\mathfrak{b}]\mathfrak{a}$ décrivent *le même* branchement. Ce qui ne contredit pas le fait que $f(a,b) \neq f(b,a)$; en effet, pour obtenir une catégorie, il faut quotienter par la *localisation* : ce n'est qu'ainsi que la *rallonge* de 1.2.4 dont la seule utilité est de *délocaliser*, peut devenir morphisme *identité*. Après délocalisation, $[[\mathfrak{f}]\mathfrak{a}']\mathfrak{b}'' \neq [[\mathfrak{f}]\mathfrak{b}']\mathfrak{a}''$, d'où les isomorphismes canoniques et leurs fastidieux diagrammes de cohérence !

L'opposition locatif/spirituel L'opposition existence/essence se décline ainsi en *locatif/spirituel.* Le locatif est tout ce qui est enraciné, le spirituel est à délocalisation près. À l'époque des particularismes en tout genre, il ne s'agit pas de mettre en cause le spirituel, tout au plus de remarquer qu'il résulte d'une *construction.* Ainsi, en théorie des ensembles, l'union (locative) est-elle souvent remplacée par « la » somme disjointe (spirituelle). De façon moins évidente, « le » produit cartésien (spirituel) est la délocalisation d'une opération bien cachée, le *produit locatif* :

$$a \uplus\!\!\!\!\times\; b := \{x \cup y \; ; \; x \in a, \; y \in b\} \tag{22}$$

Le produit locatif permet d'écrire le *mystère de l'incarnation* de [Girard, 2001] comme une *égalité* et non pas un isomorphisme :

$$|\mathbf{A} \cap \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \uplus\!\!\!\!\times\; |\mathbf{B}| \tag{23}$$

Qui repose sur l'identité $\wp(a \cup b) = \wp(a) \uplus\!\!\!\!\times\; \wp(b)$, analogue ensembliste de l'identité fondamentale des exponentielles, voir (30) *infra.*

2.3.4 Les règles structurelles

La structuration de la logique Les règles structurelles (*échange*, *affaiblissement*, *contraction*) définissent la logique *classique.* La logique *intuitionniste* — c'est en fait une des découvertes de [Girard, 1987a] — est définie par la restriction aux règles structurelles *gauches* (en particulier au refus du raisonnement par l'absurde qui correspond à la contraction droite). La logique *linéaire* est caractérisée par le rejet de la contraction et, accessoirement, de l'affaiblissement : au niveau -2, la contraction fait apparaître une dépendance quadratique, alors que l'affaiblissement introduit une dépendance affine ; le rejet de ces deux règles correspond ainsi à une dépendance linéaire. Au niveau -4, le rejet de la contraction et de l'affaiblissement correspondent à l'impossibilité de la *réutilisation* et de l'*effacement* des hypothèses : on est ainsi dans un mode *parfait* au sens linguistique de l'opposition entre *perfectif* et *imperfectif.*

[18] L'anse à gauche ou l'anse à droite ? Toujours la même métastase de l'objet.

Affaiblissement L'*affaiblissement* correspond à l'implication $(A \otimes B) \multimap A$, autrement dit à l'*effacement*, ici, le fait d'« oublier » l'hypothèse B. Ce principe est faux dans le cas de dichologies $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ non dégénérées : $\mathfrak{f} \in \mathbf{A} \multimap \mathbf{C}$ ne peut pas être vu comme un élément de $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \multimap \mathbf{C}$. En effet, si $\mathfrak{a} \in \mathbf{A}, \mathfrak{b} \in \mathbf{B}$, on aurait $[f](a \otimes b) = 0 \cdot + \cdot \varphi \otimes \alpha \otimes \beta + [F^\ddagger]A^\dagger \otimes I_\mathcal{B}$, et pour tout $\mathfrak{c} \in \sim\mathbf{C}$, $\ll [\mathfrak{f}](\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}) \mid \mathfrak{c} \gg = \beta(1_\mathcal{B}) \ll [\mathfrak{f}]\mathfrak{a} \mid \mathfrak{c} \gg$, ce qui est incompatible avec l'*inflation* qui permet d'annuler $\beta(1_\mathcal{B})$. L'abandon de la restriction $\beta(1_\mathcal{B}) \neq 0$ à l'œuvre dans [Girard, 2011a] produit ainsi un « petit miracle » : l'abandon de la polarisation dans le cas parfait, ce qui simplifie profondément l'architecture logique. Rappelons que la polarisation permet l'affaiblissement, littéralement pour une des deux polarités, *modulo* changement de polarité pour l'autre.

Mélange L'abandon de l'affaiblissement fait apparaître la règle de *mélange* — ou encore *mix* — qui exprime l'implication $(A \otimes B) \multimap A \parr B$. Cette règle, sans problème au niveau -2, contredit la condition de *connexité* des réseaux. Elle a été passionnément discutée depuis le début de la logique linéaire ; malgré une tenue technique somme toute honorable, je n'ai jamais été convaincu sans pour autant trouver d'argument tranchant. Ici, le rejet est rédhibitoire : *Mix* nous dit que, si $\mathfrak{a} \in \mathbf{A}, \mathfrak{b} \in \mathbf{B}$, alors $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b} \in \mathbf{A} \parr \mathbf{B}$; mais, si $\mathfrak{a}' \in \mathbf{A}, \mathfrak{b}' \in \mathbf{B}$, $\ll \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b} \mid \mathfrak{a}' \otimes \mathfrak{b}' \gg = \beta(1_\mathcal{B})\beta'(1_{\mathcal{B}'}) \ll \mathfrak{a} \mid \mathfrak{a}' \gg + \alpha(1_\mathcal{A})\alpha'(1_{\mathcal{B}'}) \ll \mathfrak{b} \mid \mathfrak{b}' \gg$ peut être annulé facilement au moyen d'inflations annulant $\beta(1_\mathcal{B})$ et $\alpha(1_\mathcal{A}$.

Contraction La règle structurelle de très loin la plus importante est la *contraction*, qui permet la réutilisation : c'est, en fait, la condition de possibilité, la forme transcendantale, de l'*infini*, nouveauté majeure de [Girard, 1987a]. Cet infini se décline statiquement (les cardinaux) ou dynamiquement (la complexité algorithmique). La contraction est caractéristique de la répétition, représentée dans le langage naturel par l'imparfait de l'indicatif ou les verbes *perfectifs* en russe. La contraction $A \multimap (A \otimes A)$ suppose un épistate $\mathfrak{Contr} \in \mathbf{A} \multimap (\mathbf{A}' \otimes \mathbf{A}")$, avec la propriété que, pour $\mathfrak{a} \in \mathbf{A}$, $[\mathfrak{Contr}]\mathfrak{a}$ est le produit tensoriel $\mathfrak{a}' \otimes \mathfrak{a}"$ de deux délocalisations de $\mathfrak{a}$. Ceci n'est pas possible, car on ne pourra pas produire le dialecte $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ de $\mathfrak{a}' \otimes \mathfrak{a}"$ à partir de $\mathcal{A}$... sauf en l'absence de dialecte, i.e., si $\mathcal{A} = \mathbb{C}$. Ceci est impossible dans le cadre présent, mais le sera avec les *dichologies pérennes*, voir 2.4.1. Le refus de la contraction est habituellement expliqué (au niveau -1) par une notion de *ressource* assez amusante, mais un peu superficielle[19], à laquelle je propose de substituer, au niveau -4, la *dimension* du dialecte ; un produit tensoriel requiert ainsi le produit des ressources.

Échange L'*échange* correspond à la commutativité, i.e., $(A \otimes B) \multimap (B \otimes A)$; les tentatives de logique non commutative, malgré un bilan honorable, e.g., [Abrusci and Ruet, 2000], ne trouvent pas de place dans l'état actuel de la syntaxe transcendantale : le produit tensoriel logique se présente comme une opération désespérément commutative. Seule piste, l'aspect dialectal, sans doute un peu trop « commutatif » : il y a peut être des cadres plus généraux qu'un simple produit tensoriel $\mathcal{R} \otimes \mathcal{D}$, voir 2.3.6 *infra*. Mais le remède ne doit pas être pire que le mal : sous prétexte de « logique non commutative », on a souvent produit des horreurs, certes non commutatives, mais plus guère logiques.

[19]Voir le menu de Lafont dans [Girard, 2007].

2.3.5 La logique parfaite

La logique parfaite se définit par l'absence de règle structurelle autre que l'échange. Il s'agit donc de l'étude des dichologies et de leurs principaux connecteurs : outre les multiplicatifs, les additifs et la quantification du second ordre.

Changement de support Un épistate est supposé avoir un *support* $\boldsymbol{a} \in \mathcal{R}$. Il est possible de changer le support par *délocalisation*, i.e., au moyen d'une isométrie partielle envoyant $\boldsymbol{a}$ sur $\boldsymbol{a}'$; plus prosaïquement, on peut procéder à une *inflation* du support, i.e. considérer que $\mathfrak{a}$ de support $\boldsymbol{a}$ est aussi de support $\boldsymbol{a}' \geq \boldsymbol{a}$. De façon pédante, on fera intervenir la notation $\iota_{\boldsymbol{a}'}(\mathfrak{a})$. Une dichologie $\mathbf{A}$ de support $\boldsymbol{a}$ devient alors l'*éthique*[20] $\iota_{\boldsymbol{a}'}(\mathbf{A})$ de support $\boldsymbol{a}'$:

$$\iota_{\boldsymbol{a}'}(\mathbf{A}) := \{\iota_{\boldsymbol{a}'}(\mathfrak{a}) \; ; \; \mathfrak{a} \in \mathbf{A}\} \tag{24}$$

Ce qui coexiste avec la possibilité duale :

$$\widetilde{\iota_{\boldsymbol{a}'}}(\mathbf{A}) := \sim\iota_{\boldsymbol{a}'}(\sim\mathbf{A}) \tag{25}$$

Additifs Si les supports $\boldsymbol{a}, \mathbf{b}$ des dichologies $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont disjoints, on définit :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{A} \oplus \mathbf{B} & := & \sim\sim(\iota_{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}(\mathbf{A}) \cup \iota_{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}(\mathbf{B})) \\ \mathbf{A} \,\&\, \mathbf{B} & := & \widetilde{\iota_{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}}(\mathbf{A}) \cap \widetilde{\iota_{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}}(\mathbf{B}) \end{array}$$

Un *gymkhana* amusant [Girard, 2011a] montre que ces définitions sont duales :

$$\sim(\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}) \;=\; \sim\mathbf{A} \,\&\, \sim\mathbf{B} \tag{26}$$

Les additifs sont commutatifs et associatifs, d'éléments neutres les dichologies dégénérées de support 0, $\mathbf{0} := \emptyset$ pour $\oplus$, $\top := \top_{\mathbf{0}}$ pour &. $\otimes$ distribue sur $\oplus$ (dualement, $⅋$ sur &) ; $\mathbf{0}$ (resp. $\top$) est donc absorbant pour $\otimes$ (resp. $⅋$).

Quantificateurs du second ordre Les quantificateurs du second ordre $\forall\mathbf{X}\mathbf{A}$ (et $\exists\mathbf{X}\mathbf{A} := \sim\forall\mathbf{X}\sim\mathbf{A}$) réfèrent aux propositions, i.e., aux dichologies. J'illustre la construction fastidieuse de [Girard, 2011a] par l'exemple de $\forall\mathbf{X}(\mathbf{X} \multimap \varphi(\mathbf{X}))$, où φ délocalise le support $\boldsymbol{a}$ de $\mathbf{X}$ en $\boldsymbol{a}'$ disjoint ; alors $\mathrm{tr}(\boldsymbol{a}') = \mathrm{tr}(\boldsymbol{a})$. Choisissons $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{b}' = \psi(\boldsymbol{b})$ disjoints et disjoints de $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}'$. Si $\mathrm{tr}(\boldsymbol{b}) \geq \mathrm{tr}(\boldsymbol{a})$, on prend pour dialecte $\mathcal{H}$ (le facteur hyperfini) et on choisit un projecteur $\pi \in \mathcal{H}$ tel que $\mathrm{tr}(\boldsymbol{a}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{a}')\mathrm{tr}(\pi)$. Soit θ une isométrie partielle de $\boldsymbol{a} \otimes 1_{\mathcal{H}}$ sur $\boldsymbol{a}' \otimes \pi$, et soit $\theta' := (\psi \otimes \pi)\theta(\varphi^* \otimes 1_{\mathcal{H}})$; alors $\mathfrak{Extr}_{\psi,\theta} := 0 \cdot + \cdot \mathrm{tr}_{\mathcal{H}} + \Gamma(\theta + \theta^*)$ transforme tout épistate de support $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}'$ en un épistate de support $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}'$. On définit de la même façon $\mathfrak{Extr}_{\psi,\theta}$ quand $\mathrm{tr}(\boldsymbol{b}) \leq \mathrm{tr}(\boldsymbol{a})$. $\forall\mathbf{X}(\mathbf{X} \multimap \varphi(\mathbf{X}))$ de support $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}'$ est obtenu au moyen d'une quantification sur tous les $\mathbf{B}$ et leurs supports $\boldsymbol{b}$:

$$\forall\mathbf{X}(\mathbf{X} \Rightarrow \varphi(\mathbf{X})) := \{\mathfrak{a} \; ; \; \forall\boldsymbol{b}\forall\psi\forall\theta\forall\mathbf{B} \; [\mathfrak{Extr}_{\psi,\theta}]\mathfrak{a} \in (\mathbf{B} \multimap \psi(\mathbf{B}))\} \tag{27}$$

En particulier, $\mathfrak{id}_{\varphi} \in \forall\mathbf{X}(\mathbf{X} \Rightarrow \varphi(\mathbf{X}))$. $\mathfrak{Extr}$ correspond à l'*extraction* introduite par [Girard, 1971], i.e., à l'implication $(\forall XA) \multimap A[B/X]$.

[20] Ensemble d'épistates de base donnée, sans hypothèse particulière, voir *infra*.

2.3.6 La complétude

La logique parfaite a une relative dimension apodictique ; ce que l'on peut relier à la *complétude.* Mais que recouvre au juste ce terme ?

Le fétichisme du réel Dans [Girard, 1999b], j'ai parodié la « logique » philosophique au moyen d'une *logique des broccoli* qui, bien qu'inepte, est complète pas rapport aux *modèles de broccoli* : le *broccolo libre* est en fait la syntaxe, réifiée du seul fait de l'utilisation d'une autre police de caractères. La véritable justification de ce type d'indignité — dont on peut donner des milliers d'exemples — se trouve plutôt dans l'impératif « Publish or perish »! Face à ce *fétichisme* d'un réel purement spéculatif — ou plutôt *spéculaire* : l'image renvoyée par un miroir (très) complaisant —, quelle place donner au théorème de complétude ?

Complétude et élimination des coupures J'ai remarqué, il y presque trente ans, dans mon livre [Girard, 1987b] que les conditions de complétude pour la « vraie » logique sont exactement celles de l'élimination des coupures. En fait, l'élimination des coupures établit une espèce de complétude *interne* : son corollaire, la *propriété de la sous-formule* dit que tout ce dont on a besoin est déjà là, que rien ne manque. L'élimination des coupures étant formulée dans un cadre bureaucratique, contingent, on ne peut pas exploiter directement cette observation essentielle ; il en va tout autrement en syntaxe transcendantale.

La complétude interne La complétude peut s'exprimer vaguement ainsi : on se donne des constructions, on les interprète et on découvre qu'« il ne manque rien ». J'exprime les *constructions* au moyen d'une *éthique*, i.e., un ensemble $\mathbf{E}$ d'épistates de support $\boldsymbol{a}$ donné : typiquement les épistates obtenus par traduction des démonstrations de A en GdI. L'*interprétation* consiste en tous les tests déontiques acceptés par $\mathbf{E}$, i.e., par la dichologie $\sim\mathbf{E}$. Dire qu'« il ne manque rien », c'est dire que la dichologie $\mathbf{A} := \sim\sim\mathbf{E}$ est égale à $\mathbf{E}$; comme c'est irréaliste, on se contentera d'une *équivalence.*

Congruence En fait, toute dichologie $\mathbf{A}$ induit une *congruence* $\cong_{\mathbf{A}}$ entre épistates de support $\boldsymbol{a}$ pas forcément dans $\mathbf{A}$:

$$\mathfrak{a} \cong_{\mathbf{A}} \mathfrak{a}' \quad \Leftrightarrow \quad \forall \mathfrak{b} \in \sim\mathbf{A} \;\; \ll \mathfrak{a} \mid \mathfrak{b} \gg \, = \, \ll \mathfrak{a}' \mid \mathfrak{b} \gg \tag{28}$$

Ce qui est, en fait une équivalence partielle (l'égalité suppose que $\ll \mathfrak{a} \mid \mathfrak{b} \gg$ soit défini). On munit alors l'espace quotient d'une structure d'espace vectoriel réel : $(0 \cdot\!+\!\cdot \alpha + A) \,\mathbf{+}\, (0 \cdot\!+\!\cdot \alpha' + A') \cong_{\mathbf{A}} 0 \cdot\!+\!\cdot (\alpha \oplus \alpha') + (A \oplus A')$, $\lambda\mathbf{.}(0 \cdot\!+\!\cdot \alpha{+}A) \cong_{\mathbf{A}} 0 \cdot\!+\!\cdot \lambda\alpha{+}A$. Cette relation est compatible avec les opérations logiques : on est ici au niveau -2. La complétude interne devient :

$$\forall \mathfrak{a} \in \mathbf{A} \; \exists \mathfrak{e} \in \mathbf{E} \quad \mathfrak{a} \cong_{\mathbf{A}} \mathfrak{e} \tag{29}$$

Complétude forte Dans [Girard, 2001] la complétude interne est établie pour la logique parfaite, ce qui, avec un peu de transpiration, induit une complétude *externe* : les classes d'équivalence d'épistates gagnants ont des témoins syntaxiques. Ce type de complétude a été qualifiée de « forte » par certains auteurs : elle s'établit au niveau -2 et non pas au niveau -1, qui ne parle que de *prouvabilité* et non pas de preuves.

Propriété de la disjonction La propriété la plus spectaculaire de la logique intuitionniste dit que si $A \vee B$ est prouvable, alors un des deux l'est. Par leur nature spéculaire, les modèles de Kripke sont incapables d'expliquer ce phénomène : pour ne fâcher personne, ils considèrent la logique classique — donc le tiers-exclu $A \vee \neg A$ — comme un cas particulier de logique intuitionniste ! La bonne explication est à chercher dans la complétude interne : on propose deux façons de construire $A \vee B$, une par A, une par B, on clôt par conséquence logique et on découvre que l'on n'avait rien oublié. Revenons à la GdI : la disjonction additive $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$ est définie, aux changement de support près, comme le bipolaire de $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$. La complétude interne de la disjonction s'exprime ainsi : tout épistate de $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$ est congru à un épistate de $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$, voir [Girard, 2011a].

Conjonction additive Pour la conjonction additive, la complétude s'exprime ainsi : tout épistate de $\mathbf{A} \,\&\, \mathbf{B}$ est congru à une somme $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ d'un épistate de $\mathbf{A}$ et d'un épistate de $\mathbf{B}$. L'intersection du niveau -4 se traduit par un produit cartésien au niveau -2. C'est l'analogue du « mystère de l'incarnation » de [Girard, 2001] : la congruence, tout comme l'incarnation, permet de déléguer le niveau -4 aux niveaux -3 ou -2.

Conjonction multiplicative La complétude multiplicative s'exprimerait ainsi : tout épistate de $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ est congru au produit tensoriel $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}$ d'un épistate de $\mathbf{A}$ et d'un épistate de $\mathbf{B}$. Je ne sais pas démontrer ce résultat qui requiert peut-être une modification du format de la GdI : on voudrait pouvoir, à partir de $\mathfrak{a}' \in \sim\mathbf{A}$ et $\mathfrak{b}' \in \sim\mathbf{B}$, construire un épistate $\mathfrak{a}' \parr \mathfrak{b}' \in \sim\mathbf{A} \parr \sim\mathbf{B}$ tel que, pour tous $\mathfrak{a} \in \mathbf{A}, \mathfrak{b} \in \mathbf{B}$, $\ll \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b} \mid \mathfrak{a}' \parr \mathfrak{b}' \gg \; = \; \ll \mathfrak{a} \mid \mathfrak{a}' \gg \ll \mathfrak{b} \mid \mathfrak{b}' \gg$. Pour cela, il faudrait une disposition plus générale, « non commutative », du contexte : par exemple, $(\boldsymbol{a}\mathcal{R}\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}\mathcal{R}\boldsymbol{b}) \oplus (\boldsymbol{b}\mathcal{R}\boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{a}\mathcal{R}\boldsymbol{a}) \rtimes \sigma$, où σ est le « twist ».

L'apodictique revient ! Le théorème de séquentialisation est à l'origine de la GdI, en particulier de la complétude interne. Cette explication finitaire de la logique — un nombre fini de tests — peut être considérée comme *apodictique*. Ce qui m'amène à nuancer mon tir de barrage et poser la question suivante : est-il possible de définir une syntaxe transcendantale *finitaire* pour la logique parfaite, par exemple utilisant des algèbres de dimension finie ? Ce qui recoupe, avec des nuances importantes près, la thématique des réseaux additifs [Girard, 1996].

2.4 Enjeux fondationnels

2.4.1 L'imperfection

La vraie question est celle de l'infini et de sa forme transcendantale, l'*imperfection*.

Dichologies pérennes La *contraction*, i.e., la duplication, la réutilisation, n'est possible qu'en l'absence de dialecte (et de mise). Un épistate est dit *pérenne* s'il est obtenu par inflation *positive* (i.e., en plongeant son dialecte $\mathbb{C}$ dans un autre dialecte, de diatrace *positive*) à partir d'un épistate $0 \cdot + \cdot 1 + A$ sans mise et sans dialecte, « 1 » référant à la trace $1.z := z$ de $\mathbb{C}$. Suivant un usage bien établi (démocratie *populaire*, justice *militaire*, logique *épistémique*), un adjectif peut avoir une valeur *dénégative*. Je propose donc la notion de dichologie *pérenne* : j'entends par là un ensemble d'épistates de base $\boldsymbol{a}$, bipolaire d'un ensemble d'épistates pérennes. Les dichologies pérennes et leurs polaires, les dichologies *co-pérennes* forment les dichologies *imparfaites*. Une dichologie co-pérenne contient tous les $\lambda \cdot\!+\!\cdot\, \alpha{+}0$ pour $\lambda \neq 0$: ce qui montre qu'une dichologie pérenne ne vérifie pas l'inflation, donc n'est *jamais* une dichologie. Avec une exception, les dichologies dégénérées : $\mathbf{0}$ est pérenne, alors que $\top$ est co-pérenne. Les dichologies pérennes vérifient la contraction : [Girard, 2011a] présente un épistate $\mathfrak{Contr} \in \mathbf{A} \multimap (\varphi(\mathbf{A}) \otimes \psi(\mathbf{A}))$ qui utilise le dialecte $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Une dichologie pérenne vérifie aussi l'affaiblissement, i.e., l'inclusion $\iota_{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}(\mathbf{B}) \subset \mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ quand $\mathbf{A}$ est pérenne : un élément de $\mathbf{B}$ peut être vu comme une fonction de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{B}$ qui ne « regarde » pas son argument.

Logique de la pérennité Je viens d'utiliser les connecteurs multiplicatifs dans le cas pérenne : si $\mathtt{p}$ correspond à « pérenne », $\mathtt{s}$ à standard, sous les formes $\mathtt{p} \multimap \mathtt{p} \otimes \mathtt{p}$ (contraction) et $\mathtt{p} \multimap \mathtt{s}$ (affaiblissement). Il n'y a pas de problème pour définir les opérations, mais il ne faudrait pas sortir de notre typologie : on voit facilement que $\mathtt{p} \otimes \mathtt{p} = \mathtt{p}$, $\mathtt{p} \otimes \mathtt{s} = \mathtt{s} \otimes \mathtt{p} = \mathtt{s}$ et donc $\mathtt{p} \multimap \mathtt{s} = \mathtt{s}$. Ce qui permet d'écrire l'affaiblissement ; par contre la formule qui exprime la contraction sort de notre cadre ; qu'à cela ne tienne, on peut la remplacer par une règle — en fait sa formulation en termes de séquents —, qui permet de passer de $\varphi(\mathbf{A}) \otimes \psi(\mathbf{A}) \multimap \mathbf{B}$ à $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$, quand $\mathbf{A}$ est pérenne et $\mathbf{B}$ est standard. Les dichologies imparfaites de support 0 : $\mathbf{1} := \{0 \cdot\!+\!\cdot\, \alpha + 0\ ;\ \alpha \geq 0\}$ (pérenne) et $\perp := \{\lambda \cdot\!+\!\cdot\, \alpha + 0\ ;\ \lambda \neq 0\}$ (co-pérenne) sont, en fait, les éléments neutres multiplicatifs. Ce qui est peut-être le point final à un très long débat, celui du statut des éléments neutres multiplicatifs, en particulier, des réseaux avec éléments neutres. L'élément neutre appartient, pour de bonnes raisons, à une autre typologie : il est donc impossible de former $\mathbf{1} \parr \mathbf{1}$, source bien connue de problèmes ennuyeux et marginaux. La disjonction additive se comporte bien par rapport à la pérennité, c'est ainsi que $\mathtt{p} \oplus \mathtt{p} = \mathtt{p}$, $\mathtt{p} \oplus \mathtt{s} = \mathtt{s} \oplus \mathtt{p} = \mathtt{s}$.

Les exponentielles À toute dichologie $\mathbf{A}$, on associe une dichologie *pérenne* $!\mathbf{A}$ (ou co-pérenne $?\mathbf{A} := \sim!\!\sim\!\mathbf{A}$), de telle façon que :

$$!(\mathbf{A} \,\&\, \mathbf{B}) = !\mathbf{A} \otimes !\mathbf{B} \tag{30}$$

Autrement dit, ! transforme la conjonction additive en conjonction multiplicative, d'où son nom d'*exponentielle* ; (30) est une égalité, pas un simple isomorphisme. La construction utilisée dans [Girard, 2011a] utilise un groupe *moyennable* $\mathfrak{G}$ contenant une copie M du monoïde libre. Le produit en couronne $\mathcal{H}^{[|\mathfrak{G}|]} \rtimes \mathfrak{G}$ est isomorphe au facteur hyperfini ; le plongement :

$$\Omega : \mathcal{R} \otimes \mathcal{H} \simeq \mathcal{R} \otimes \mathcal{H}^{[M]} \subset \mathcal{R} \otimes (\mathcal{H}^{[|\mathfrak{G}|]} \rtimes \mathfrak{G}) \simeq \mathcal{R}$$

permet d'associer à tout épistate $\mathfrak{a} = 0 \cdot\!+\!\cdot\, \mathrm{tr} + A$ de dialecte $\mathcal{H}$ et de support $\boldsymbol{a}$ l'épistate pérenne $0 \cdot\!+\!\cdot\, 1 + \mathcal{M}_2(\Omega)(A)$ de support $\Omega(\boldsymbol{a} \otimes 1_{\mathcal{H}})$. On définit alors :

$$!\mathbf{A} \quad := \quad \sim\sim\{\Omega(\mathfrak{a}) \boldsymbol{+} (0 \cdot\!+\!\cdot\, \alpha + 0);\ ;\ \mathfrak{a} = 0 \cdot\!+\!\cdot\, \mathrm{tr} + A \in \mathbf{A} \quad \alpha \geq 0\} \tag{31}$$

Le monoïde libre M permet d'intérioriser le produit tensoriel des dialectes et de justifier ainsi la fonctorialité de « ! » :

$$!(\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}) \quad \multimap \quad (!\mathbf{A} \multimap !\mathbf{B}) \tag{32}$$

LLL Les dichologies pérennes ont une vie sociale restreinte au produit tensoriel, à la disjonction additive et au côté gauche d'une implication. Il est donc essentiel de pouvoir « dépérenniser », i.e., transformer une dichologie pérenne en une « vraie » dichologie. La seule solution raisonnable est de le faire à travers une implication $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$, avec $\mathbf{B}$ où $\mathbf{B}$ est une dichologie. La combinaison $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B} := !\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ — l'implication intuitionniste décomposée comme dans [Girard, 1987a] — est donc la façon d'intégrer l'exponentielle aux dichologies. Avec un petit problème, car les principes :

$$!\mathbf{A} \quad \multimap \quad \mathbf{A} \tag{33}$$

$$!\mathbf{A} \quad \multimap \quad !!\mathbf{A} \tag{34}$$

qui énoncent la *pérennité de la pérennité* ne fonctionnent plus au niveau -4. Il ne s'agit pas d'un défaut, cet effet a été recherché : si l'on peut développer la GdI au type $\mathbf{I}_\infty$, il est probable que (33–34) seront vérifiés. Mais je tiens ces principes pour des erreurs thomistes. On remplacera donc $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}$ par $\mathbf{A} \Rightarrow \S\mathbf{A}$, comme dans [Girard, 1998]. Dans [Girard, 2011a], on étend Ω aux épistates de dialecte $\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}$: à $\mathfrak{a} = 0 \cdot\!+\!\cdot \mathrm{tr} \ominus \mathrm{tr} + A$, on associe $0 \cdot\!+\!\cdot 1 \ominus 1 + \mathcal{M}_2(\Omega)(A)$ de dialecte $\mathbb{C} \ominus \mathbb{C}$ et on définit $\S\mathbf{A}$ comme (31). Comme tout épistate de $\mathbf{A}$ est congru à un épistate de dialecte $\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}$, $\S\mathbf{A}$ ressemble beaucoup à $\mathbf{A}$: la différence principale est que le dialecte d'origine est devenu *public*.

Niveaux défectifs Un réflexe conditionné amène a chercher des justifications aux niveaux supérieurs pour les subtitilités du niveau -4. C'est négliger la *défectivité* (au sens des verbes défectifs) ; on a déjà observé que la mauvaise logique ne vit qu'au niveau -1[21]. Symétriquement, la bonne logique peut avoir des problèmes aux niveaux supérieurs. Par exemple, la complétude interne de la disjonction additive justifie le principe :

$$\forall X(A \vee B) \quad \Rightarrow \quad \forall X A \ \vee \ \forall X B \tag{35}$$

qui n'a aucune espèce de justification aux niveaux -1 ou -2, car il repose sur la *locativité*. Évidemment, ce n'est pas (35) qui est fautif, c'est l'idée de l'*autonomie* des niveaux supérieurs. Ainsi, les catégories sont inopérantes face à l'étude fine de l'exponentiation, en particulier de **LLL**.

La pérennisation La distinction parfait/imparfait définit une ligne de partage informelle entre une *quasi-apodictique* — la logique parfaite, *grosso modo* multiplicatifs et additifs — et un monde du *doute légitime*, celui des exponentielles. On a cherché à minimiser ce doute en le préformatant, par exemple, en réduisant l'infini à sa dimension ensembliste, les *cardinaux*. La logique linéaire, la GdI, font apparaître l'infini comme conséquence de la pérennité, autrement dit des exponentielles, domaine beaucoup plus ouvert que les cardinaux. Deux options :

La certitude thomiste : l'*infini*, infiniment infini dans son infinité : c'est Claudel qui monte au Ciel en *pullman*. Cette exponentielle « classique » vérifie (33–34) et hérite des certitudes fondationnelles : c'est un point de vue rassurant, mais aussi une aporie.

[21]Remarque en partie sociologique : on pourrait faire de la mauvaise logique au niveau -2, mais la compréhension de ce niveau suppose un certain bon goût.

L'ICONOCLASME : : il y a autant d'infinis que d'exponentielles (raisonnables). En fait, la différence entre systèmes formels qu'on ne sait pas expliquer au niveau -1 — c'est ce que dit l'incomplétude : un seul modèle, plusieurs systèmes — pourrait n'être qu'une question d'exponentielle appropriée. On est ici en pleine *défectivité* : ces nuances ne vivent qu'au niveau -4.

Parmi les paramètres de l'exponentiation :

L'ALGÈBRE : le type de l'algèbre influe profondément sur la pérennisation. Serait-il possible de faire cohabiter la pérennisation classique avec les pérennisations iconoclastes ?

L'ISOMORPHISME : Ω n'est sûrement pas le seul isomorphisme pérennisant : tout isomorphisme de $\mathcal{R} \otimes \mathcal{H}$ dans $\mathcal{R}$ définit une pérennisation. Que peut-on obtenir d'intéressant ainsi ?

LA RESTRICTION : pourquoi ne pas pérenniser en se restreignant aux épistates pérennes de $\mathbf{A}$?

LE SUJET TRANSCENDANTAL : l'exponentiation *iconoclaste* refuse de donner un statut absolu à l'infini. La variabilité de l'exponentielle pourrait être le fait du sujet transcendantal, qui choisirait « son » monoïde épdicitique : c'est ce que j'avais proposé dans [Girard, 2008].

2.4.2 La Théorie des Types

Le calcul des prédicats Le calcul des prédicats est une extension bâtarde du calcul propositionnel, qui n'admet aucune interprétation constructive digne de ce nom. Alors que, dans le calcul propositionnel, les atomes réfèrent à des propositions inconnues, e.g., à des dichologies, les *termes* tombent du ciel ; ce qui oblige à paramétrer l'interprétation par un espace externe de référence, modeste début d'une pièce montée. Quant à l'interprétation des quantificateurs au moyen de sommes et produits infinis, si elle est conforme à la Vulgate tarskienne, elle est grossièrement fausse : une démonstration de $\forall x A[x]$ n'est en aucune façon une vérification de $A[t]$ au cas par cas, pour chaque valeur t de x ! La syntaxe transcendantale n'étant pas une brosse à reluire façon Kripke, on oublie le calcul des prédicats : il n'y a pas de condition de possibilité pour les erreurs !

Sujet vs. prédicat Il y a, heureusement, une tradition logique minoritaire qui, remontant à Aristote, est représentée de nos jours par la Théorie des Types de [Martin-Löf, 1984]. Elle repose sur la relation *sujet/prédicat* $t \in P$, qui trouve son expression transcendantale dans l'appartenance d'un épistate $\mathfrak{a}$ (= sujet) à une dichologie $\mathbf{A}$ (= prédicat). La *symétrisation* des sommes et produits dépendants par rapport à la négation (*infra*) induit ainsi les linéaments d'une *Théorie des Types Linéaire*. Alors que, pour Martin-Löf, la relation $\pi \in P$ signifie « π est une démonstration de P », l'aspect *déontique* des épistates change profondément les choses, par exemple pour les énoncés Π^0_1 : une quantification $\Pi n \in \mathbb{N}\ A(n)$ rèfère, au-delà des entiers, aux *chiens de garde* de la normativité ; c'en est bien fini, en tout cas, de la métaphysique des « termes ».

Sommes et produits dépendants Les sommes et produits dépendants nous viennent d'Aristote, e.g., « tout A est B » ou « un A est B »; repris par De Bruijn pour son langage AUTOMATH, ils sont à la base de la *Théorie des Types*.

Si les supports $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ sont disjoints, si $\mathbf{A}$ est une dichologie de support $\boldsymbol{a}$ et pour tout $\mathfrak{a} \in \mathbf{A}$ $\mathbf{B}(\mathfrak{a})$ est une dichologie de support $\boldsymbol{b}$, on généralise les connecteurs multiplicatifs $\multimap$ et $\otimes$ au moyen des dichologies[22] de support $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$:

$$\Pi\mathfrak{a} \in \mathbf{A}\ \mathbf{B}(\mathfrak{a}) \ := \ \{\mathfrak{f}\ ;\ \forall \mathfrak{a} \in \mathbf{A}\ [\mathfrak{f}]\mathfrak{a} \in \mathbf{B}(\mathfrak{a})\} \tag{36}$$

$$\Sigma\mathfrak{a} \in \mathbf{A}\ \mathbf{B}(\mathfrak{a}) \ := \ \sim\sim\{\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}\ ;\ \mathfrak{a} \in \mathbf{A},\ \mathfrak{b} \in \mathbf{B}(\mathfrak{a})\} \tag{37}$$

Ces dichologies sont reliées par l'adjonction :

$$\Pi\mathfrak{a} \in \mathbf{A}\ \mathbf{B}(\mathfrak{a}) \ = \ \sim\Sigma\mathfrak{a} \in \mathbf{A}\ \ \sim\mathbf{B}(\mathfrak{a}) \tag{38}$$

Si $\mathbf{F} := \Pi\mathfrak{a} \in \mathbf{A}\ \mathbf{B}(\mathfrak{a})$, on peut définir l'éthique $\mathbf{B} := \{[\mathfrak{f}]\mathfrak{a}\ ;\ \mathfrak{a} \in \mathbf{A},\ \mathfrak{f} \in \mathbf{F}\}$ et, pour $\mathfrak{b} \in \sim\mathbf{B}$ la dichologie $\sim\mathbf{A}(\mathfrak{b}) := \sim\sim\{[\mathfrak{f}]\mathfrak{b}\ ;\ \mathfrak{f} \in \mathbf{F}\} \ \subset \sim\mathbf{A}$. On voit que $\mathbf{F} = \Pi\mathfrak{b} \in \sim\mathbf{B}\ \ \sim\mathbf{A}(\mathfrak{b})$ et donc $\Sigma\mathfrak{a} \in \mathbf{A}\ \mathbf{B}(\mathfrak{a}) = \Sigma\mathfrak{b} \in \mathbf{B}\ \mathbf{A}(\mathfrak{b})$. En appliquant cette opération deux fois, on obtient les expressions *stabilisées* $\Pi\mathfrak{a} \in \mathbf{A}'\ \mathbf{B}'(\mathfrak{a})$ (resp. $\Sigma\mathfrak{a} \in \mathbf{A}'\ \mathbf{B}'(\mathfrak{a})$), avec $\mathbf{A}' \supset \mathbf{A}$ et $\mathbf{B}'(\mathfrak{a}) \subset \mathbf{B}(\mathfrak{a})$ (resp. $\mathbf{B}'(\mathfrak{a}) \supset \mathbf{B}(\mathfrak{a})$).

Un petit *gymkhana* Les sommes et produits dépendants font toujours sens quand $\mathbf{A}$ est une dichologie pérenne ; dans le cas de Σ, les $\mathbf{B}(\mathfrak{a})$ peuvent aussi être pérennes, dans le cas de Π, ils peuvent être co-pérennes. Si $\mathfrak{a}$ et $\mathbf{A}$ sont de support $\boldsymbol{a}$, on peut considérer la dichologie pérenne $\mathfrak{a} \in \mathbf{A}$ de support 0, égale à $\mathbf{1}$ si $\mathfrak{a} \in \mathbf{A}$, à $\mathbf{0}$ sinon. On voit que $\mathbf{A} = \Sigma\mathfrak{a} \in \mathbf{A}\ \mathfrak{a} \in \mathbf{A}$, version stabilisée de $\Sigma\mathfrak{a} \in \top_{\boldsymbol{a}}\ \ \mathfrak{a} \in \mathbf{A}$. Le cas des prédicats binaires se gère grâce au produit tensoriel : si $\mathbf{P}$ s'écrit comme le produit dépendant stabilisé $\Sigma\mathfrak{a} \in \mathbf{A}\ \mathbf{B}(\mathfrak{a})$, on peut écrire $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b} \in \mathbf{P}$ comme l'appartenance $\mathfrak{b} \in (\mathfrak{a} \in \mathbf{P})$, où $\mathfrak{b} \in \mathbf{P}$ est la dichologie $\mathbf{B}(\mathfrak{a})$, ou encore sous la forme $\mathfrak{a} \in (\mathfrak{b} \in \mathbf{P})$. L'expression $\mathbf{A} = \Sigma\mathfrak{a} \in \mathbf{A}\ \mathfrak{a} \in \mathbf{A}$ induit l'expression duale $\sim\mathbf{A} = \Pi\mathfrak{a} \in \mathbf{A}\ \mathfrak{a} \notin \mathbf{A}$, qui signifie qu'un élément $\mathfrak{b} \in \sim\mathbf{A}$, appliqué à un élément $\mathfrak{a} \in \mathbf{A}$ donne le résultat

$$\ll \mathfrak{a} \mid \mathfrak{b} \gg \in \mathfrak{a} \notin \mathbf{A} := \sim(\mathfrak{a} \notin \mathbf{A}) = \perp \tag{39}$$

autrement dit, que $\mathfrak{b} \perp \mathfrak{a}$. Ce genre de *gymkhana* est nécessaire si l'on veut comprendre la version linéaire de la Théorie des Types.

2.4.3 L'épidictique

Arguments On appelle *argument* un épistate *fonctionnel* $\mathfrak{a} = 0 \cdot\!+\!\cdot \alpha + \Gamma(u)$, sans mise et de diatrace positive. L'argument $\mathfrak{a}$ est *affilié* à $\mathbf{A}$, notation $\mathfrak{a}\ \boldsymbol{\eta}\ \mathbf{A}$ quand on peut trouver $\mathfrak{b}$ tel que $\mathfrak{b} + \mathfrak{a} \in \mathbf{A}$, autrement dit, si $\ll \mathfrak{a} \mid \mathfrak{a}' \gg$ est *défini* pour tout $\mathfrak{a}' \in \sim\mathbf{A}$. L'affiliation peut encore s'exprimer à partir d'un élément $\mathfrak{b}_0 \in \mathbf{A}$, par $\mathfrak{b}_0 \boldsymbol{+} \mathfrak{a} \boldsymbol{-} \mathfrak{a} \in \mathbf{A}$: on peut donc la manipuler logiquement : si $0 \cdot\!+\!\cdot \varphi + \Gamma(F)$ et $0 \cdot\!+\!\cdot \alpha + \Gamma(A)$ sont des arguments affiliés à $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ et $\mathbf{A}$, alors $I - F^{\ddagger}A^{\dagger}$ est inversible et $0 \cdot\!+\!\cdot \varphi \otimes \alpha + \Gamma([F^{\ddagger}]A^{\dagger})$ est un argument affilié à $\mathbf{B}$: les arguments permettent ainsi de définir des *stratégies* au niveau -3.

Irréfragabilité Un argument affilié à $\mathbf{A}$ est *gagnant* ou *irréfragable* quand il appartient à $\mathbf{A}$. L'irréfragabilité est compositionnelle : en particulier, il n'y a pas d'argument irréfragable dans $\mathbf{A}$ *et* dans $\sim\mathbf{A}$. L'irréfragabilité est la condition de possibilité de la *vérité*, i.e. du niveau -1.

[22](36) est légèrement simplifiée : la quantification doit être restreinte aux $\mathfrak{a}$ tels que $\mathbf{B}(\mathfrak{a}) \neq \top_{\boldsymbol{b}}$.

Monoïdes épidictiques Rappelons qu'un produit uv d'isométries partielles n'est une isométrie partielle que si les projecteurs u^*u et vv^* commutent ; en particulier, dans un $*$-monoïde d'isométries partielles, les projecteurs commutent deux à deux. Par *monoïde épidictique*, j'entends un $*$-monoïde $\mathcal{E}$ d'isométries parteilles (clos par composition, adjonction, contenant I et sans doute 0) *dénombrable* : cette dénombrabilité lui confère sa dimension « syntaxique ». On demande que :

$$u \in \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tr}(u) \geq 0 \tag{40}$$

Cette condition implique, en particulier, que les coefficients du monoïde épidicitique « s'ajoutent » : si $u + v = 0$, alors $u = v = 0$. Pour le comprendre, plaçons-nous dans $\mathcal{L}^2(\mathcal{R})$, espace de Hilbert obtenu par complétion de $\mathcal{H}$ par rapport à la norme $\|u\|_2 := \sqrt{\mathrm{tr}(u^*u)}$ et sur lequel $\mathcal{H}$ agit par multiplication à gauche (c'est l'implantation canonique de $\mathcal{H}$) : pour $u, v \in \mathcal{E}$, $\mathrm{tr}(v^*u) \geq 0$, d'où $\|u+v\|_2^2 \geq \|u\|_2^2 + \|v\|_2^2$; et, d'ailleurs, $\|u-v\|_2^2 \leq \|u\|_2^2 + \|v\|_2^2$.

Si $u \in \mathcal{E}$, $u^n \neq 0$ et $0 \leq i \leq n$, soit $v_i := u^{*n}u^i$; comme $u^{*i}u^iu^{*i} = u^{*i}$, il vient $v_i^*v_i = u^nu^{*i}u^iu^{*i}u^{*n-i} = u^nu^{*n}$. Et donc, si $V_n := v_0 + \ldots + v_n$, la condition (40) implique $\|V\|_2^2 \geq (1+n)\|u^n\|_2^2$, alors que $\|(I-u)(V_n)\| \leq 2\|u^n\|_2^2$. Si $u^n \neq 0$ pour tout n, alors $W_n := \|V_n\|^{-1}V_n$ définit un « zéro approximatif » de $I-u$, i.e., une suite de vecteurs de norme 1 tels que $(I-u)(W_n)$ tend vers 0 : nous avons ainsi établi que $I-u$ n'est pas inversible, i.e., (18) : l'inversibilité de $I-u$ implique la nilpotence de u. Ce qui établit un pont entre les conditions de possibilité de la vérité (l'*inversibilité*) et de la démonstrabilité, en particulier de la *normalisation forte* (la *nilpotence*) ; alors que la première est objective, la seconde, qui dépend du choix de ce « point de vue » qu'est un monoïde épidictique, est subjective... mais il s'agit, après tout, de langage !

Exemples

1. Les matrices à coefficients 0 ou 1 avec au plus un « 1 » par ligne et par colonnes (qui représentent des permutations partielles de la base canonique) forment un monoïde épidictique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Si l'on se donne une union filtrante d'algèbres de matrices, on obtient donc, par réunion de monoïdes épidictiques, un monoïde épidictique sur $\mathcal{R}$. La même méthode nous donnerait un monoïde épidictique sur $\mathcal{R} \otimes \mathcal{D}$ quand $\mathcal{D}$ une algèbre de matrices, etc. La version officielle de la GdI utilise, au lieu de $\mathcal{R}$, des algèbres $\boldsymbol{a}\mathcal{H}\boldsymbol{a}$, $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\mathcal{H}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, etc., où les supports $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ feront, n'importe comment partie du monoïde épidictique : il vaut mieux les écrire sous les formes isomorphes (en supposant une isométrie partielle entre $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$) sous les formes $\mathcal{R}$, $\mathcal{M}_2(\mathcal{R})$, etc., auquel cas nous savons encore construire un monoïde épidictique.
3. On considère la puissance tensorielle $\mathcal{K} := \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{R}$ de ω copies de $\mathcal{R}$, pour laquelle l'approximation par des puissances tensorielles finies d'algèbres de matrices induit un monoïde épidictique. Si $\sigma \in \mathfrak{S}$ est une permutation (finie) de $\mathbb{N}$, $\sigma(\bigotimes_n u_n) := \bigotimes_n u_{\sigma(n)}$ définit une action sur $\mathcal{K}$. Le produit croisé $\mathcal{K} \rtimes \mathfrak{S}$ (hyperfini, donc isomorphe à $\mathcal{R}$) *internalise* $\mathfrak{S}$, l'action de σ devenant un automorphisme interne :

$$\sigma \cdot \bigotimes_n u_n = (\bigotimes_n u_{\sigma(n)}) \cdot \sigma \tag{41}$$

L'ensemble des $u\sigma$, où u appartient au monoïde épidictique « canonique » de $\mathcal{K}$ et $\sigma \in \mathfrak{S}$ forme un monoïde épidictique sur $\mathcal{K} \rtimes \mathfrak{S}$ qui ne se ramène pas au cas matriciel précédemment décliné sous diverses formes.

4. Le calcul en espace logarithmique demande des matrices à coefficients dans $\mathcal{K} \rtimes \mathfrak{S}$; le monoïde épidictique naturel dans ce cas consiste dans les matrices ayant au plus un coefficient non nul par ligne et par colonnes, ce coefficient étant choisi dans le monoïde précédemment construit.

2.4.4 Théories logiques

Pas de brosse à reluire La notion de *théorie logique*, sans doute aussi bâtarde que le calcul des prédicats, n'a pas de justification transcendantale : il ne faut donc pas en chercher, du moins au sens strict. Cette notion recouvre deux idées assez différentes, le *choix des méthodes* et la *bureaucratie formelle*.

Le choix des méthodes Perçu par la Vulgate analytique comme une reddition *partielle* du « réel », l'incomplétude réfère plutôt à sa variabilité *intrinsèque*. Le monde *parfait* semblant au-delà de toute critique raisonnable, cette variabilité ne peut résider que dans le traitement de l'*imperfection*. Deux paramètres, pas forcément indépendants, sont à considérer : les formes de pérennisation et les monoïdes épidictiques. Le langage se retrouvant fatalement dans le monoïde épidictique, il faudrait donner un statut transcendantal au caractère *semi-décidable* de la déduction : en particulier, son statut au sein des dichologies ; et c'est une vraie question dont je n'ai pas encore la réponse.

La bureaucratie formelle Une théorie logique, c'est aussi un bureaucrate qui suit aveuglément des règles, qu'on ne cherche pas ici à *justifier*, seulement à *retrouver* : si elles sont souvent absurdes, elles sont aussi utiles. Techniquement, la question qui se pose est la suivante : comment un élément $M \in \mathcal{E}$ d'un monoïde épidictique peut-il garder la *mémoire* des règles qui l'ont engendré ? Plaçons-nous, pour simplifier, dans le cas sans dialecte ; en introduisant le dialecte $\mathcal{D} := \mathbb{C} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}$ et le plongement de $\mathbb{C}$ dans la $i^{\text{ème}}$composante de $\mathcal{D}$, on fait apparaître un entier i, sans valeur interactive, mais qui peut coder n'importe quoi. De façon un peu moins brutale, les manipulations dialectales qui accompagnent les règles logiques, suivies *verbatim* — i.e., en refusant le moindre isomorphisme —, gardent la mémoire des opérations utilisées, y compris l'ordre dans lequel on les a effectuées.

2.4.5 Les entiers

Entiers anomiques L'exponentielle sert à définir les entiers, au moyen de formules du genre $\forall X(!(X \multimap X) \multimap !(X \multimap X))$, voire $!\forall X(!(X \multimap X) \multimap !(X \multimap X))$; ces variantes expriment des choix logiques, i.e., des normativités. Je vais essayer d'atteindre un niveau *anomique*. Pour cela, je commence par écrire pédantiquement mon support comme $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{a}"+\boldsymbol{a}'"$ en spécifiant des isométries partielles entre $\boldsymbol{a}$ et ses trois délocalisations. On obtient un résultat plus lisible au moyen de matrices 4×4 à coefficients dans $\mathcal{H} := \boldsymbol{a}\mathcal{R}\boldsymbol{a}$, les indices $1, 2, 3, 4$ correspondant respectivement à $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}', \boldsymbol{a}", \boldsymbol{a}'"$ et les délocalisations servant à tout ramener à $\mathcal{H}$. Les entiers anomiques seront donc des dichologies de support l'identité de $\mathcal{M}_4(\mathcal{R})$, qui utilisent donc des algèbres $\mathcal{M}_4(\mathcal{R} \otimes \mathcal{A})$, $\mathcal{A}$ étant le dialecte. On a en tête les arguments de la forme[23] : $\mathfrak{N}_n = 0 \cdot + \cdot \alpha + \Gamma(M_n)$, où $M_n \in \mathcal{M}_4(\mathcal{R} \otimes \mathcal{A})$ est de la forme :

$$M_n := \begin{bmatrix} 0 & v & u & 0 \\ v^* & 0 & 0 & w \\ u^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w^* & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{42}$$

On suppose qu'il existe des projecteurs non nuls $\pi_0, \ldots, \pi_n$ tels que :

$$u = \pi_1 \, u \, \pi_0 \tag{43}$$
$$v = \pi_2 \, v \, \pi_1 + \pi_3 \, v \, \pi_2 + \ldots + \pi_n \, v \, \pi_{n-1} \tag{44}$$
$$w = \pi_0 \, w \, \pi_n \tag{45}$$

ce qui est (à peu près) la définition de [Girard, 2011b].

La dichologie nat Si $\mathfrak{f}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ sont des épistates *déontiques*, i.e., dont on ignore la partie fonctionnelle, « localisés » respectivement dans la zone $1, 2$, les zones 3 et 4 de $\mathcal{M}_4(\mathcal{R})$, on peut (ce qui sous-entend des délocalisations) former $[\mathfrak{f}]\mathfrak{a}$ (que l'on localisera en zone 3) ainsi que $\ll \mathfrak{a} \mid \mathfrak{b} \gg$. Ce qui permet, en fait de définir, pour $n \geq 0$, les réels $\ll [\mathfrak{f}]^n\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b} \gg$. On définit **nat** comme le polaire des épistates $\mathfrak{Ev}_{FAB} := 0 \cdot + \cdot \mathcal{R} + I \otimes (F + A + B)$ tels que, avec $\mathfrak{f} := 0 \cdot + \cdot 1 + F$, etc. les réels $\ll [\mathfrak{f}]^n\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b} \gg$ sont tous non nuls. Comme $F + A + B$ est en position dialectale, on voit que les $\mathbf{N_n}$ définis ci-dessus sont dans **nat**. En fait, $\ll \mathfrak{Ev}_{FAB} \mid \mathfrak{N}_n \gg = \ll [\mathfrak{f}]^n\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b} \gg \cdot \operatorname{tr}(\pi_0)$. En particulier, **nat** contient des éléments déontiques du genre $\mathfrak{N}_n + \mathfrak{N}'_m - \lambda\mathfrak{N}"_m$, où $\lambda := \operatorname{tr}(\pi'_0)\operatorname{tr}(\pi"_0)^{-1}$.

La normativité, pourquoi ? « Dieu a fait les entiers, tout le reste est l'œuvre de l'homme »; parlant de fondements, je nuancerai l'aphorisme de Konecker en disant que Dieu a créé des entiers anomiques que l'homme a formatés. On observera, en effet, que **nat** est tellement anomique qu'il devient impossible de définir une quelconque fonction sur ce domaine. Par exemple, il est naturel de définir le *produit* $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{m}$ au moyen d'une « coupure » entre les indices $3, 4$ de $\mathfrak{n}$ et les indices $1, 2$ de $\mathfrak{m}$; mais sans hypothèse particulière, le résultat peut être à peu près n'importe quoi. Il faut donc instiller de la « commutativité » : on restreint l'algèbre dans laquelle évoluent $\mathfrak{n}, \mathfrak{m}$, puis on utilise des automorphismes idoines. L'étude des restrictions possibles de **nat** me semble un problème plus accessible, moins spéculatif et fondamentalement équivalent à l'étude des exponentielles : la création des entiers anomiques permet de rendre complètement justice à la phrase de Kronecker. Ce qui suit est un aperçu du chantier en cours : il s'agit de réflexions éparses, non systématisées[24].

Entiers LOGSPACE On écrit $\mathcal{R}$ sous la forme isomorphe $\mathcal{K} \rtimes \mathfrak{S}$ (voir 2.4.3 *supra*, dont on reprend les notations). $\mathcal{E}$ induit un monoïde épidictique $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{K}$, celui des $u \otimes I \otimes I \otimes \ldots$ ($= \bigotimes u_n$ avec $u_n = I$ pour $n \neq 0$ et $u \in \mathcal{E}$) ; on se restreint aux entiers anomiques $\mathfrak{N}_n = 0 \cdot + \cdot 1 + \Gamma(M_n)$, où $M_n \in \mathcal{M}_4(\mathcal{E}_0)$ et aux observations $\mathfrak{F} = 0 \cdot + \cdot \varphi + \Gamma(\Phi)$, où le dialecte $\mathcal{F}$ est de dimension finie, la diatrace est positive et Φ est à coefficients dans $\mathfrak{S}$. On voit que les entiers et leurs observations font partie de la clôture du monoïde épidictique $\mathcal{F}$ par sommes. La

[23] Le cas $n = 0$ étant singulier, je ne considère que le cas $n > 0$.

[24] C'est beaucoup plus drôle dans l'état présent, celui d'un vrai *Far West* intellectuel !

question est de savoir quel est le statut logique de la relation observant/observé : il y a plusieurs options, toutes des variations techniques autour de la nilpotence de $\Phi(A_n \otimes \mathcal{F})$. La chose importante est la version idoine de l'*objectivité de la mesure* (1.3.4, *supra*) : la nilpotence de $\Phi(A_n \otimes \mathcal{F})$ ne dépend pas du choix de la représentation. Maintenant, la vérification de la nilpotence de $\Phi(A_n \otimes \mathcal{F})$ se fait en LOGSPACE. Réciproquement, un calcul LOGSPACE peut se représenter ainsi. On trouvera les détails dans [Girard, 2011b], à une nuance près : tributaire de la restriction $\|\Phi\| \leq 1$, j'avais été obligé de me rabattre sur une version non déterministe.

Les Σ_1^0 *Formater* les entiers, c'est se donner une sous-dichologie $\mathbf{nat}_0 \subset \mathbf{nat}$. Il faut, bien entendu, que $\mathbf{nat}_0$ possède une représentation pour chaque entier ; il faut aussi, et cela ne va pas de soi, que les diverses versions du « même » entier soient congrues *modulo* $\mathbf{nat}_0$. Passons maintenant aux propositions purement existentielles, Σ_1^0 ($= \exists n\ A[n]$) ; leur interprétation constructive se réduit, depuis BHK, à un sous-ensemble de $\mathbb{N}$; ce que je propose de représenter au moyen d'une sous-dichologie $\mathbf{N} \subset \mathbf{nat}$. Il y a, dans ce choix, une immmense variabilité : par exemple, le *même* entier peut apparaître dans $\mathbf{N}$ sous des formes non équivalentes, i.e., non congrues *modulo* $\mathbf{N}$. Sans oublier les épistates purement déontiques de $\mathbf{N}$, espèces de passagers clandestins. On voit que $\mathbf{N}$ représente un sous-ensemble, mais avec une variabilité qui tient compte de sa définition et peut être aussi des outils que l'on s'autorise pour l'étudier. En particulier, il y a énormément de versions de l'ensemble vide : vide d'élements *visibles*, seulement.

L'aporie des Π_1^0 Les propositions purement universelles, Π_1^0 ($= \forall n\ A[n]$) — typiquement les formules de cohérence, mais aussi la plupart des grandes conjecture, e.g. Riemann —, de l'arithmétique sont la Roche Tarpéïenne de la logique. BHK nous dit qu'une démonstration de $\forall n A[n]$ est une fonction qui associe à tout entier n une démonstration de $A[n]$. Une démonstration de, disons $\forall n\ (n+1)^2 = n^2 + 2 \cdot n + 1$, est la fonction qui à $n \in \mathbb{N}$ associe une vérification triviale du genre $(16+1)^2 = 16^2 + 2 \cdot 16 + 1$; la fonction étant connue à l'avance, il ne reste qu'à s'assurer qu'elle fait bien ce qu'elle doit faire, autrement dit, que $\forall n A[n]$ est vrai. BHK se réduit, dans ce cas essentiel, à la peau de chagrin du pléonasme tarskien. Ce qui aurait pu conforter le Programme de Hilbert qui tablait sur la définition « vrai := prouvable » et qui aurait induit, dualement, « vrai = cohérent » et donc, « prouvable = cohérent » ; programme définitivement invalidé par l'incomplétude, qui concerne, précisément, les Π_1^0. Cette aporie a engendré la discussion sectaire[25] évoquée en 1.3.3 *supra*.

L'aporie s'éloigne Une proposition Π_1^0 s'écrit $\Pi \mathfrak{n} \in \mathbf{N}\ \mathbf{A}[\mathfrak{n}]$, où $\mathbf{A}[\mathfrak{n}]$, de support 0 est une des dichologies co-pérennes $\top, \bot$. $\mathfrak{f} \in (\Pi \mathfrak{n} \in \mathbf{N}\, \mathbf{A}[\mathfrak{n}])$ ssi $\ll \mathfrak{f} \mid \mathfrak{a} \gg \neq 0$ pour tout élément $\mathfrak{a}$ du dual. L'aporie est supposée se produire quand $\Pi \mathfrak{n} \in \mathbf{N}\ \mathbf{A}[\mathfrak{n}]$ est « vrai » ; en effet, si les seuls éléments de $\mathbf{N}$ étaient des entiers, alors $\Pi \mathfrak{n} \in \mathbf{N}\ \mathbf{A}[\mathfrak{n}]$ serait effectivement égale à un $\top$ de support approprié, i.e., dégénérée. Le dual d'un Π_1^0 « vrai » est un Σ_1^0 « vide », — en fait rempli d'éléments purement *déontiques* — ; lesquels ? Cela dépend de la proposition et de sa mise en scène, mais il y en a. Et donc l'aporie disparaît. Sans résoudre

[25]Violente au point que Per Martin-Löf n'a été invité au Symposium Brouwer (1981) qu'*in extremis*, à la suite des protestations des invités pressentis !

tous les problèmes, ceci colmate une brèche béante de la syntaxe transcendantale, brèche qui existait bien avant que je n'introduise ce programme.

2.5 La nécessité

Le départ objectif/subjectf Quand je dis que la syntaxe transcendantale n'est pas nécessaire, j'ai en tête la *variabilité* du format adopté. En particulier, le dosage entre *objectif* et *subjectif*, question capitale. Le simplisme analytique refuse ce type de question : « un bon sujet transcendantal est un sujet transcendantal mort », au prix d'une métastase de l'objet qui mène au délire métaphysique des modèles de Kripke et des logiques à forte teneur en moutarde. La dimension subjective existe pourtant *a priori*, puisque qu'il faut bien écrire, calculer, raisonner. La dimension objective aussi, non pas dans le sens d'une réalité préexistante, mais dans l'oubli de certaines contingences subjectives : c'est ainsi que l'on néglige l'état de santé du sujet transcendantal.

Vérité, démonstration, calcul Toute la question est de positionner le départ objectif/subjectif : selon le choix opéré, on n'obtiendra pas la même syntaxe transcendantale. Ici, il m'a fallu harmoniser trois notions, qui sont la vérité, ses démonstrations et le calcul. J'ai fait le choix d'une vérité *objective*, gérée par le mode mineur ; la notion de démonstration n'apparaît qu'à travers l'introduction (subjective) du monoïde épidictique, sa principale propriété s'exprimant par la convergence des calculs (la nilpotence). On ne peut pas réclamer la nilpotence au niveau objectif ; en effet, il n'y a pas de relation entre la nilpotence de $F(a+b)$ et celles de Fa et $[F]a\cdot b$: quand on développe $([F]a\cdot b)^n$, il peut y avoir des annulations de termes. Ces annulations étant impossibles dans un monoïde épidictique, on pourrait tout à fait donner une version subjective de la vérité : les opérateurs sont *déjà* dans le monoïde épidictique[26]. De même, la restriction aux isométries partielles correspond aux calculs logiques qui sont réversibles et déterministes, « bi-déterministes ». Tout en reconnaissant ma dette à l'informatique, j'avoue ne m'être guère occupé que des conditions de possibilité des démonstrations et de la normalisation forte. La prise en compte autonome du calcul, hors de tout contrôle logique *a priori* doit se faire sur la base de la nilpotence — je ne parle ici que de calculs convergents — et d'un monoïde épidictique non restreint à des isométries partielles : plusieurs coefficients par ligne pour parler d'irreversibilité, plusieurs par colonnes pour le non-déterminisme ; par exemple, en clôturant le monoïde épidictique par sommes finies. Ce qui suppose un élargissement du format avec perte possible de la strate logique : y a-t-il un format unique qui rende compte à la fois du calcul et de la logique ou faut-il admettre plusieurs formats, je ne sais pas.

Immanuel, au secours ! Cette question de *nécessité* a une dimension philosophique : il est nécessaire de comprendre la part de nous-même dans les objets que nous étudions, d'où l'invocation de Kant — du moins de sa méthode — pour essayer de trouver, sinon un format définitif (qui serait alors nécessaire), du moins de sérier les problèmes pour ne pas objectiviser ce qui appartient au sujet ou subjectiviser le « monde ». Bien sûr, il ne faut pas compter sur Immanuel pour répondre à notre place : rappelons que ces questions n'avaient aucun

[26] C'est à peu près le choix fait dans [Girard, 1989a].

sens précis il y a 25 ans. Mais, dans les limites de sa compétence, celle d'un catadioptre qui *réfléchit* la technique, l'intervention de la philosophie me semble inévitable : c'est bien la seule nécessité que je vois.

NON SI NON LA

Références

[Abramsky et al., 1994] Abramsky, S., Jagadeesan, R., and Malacaria, P. (1994). **Full Abstraction for PCF** (extended abstract). In Hagiya, M. and Mitchell, J. C., editors, *Theoretical Aspects of Computer Software. International Symposium, TACS 94, Sendai, Japan*. Springer Verlag. LNCS 789.

[Abrusci and Ruet, 2000] Abrusci, V. M. and Ruet, P. (2000). **Non-commutative logic I : the multiplicative fragment**. *Annals of Pure and Applied Logic*, 101 :29 – 64.

[Andreoli and Pareschi, 1991] Andreoli, J.-M. and Pareschi, R. (1991). **Linear objects : logical processes with built-in inheritance**. *New Generation Computing*, 9(3 – 4) :445 – 473.

[Church and Rosser, 1936] Church, A. and Rosser, J. B. (1936). **Some properties of conversion**. *Transactions of the American Mathematical Society*, 39 :472 – 482.

[Gentzen, 1934] Gentzen, G. (1934). **Investigations into logical deduction**. In Szabo, M. E., editor, *The collected works of Gehrard Gentzen, 1969*, pages 68 – 131, Amsterdam. North-Holland.

[Gentzen, 1936] Gentzen, G. (1936). **The consistency of elementary number theory**. In Szabo, M. E., editor, *The collected works of Gehrard Gentzen, 1969*, pages 132 – 213, Amsterdam. North-Holland.

[Gentzen, 1938] Gentzen, G. (1938). **New version of the consistency proof for elementary number theory**. In Szabo, M. E., editor, *The collected works of Gehrard Gentzen, 1969*, pages 252 – 286, Amsterdam. North-Holland.

[Girard, 1971] Girard, J.-Y. (1971). **Une extension de l'interprétation fonctionnelle de Gödel à l'analyse et son application à l'élimination des coupures dans l'analyse et la théorie des types**. In Fenstad, editor, *Proceedings of the* 2^{nd} *Scandinavian Logic Symposium*, pages 63 – 92, Amsterdam. North-Holland.

[Girard, 1987a] Girard, J.-Y. (1987a). **Linear logic**. *Theoretical Computer Science*, 50 :1 – 102.

[Girard, 1987b] Girard, J.-Y. (1987b). **Proof-theory and logical complexity I**. Bibliopolis, Napoli.

[Girard, 1988] Girard, J.-Y. (1988). **Multiplicatives**. In Lolli, editor, *Logic and computer science : new trends and applications*, pages 11 – 34, Torino. Università di Torino. Rendiconti del seminario matematico dell'università e politecnico di Torino, special issue 1987.

[Girard, 1989a] Girard, J.-Y. (1989a). **Geometry of interaction I : interpretation of system** F. In Ferro, Bonotto, Valentini, and Zanardo, editors, *Logic Colloquium '88*, pages 221 – 260, Amsterdam. North-Holland.

[Girard, 1989b] Girard, J.-Y. (1989b). **Towards a geometry of interaction**. In *Categories in Computer Science and Logic*, pages 69 – 108, Providence. American Mathematical Society. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics n°92.

[Girard, 1990] Girard, J.-Y. (1990). **Geometry of interaction II : deadlock-free algorithms**. In f, M.-L. and Mints, editors, *Proceedings of COLOG 88*, volume 417 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 76 – 93, Heidelberg. Springer-Verlag.

[Girard, 1991] Girard, J.-Y. (1991). **A new constructive logic : classical logic**. *Mathematical Structures in Computer Science*, 1 :255 – 296.

[Girard, 1993] Girard, J.-Y. (1993). **On the unity of logic**. *Annals of Pure and Applied Logic*, 59 :201 – 217.

[Girard, 1995] Girard, J.-Y. (1995). **Geometry of interaction III : accommodating the additives**. In Girard, Lafont, and Regnier, editors, *Advances in Linear Logic*, pages 329 – 389, Cambridge. Cambridge University Press.

[Girard, 1996] Girard, J.-Y. (1996). **Proof-nets : the parallel syntax for proof-theory**. In Ursini and Agliano, editors, *Logic and Algebra*, New York. Marcel Dekker.

[Girard, 1998] Girard, J.-Y. (1998). **Light linear logic**. *Information and Computation*, 143 :175 – 204.

[Girard, 1999a] Girard, J.-Y. (1999a). **Coherent Banach Spaces : a continuous denotational semantics**. *Theoretical Computer Science*, 227 :275 – 297.

[Girard, 1999b] Girard, J.-Y. (1999b). **On the meaning of logical rules I : syntax vs. semantics**. In Berger, U. and Schwichtenberg, H., editors, *Computational Logic*, pages 215 – 272, Heidelberg. Springer-Verlag. NATO series F 165.

[Girard, 2001] Girard, J.-Y. (2001). **Locus Solum**. *Mathematical Structures in Computer Science*, 11 :301 – 506.

[Girard, 2004] Girard, J.-Y. (2004). **Between logic and quantic : a tract**. In Ruet, Ehrhard, Girard, and Scott, editors, *Linear Logic in Computer Science*, pages 346 – 381. CUP. ISBN 0521608570.

[Girard, 2006] Girard, J.-Y. (2006). **Geometry of interaction IV : the feedback equation**. In Stoltenberg-Hansen and Väänänen, editors, *Logic Colloquium '03*, pages 76 – 117. Association for Symbolic Logic.

[Girard, 2007] Girard, J.-Y. (2006-2007). **Le point aveugle, tome 1 : vers la perfection, tome 2 : vers l'imperfection**. Visions des Sciences. Hermann, Paris. 296 pp. + 299 pp.

[Girard, 2008] Girard, J.-Y. (2008). **Truth, modality and intersubjectivity**. *Mathematical Structures in Computer Science.*

[Girard, 2011a] Girard, J.-Y. (2011a). **Geometry of interaction V : logic in the hyperfinite factor**. *Theoretical Computer Science*, 412 :1860 – 1883. *Girard's Festschrift, eds. Ehrhard, Faggian and Laurent.*

[Girard, 2011b] Girard, J.-Y. (2011b). **Normativity in logic**. In *Epistemology vs. Ontology.* to appear.

[Girard et al., 1990] Girard, J.-Y., Lafont, Y., and P.Taylor (1990). **Proofs and types**, volume 7 of *Cambridge tracts in theoretical computer science.* Cambridge University Press, Cambridge.

[Gödel, 1931] Gödel, K. (1931). **Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I**. *Monatshefte füt Mathemayik und Physik*, 38 :173 – 198. English translation *On formally undecidable propositions of* Principia Mathematica *and related systems I* in *From Frege to Gödel*, ed. van Heijenoort, Harvard University Press, 1967.

[Gonthier et al., 1992] Gonthier, G., Abadi, M., , and Levy, J.-J. (1992). **The geometry of optimal lambda-reduction**. In Press, *ACM.*, editor, *POPL'92*, Boston. Birkhäuser.

[Hilbert, 1926] Hilbert, D. (1926). **Über das Unendliche**. *Mathematische Annalen*, 95 :161 – 190. Traduction anglaise dans *From Frege to Gödel*, ed. van Heijenoort, Harvard University Press, 1967.

[Howard, 1980] Howard, W. A. (1980). **The formulae-as-types notion of construction**. In Hindley, J. P. and Seldin, J. R., editors, *To H. B. Curry : Essays on Combinatory logic, Lambda-calculus and Formalism*, pages 479 – 490, London. Academic Press.

[Hyland and Ong, 1994] Hyland, M. and Ong, L. (1994). **On Full Abstraction for PCF**. To appear in *Information and Computation*, 2000.

[Kadison and Ringrose, 1983] Kadison, R. V. and Ringrose, J. R. (1983). **Fundamentals of the theory of operator algebras, vol. I**. Pure and applied mathematics. Academic Press. (*corrected exercises in vol. III*).

[Kreisel, 1965] Kreisel, G. (1965). **Mathematical logic**. In Saaty, T. L., editor, *Lectures in modern mathematics, vol III*, pages 99 – 105. Wiley & Sons, New York.

[Kreisel and Levy, 1968] Kreisel, G. and Levy, A. (1968). **Reflection principles and their uses for establishing the complexity of axiomatic systems**. *Zeitschrift für Mathematische Logik*, 14 :97 – 142.

[Martin-Löf, 1984] Martin-Löf, P. (1984). **Intuitionistic type theory**. Bibliopolis, Napoli.

[Prawitz, 1965] Prawitz, D. (1965). **Natural deduction, a proof-theoretical study**. Almqvist & Wiksell, Stockholm.

[Ringard, 1990] Ringard, Y.-J. (1990). **Mustard watches : an integrated approach to time and food**. Prépublication, Université Paris VII, Paris. `http ://iml.univ-mrs.fr/~girard/mustard/article.html`.

[Scott, 1976] Scott, D. (1976). **Data types as lattices**. *SIAM Journal of computing*, 5 :522 – 587.