

Un tract anti-système*

Jean-Yves Girard

17 juin 2020

La prison appelée la vie
enferme toutes les prisons.

AUDIBERTI

La *logique* se veut, avant tout, l'espace des vérités universelles et irréfragables : « C'est logique » veut dire que ça ne se discute pas. Les *systèmes* sont, par contre, des espaces carcéraux auxquels on cherche à confiner des vérités contingentes. L'expression *système logique* est donc une contradiction dans les termes, un peu comme la *dictature démocratique* des bolchéviks.

La pire des prisons est celle dont on ne voit pas les murs : on croit s'évader alors qu'on ne fait que changer de cellule. Le caractère contingent des systèmes logiques saute aux yeux, c'est pourquoi l'on a cru s'en libérer en changeant de crèmerie. Mais ce n'est que reculer pour mieux sauter : ce n'est pas le choix du système qui est en cause, c'est la notion-même de système.

Il y a deux possibilités quant à la nécessité des systèmes :

Le mal nécessaire : tous les systèmes sont mauvais, mais il en faut bien un, que l'on cherchera à améliorer.

L'anarchie : les systèmes logiques sont absolument inutiles, car la logique est apodictique.

La réponse, nuancée, dépend du type de logique considérée. La logique de base – du premier ordre –, réellement apodictique, n'a pas besoin de système, celle du second ordre ne fonctionne qu'en mode carcéral. Sous réserve de comprendre la distinction entre premier et second ordre, c'est donc soit l'anarchie, soit le mal nécessaire qui règnera. Ayant été rassasiés de systèmes, c'est principalement à la logique du premier ordre, celle qui peut vivre hors de tout système, que nous allons nous intéresser. Les bases théoriques permettant la désystématisation sont à chercher dans les travaux des années 1930. La *Propriété de la sous-formule* due à Gentzen permet, en effet, d'oublier localement le système... de là à l'oublier totalement, il n'y a qu'un (gros) pas. Le Théorème d'Herbrand initie une approche *déontique* qui remplace l'obéissance aveugle par une sorte de test – un critère de correction *ante litteram*.

La « désystématisation » est cependant impossible dans certains cas :

*À l'occasion de la retraite de mes amis Michele Abrusci et Pierre-Louis Curien.

Les axiomatiques, par exemple, algébriques, qui permettent de décréter, disons, que $43 = 0$. Impossible d'oublier que l'on est dans un système, puisque $41 = 0$, tout aussi viable, est incompatible avec notre ukase. Mais ce monde contingent n'est plus celui de la logique.

Les logiques philosophiques, euphémisme pour l'archipel des logiques d'autodidactes, celles qui ne produisent que des vérités de bocal à poissons : ne brisez surtout pas le verre. Il existe même une variante schizophrène, la paraconsistance, où les poissons, confinés à leur propre bulle ne produisent que des post-vérités, c'est le metabocal si l'on est friand de cuistreries, la double peine si l'on pense à ce que l'on inflige à la logique.

Le second ordre : les entiers naturels font partie – via le principe de récurrence – de la logique du second ordre. L'incomplétude de l'arithmétique montre qu'aucun système du second ordre ne suffit ; pas question donc de s'en passer.

En résumé, l'idée de langage logique est erronée ou, du moins, n'a d'intérêt qu'au second ordre ; l'expression consacrée *langage du premier ordre* est donc un oxymore.

1 La rationalité

1.1 La raison pure

La logique est une entreprise de libération fondée sur la *rationalité*, attitude prométhéenne qui prétend court-circuiter Dieu. Non par athéisme, mais du fait de la méfiance légitime que doit susciter toute vérité révélée. Une révélation dont le contenu fluctue d'une obédience à l'autre : comment croire que Dieu puisse imposer aux uns de se couvrir et aux autres de se découvrir ? Si la rationalité ne refuse pas Dieu, elle s'oppose par contre aux églises et donc aux systèmes.

On peut dire la même chose de ce substitut de religion qu'est le *réalisme*, qui stipule la réalité de... la Réalité. Le réaliste refuse de voir qu'il fait partie de ce qu'il décrit car il croit avoir tracé une Muraille de Chine entre observé et observateur, Objet et Sujet. Cette délimitation, délicate à tracer, est d'ailleurs théoriquement douteuse, voir la mécanique quantique.

L'attitude rationnelle ne nie pas la réalité – ce qui serait du solipsisme, position absurde – mais elle s'en défie comme d'un faux ami. Elle accorde la primauté au *pourquoi* sur le *comment*, à l'explication sur le fait brut. C'est le rationalisme qui me fait recompter mon ticket d'épicerie alors même que je ne subodore pas la moindre erreur : je veux savoir pourquoi j'ai payé aussi cher pour aussi peu de choses. C'est que l'Homme ne se satisfait pas de vérités, il lui faut en plus des *raisons* : nous revoilà dans le rationalisme.

L'irrationnel peut prendre la forme d'un ukase tombé du Ciel : la logique est ce qui n'est pas *axiomatique*, *i.e.*, discrétionnaire. Ou encore la forme *sémantique* d'une justification réaliste : on nous apprend à nous méfier des apparences, mais qu'est-ce qu'une apparence, sinon une réalité que l'on considère comme non signifiante ? Ces facteurs d'irrationalité sont externes ; on les remettra donc sur une étagère – on ne leur veut pas de mal – pour se concentrer sur les éléments internes au raisonnement. Leur agencement ne devant rien à Dieu (l'*axiomatique*), pas davantage à la Réalité (la *sémantique*), il est donc du ressort exclusif de la *raison pure*, un terme kantien qui résume bien le rationalisme logique. La raison pure s'occupe de ce qui est interne, *ce qui va de soi* et non pas de ce qui procède d'autre chose.

1.2 La logique comme médiation

Chercher la raison, c'est éviter de tomber dans les pièges qui peuvent transformer une entreprise de libération en une entreprise d'asservissement. Et se méfier des faux amis : la réalité, l'autorité, les systèmes. Sans parler des échafaudages prétendument rationnels, typiquement celui qui s'appuie sur une prétendue relation au réel qui transite elle-même par un raisonnement, possiblement vicié. Comme par exemple le principe fautif $\forall \Rightarrow \exists$ qu'un argument réaliste *ad hoc* (p. 9) justifie pourtant.

Le pire faux ami est soi-même : personne n'est plus irrationnel que le prétendu détenteur d'une science infaillible. C'est Sherlock Holmes, scientifique dont la cuistrerie n'est supportable qu'à cause du placide Watson. C'est aussi la philosophie analytique qui se positionne en surplomb en se targuant de sa propre rationalité, mais qui n'est qu'une sorte de numérotologie où la référence aux chiffres aurait été remplacée par l'incantation de la logique. Les « analytiques » sont les cousins de ces psychiatres jupitériens – qui n'existent bien sûr qu'au cinéma – que l'on voit s'acharner de façon maniaque contre les « fous » sans s'apercevoir qu'ils sont pires qu'eux.

Donc un peu de modestie, la prise de distance par rapport aux explications définitives et réductrices – on disait naguère « solutions finales » – ne peut pas faire de mal. Car il nous faut admettre que nous rencontrerons tôt ou tard l'irrationnel. Plutôt que de le nier et nous lancer dans des justifications incestueuses, genre preuves de consistance, reconnaissons que nous ne trouverons pas toujours le pourquoi du pourquoi. Et concentrons-nous plutôt sur l'articulation de nos certitudes dont la plupart ne sont que *raisonnables*, comme le lever quotidien du Soleil. Surprise, nous rencontrerons parfois des certitudes absolues : ce sont alors les doutes qui deviennent douteux.

Être rationnel ne consiste pas à se tenir à l'abri d'une Muraille de Chine qui nous protégerait des barbares irrationnels qui piétinent de l'autre côté ; c'est assumer sa propre irrationalité en se maintenant en position instable sur le chemin de ronde. Car la logique n'est pas le chien de garde du rationnel, c'est une périlleuse *médiation* entre rationalité et irrationalité.

1.3 Une médiation ratée

Les logiques « philosophiques ¹ » sont issues de médiations mal négociées. Par exemple, la prétendue abduction logique qui correspond à une intrusion du pire irrationnel dans la rationalité.

Un raisonnement peut être utile, voire nécessaire, sans être rationnel ou rigoureux pour autant. C'est le cas de l'inversion des causes et des effets, l'*abduction*. Elle est largement pratiquée par les dépanneurs – médecins, garagistes, etc. – qui tentent de trouver la maladie, la panne, à partir des symptômes. C'est un élément essentiel des enquêtes de police : on cherche le coupable en se basant sur les antécédents des suspects. Les mathématiciens en font un large usage à travers leurs *conjectures* : on a observé que quelque chose se produit dans un certain cas et l'on subodore qu'il y a derrière cela une raison plus générale.

Cette activité de base de l'intelligence n'est ni rationnelle ni irrationnelle, elle touche aux deux côtés du rempart et peut donc être tirée vers la raison ou la déraison. L'approche rationnelle à l'abduction consiste, pour le mathématicien à *démontrer* sa conjecture, pour le policier à transformer ses soupçons en « preuves » de culpabilité.

L'approche irrationnelle consiste à décider qu'un restaurant est mauvais quand il est peu fréquenté, à croire qu'une œuvre primée est meilleure qu'une qui ne l'est pas, à déclarer comme Donald Trump dans *Tintin en Amérique* : « On a tout de suite pendu sept nègres, mais le coupable s'est enfui ». On a voulu donner des lettres de noblesse à cette approche grâce à Sherlock Holmes, capable, au vu d'une montre à gousset, de conclure que le frère de Watson est mort alcoolique ².

Une certaine logique philosophique a prétendu rationaliser l'abduction, au moyen de systèmes basés sur l'inversion de l'implication logique. Ce qui, sous la forme $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$, va droit dans le mur. On croit s'en tirer au moyen de la règle « Si $(A \Rightarrow B)$ alors $(B \Rightarrow A)$ » qui, après un détour, termine dans le même mur ; on finasse alors sur A et B qui doivent être comme ci, ne pas être comme ça... La bille de mercure se fragmente à n'en plus finir en sous-billes pour se dissoudre dans les poubelles de l'insignifiance.

Cela ne fonctionne pas du tout, ce qui est rassurant. Car la prétendue abduction n'est rien d'autre qu'un racisme désincarné ; on a gardé la structure du raisonnement, mais les mots qui fâchent sont devenus des lettres sans signification A, B, C, \dots . Il suffit de la resubstancier en remplaçant A, B, C, \dots par « Assassin, Bougnoule, Chiite, etc. », pour voir que l'on cherche à nous refiler en contrebande le délit de sale gueule.

1. Expression tordue qui dénote un complexe d'infériorité. Lesdites logiques se savent, en effet, mauvaises : « philosophique » veut dire « qui ne tient pas la route, autodidacte ». Tout en éprouvant un paradoxal sentiment de supériorité : « philosophique » veut aussi dire « génial ». L'un dans l'autre, cela donne : « Notre logique est basée sur des principes tellement profonds que la technique n'est pas encore née, qui leur rendra justice ».

2. On aurait aimé le voir exercer ses talents sur les Rolex de nos premiers de cordée.

Incidentement l'abduction logique, en traduisant l'échange des causes et des effets par une inversion de l'implication, assimile la causalité à la conséquence logique, ce qui est parfaitement foireux et montre un effarant manque de finesse philosophique. Par exemple, quand le loup de La Fontaine accuse l'agneau d'avoir médité de lui, celui-ci répond : « Comment l'aurais-je fait si je n'étais pas né ? », autrement dit pour médire du loup, il faut être né (conséquence logique). Mais, si elle implique la naissance, la médisance n'en est pas cause !

1.4 La chasse aux interdits

Réfléchir sur la rationalité, remettre en question les systèmes, c'est parler d'interdits. Les exemples d'interdits absurdes abondent dans les domaines politiques et religieux et aussi dans des activités mineures, comme la cuisine. Pour une raison que j'ignore, il faudrait ne saler l'eau de cuisson des pâtes qu'*après* ébullition. Si cet ukase débile persiste, c'est qu'il sert de marqueur identitaire à ceux qui se veulent experts ès cuisine : comme tous les interdits religieux, on ne le défend pas par des arguments – on aurait du mal à en donner³ – mais par des accusations de blasphème : « C'est un précepte sacré, transmis par ma mère ».

Il n'est malheureusement pas toujours possible de distinguer les bons interdits de ceux qui ne seraient que des fatwas essentialistes. Il y a un phénomène d'imbrication : je peux rarement ouvrir une vanne sans en fermer une autre. Mais de façon assez surprenante, on arrive à gérer les conflits.

Par exemple (voir section 2.7), l'égalité est maltraitée par le calcul des prédicats qui y voit un parent pauvre, un bidule axiomatique. C'est la conséquence de l'interdit logique qui sépare soigneusement individus et propositions « Tu ne mélangeras pas les individus et leurs propriétés », lui-même conséquence de la gestion binaire, vrai/faux, des propositions : un individu ne saurait être vrai ou faux. Ce qui nous amène à choisir entre le tarskisme qui dit que tout est vrai ou faux et le statut logique de l'égalité. Il est évident que la binarité classique est réductrice – c'est ce que disait déjà Brouwer dans les années 1920 – et que par contre l'égalité doit recevoir une place centrale en logique, celle de l'équivalence \equiv qui ne fonctionne bien qu'hors binarité.

La prise en compte rationnelle des interdits constitue la partie *déontique* (de *δέον*, convenable) de la logique, celle qui s'occupe du format logique. Lequel est au centre du *synthétique*, la partie vraiment logique de la logique. Le déontique est traditionnellement opposé à l'*aléthique* (de *ἀλήθεια*, vérité) qui s'occupe du vrai, *i.e.*, des preuves, pas vraiment de la sémantique. Le *déontique*, par contre, est le nécessaire cadre de l'aléthique, un cadre que la logique traditionnelle ignore : elle refuse de voir les murs de sa prison.

3. J'ai cependant trouvé, dans un journal féminin, cette justification pseudo-thermodynamique : le sel ralentirait la « montée en chaleur » de l'eau !

Il y a, malgré tout, des logiques philosophiques, dites « déontiques » censées *prouver* des interdits, des obligations, des permissions. Ce qui est une contradiction dans les termes : l'idée saugrenue d'introduire le déontique sous forme d'une extension – par ailleurs exsangue – du calcul des prédicats dénote une incompréhension totale des enjeux car une interdiction, une permission, ne seront jamais vraies ou fausses. S'il est quelque chose qui doit échapper aux axiomes, aux systèmes, c'est bien le déontique qui est l'espace même où s'élaborent les formats et donc lesdits axiomes et systèmes.

1.5 La prison de toutes les prisons

Comme nous l'avons déjà dit, la pire des prisons est celle dont on ne voit pas les murs. Avant de critiquer les interdits, il s'agit de les situer exactement, ce qui ne va pas de soi. C'est pourquoi beaucoup de tentatives de libération se soldent, faute de les avoir clairement identifiés, par un renforcement des interdits que l'on voulait dépasser. C'est le cas de l'archipel des logiques « philosophiques », qui reposent toutes sur une intention de rupture. On essaye de creuser un tunnel d'évasion pour finir par se retrouver, non pas à l'air libre, mais dans la cellule d'à côté, encore moins confortable.

Par exemple, cette tarte à la crème des autodidactes, les logiques à plusieurs valeurs, au-delà auto-proclamé de la logique classique. En utilisant la numération binaire, il est facile de ramener une proposition à 2^n valeurs à n propositions à 2 valeurs : au lieu d'une chaîne, on en a n . La libération n'a donc pas eu lieu : si l'on a bien compris que la réduction aux deux valeurs de vérité posait problème, on s'est trompé d'ennemi, ce n'est pas leur nombre (deux) qui est en cause, c'est la notion-même de valeur de vérité.

Tant qu'à avoir des valeurs de vérité, le nombre deux est, de très loin, le seul à fonctionner. Peindre des moustaches, sous forme de valeurs supplémentaires à la logique classique, c'est remplacer une approche réductrice, mais relativement satisfaisante, par une espèce de caricature exsangue. De même, les révolutions mal conçues se soldent souvent par le remplacement d'un régime haïssable par un autre pire, *e.g.*, le tsarisme par le stalinisme.

2 Le bunker

2.1 La réduction axiomatique

Si la logique persiste à utiliser des systèmes même quand elle n'en a pas besoin, c'est qu'elle s'est bunkerisée aux alentours de 1900. La crise des fondements commença, à la fin du XIX^e siècle, avec le paradoxe de Burali-Forti (1897) ; il suffisait de discipliner l'usage d'un tout nouveau joujou, la Théorie des ensembles. Mais l'on crut d'abord que la logique fournirait un parapluie fondationnel adapté. Conçue pour résister aux pires tremblements de terre, la logique moderne en garde depuis une structure de bunker malcommode.

La bunkerisation c'est avant tout la réduction axiomatique. Elle considère l'activité logique comme une bureaucratie formelle consistant à enfilet axiomes et règles selon des protocoles militaires⁴. Un seul critère retient alors l'attention : la consistance ou non-contradiction. Les systèmes sont alors classés par « force » : \mathcal{T} est plus fort que \mathcal{S} quand il existe une traduction (fonction φ) de \mathcal{S} dans \mathcal{T} préservant la prouvabilité. Seule la résilience – consistance – du matériau a été prise en compte : sécurité *über alles*.

Il s'agit d'un nivellement par le bas de l'idée de logique, où la notion de système joue un rôle central. On abdique tout espoir de distinguer entre nécessaire et contingent, entre ce qui est logique et ce qui ne l'est pas : le calcul des prédicats est traité sur le même plan que l'axiomatique des entiers modulo 43 qui postule que $43 = 0$. Chercher une quelconque finesse dans ce monde bétonné, c'est vouloir enfilet une aiguille avec des gants de boxe.

Cette focalisation exclusive sur la consistance n'a de sens que si le parapluie fondationnel offert par le bunker est réellement efficace. L'incomplétude montre qu'il n'en est rien ; le passage en force échoue, ce qui légitime une approche en finesse.

2.2 Une erreur de logique

Pour rentrer dans le vif du sujet, donnons un exemple d'*erreur* de logique, reproduite dans *tous* les manuels, y compris le mien [3]. On démontre dans le calcul des prédicats qu'il soit classique, intuitionniste ou linéaire, l'implication $\forall \Rightarrow \exists$, *i.e.*, $\forall xA \Rightarrow \exists xA$.

À la base, une axiomatisation erronée du quantificateur $\forall x$. Pour démontrer $\forall xA[x]$, il faut introduire un individu générique, une variable y spécifiquement liée à A , puis démontrer $A[y]$. « Soit y un individu » n'est qu'une hypothèse temporaire⁵ : une fois obtenu $A[y]$, on conclut $\forall xA[x]$ en oubliant y . Les fondateurs du calcul des prédicats, Frege et consorts, ont trouvé plus commode de créer des variables sans relation à la quantification. En invoquant une de ces variables z , on peut démontrer $\forall xA[x] \Rightarrow A[z]$ et $A[z] \Rightarrow \exists xA[x]$, et donc $\forall xA[x] \Rightarrow \exists xA[x]$. Cette erreur rappelle d'ailleurs un syllogisme fautif d'Aristote, la figure *Barbari* : « Tout A est B , tout B est C donc un A est C ».

Il n'y a aucune raison de remplacer l'hypothèse labile « Soit y un individu » par la vérité stable « y est un individu ». Pourquoi a-t-on donc laissé passer une telle erreur ? D'abord parce qu'il aurait fallu *déclarer* les variables avant de les utiliser ; ce qui est devenu banal au temps des langages de programmation, mais était sans doute un peu compliqué aux alentours de 1900. Et surtout, parce que la logique basée sur l'implication fautive $\forall \Rightarrow \exists$ et celle qui ne l'utilise pas sont, axiomatiquement parlant, inter-réductibles. Donc autant aller au plus simple et ne pas déclarer ses variables.

4. En grec moderne, *αξιωματικός* signifie « officier ».

5. De la même façon, on démontre $A \Rightarrow B$ en posant A comme hypothèse *temporaire*.

Si l'on pense en finesse, les deux versions ne sont pas comparables : les variables non déclarées, passagers clandestins de la logique, doivent être traitées à part, ce qui conduit à des complications mesquines et gratuites. Ces variables baladeuses rappellent le *Lieutenant Kijé* d'une nouvelle soviétique. Résultat d'une erreur de copiste, ce militaire de papier fait une carrière exemplaire et devient général, jusqu'au jour où le Tsar veut le rencontrer ; on le fait mourir d'un trait de plume et il a droit à des funérailles nationales.

À côté des variables proprement dites, des « variables Kijé », conséquences d'une erreur jamais corrigée, hantent l'arrière-cuisine de la logique.

2.3 Quine et le scientisme

Au-delà d'une explication psychologique – comment dire que le Roi (ici, Frege) est nu ? – comprendre la résilience de cette erreur manifeste, c'est évoquer la prégnance du *scientisme*, lequel, ne connaissant pas le doute, s'est arc-bouté sur ce calcul des prédicats un peu bricolé. C'est ainsi qu'un épigone peu inspiré de Russell, Quine, y a vu le socle indiscutable sur lequel fonder sa philosophie de l'existence au moyen du quantificateur \exists , une « ontologie analytique » où l'on rencontre un cousin de l'inexistant Lieutenant Kijé.

Les philosophes analytiques à la Quine se prennent pour des parangons de rationalité alors qu'ils pratiquent une sorte de théologie du pauvre. La justification quinite de l'existence d'un individu rappelle d'ailleurs la croquignollette « preuve ontologique » de l'existence de Dieu due à Saint Anselme : Dieu a toutes les propriétés, dont celle d'exister. Une axiomatique franchement inconsistante⁶ celle-là, alors que celle de Quine est seulement *ad hoc*.

La Théorie des ensembles **ZF** (« Z » comme Zermelo) se présente comme un système relativement ouvert où les interdits ne sont pas omniprésents. Ce qui ne pouvait satisfaire Quine qui pondit une Théorie des ensembles de son cru, l'infâme **NF** (New foundations). Les propositions y sont divisées en stratifiables et non-stratifiables, seules les premières ayant droit de cité. En particulier, l'inégalité $n < 2^n$ est refusée car non stratifiable, *i.e.*, immorale. Contrairement à **ZF**, conçu pour abriter les mathématiques, **NF**, système carcéral par excellence, s'ingénie à les brimer.

2.4 Le réalisme axiomatique

J'ai mentionné Dieu et la Réalité comme deux instances dont le rationalisme se méfie, qu'il tient à distance. C'est une façon métaphorique de parler de la douteuse association entre signifiant (l'axiomatique) et signifié (la sémantique), le *réalisme axiomatique*. Ce point de jonction de deux essentialismes voit le Goupillon de la sémantique adouber le Sabre de l'axiomatique. Mais, si la question de la relation du langage à la réalité est une question centrale, on ne saurait y répondre hâtivement.

6. L'absurdité se définit au second ordre par $\forall X X$, *i.e.*, la totalité des propositions.

Commençons avec Aristote : son approche, d'une modernité étonnante, réduit les diverses figures, *Celarent*, *Disamis*, etc. du syllogisme à une unique figure de base, *Barbara*, au moyen de transformations internes. Sans mépriser pour autant ce que nous appelons sémantique, il la cantonne à un rôle de *falsification* : un contre-exemple concret nous dispense de considérer une figure douteuse. Une bonne analogie est fournie par la « preuve » – il vaudrait mieux dire falsification – par neuf qui peut déceler une erreur dans un calcul, par exemple que $8 \times 7 = 46$ est incorrect. C'est une sorte de police, assez efficace, mais qui laisse passer des erreurs, *e.g.*, $8 \times 7 = 101$.

Le réalisme axiomatique postule, sous le nom de *complétude*, une sorte de réciproque à la falsification : est vrai ce que l'on ne peut pas falsifier. La falsification passe ainsi du statut d'auxiliaire utile, mais accidentel, à celui d'explication totalisante basée sur la réduction du pourquoi au comment. En oubliant que fonder la raison sur le réel revient à ignorer les hiérarchies causales, à expliquer que le bœuf a été créé en prévision de la charrue – ou le pare-brise en prévision de l'essuie-glace.

La falsification avait pour vocation de nous déranger ; en prenant le pouvoir, elle se met à nous conforter, en perdant au passage son honnêteté. Ainsi, alors que la douteuse implication $\forall \Rightarrow \exists$ est falsifiée par le modèle vide – $\forall xA[x]$ et $\exists xA[x]$ y sont respectivement vrai et faux – la police sémantique décide de fermer les yeux en disqualifiant le témoin gênant. Ouvrez votre manuel et vous verrez que les modèles doivent être non vides. Pourquoi donc ? Pour créer un *lebensraum* pour les variables Kijé.

La référence réaliste reste cependant utile dans le cas classique (vrai/faux).

2.5 La vérité au fond du puits

L'image du bunker rend compte de la grossièreté de l'approche et aussi de l'enfermement, du cloisonnement qui lui sont propres. Ces éléments sont d'ailleurs liés, ainsi la grossièreté de la réduction au couple vrai/faux interdit-elle toute communication entre propositions et individus (p. 12).

Tout ce que le bunker, totalement fermé sur l'extérieur, peut nous proposer en termes d'ouverture, c'est d'invoquer – j'ai bien dit invoquer car tout contact est interdit – un bunker plus profond, le « méta-bunker ». C'est comme cela que Tarski a trouvé la vérité au fond du puits, par exemple :

Conjonction : $A \wedge B$ est vrai quand A est vrai **et** B est vrai.

Disjonction : $A \vee B$ est vrai quand A est vrai **ou** B est vrai.

Négation : $\neg A$ est vrai quand A **n'est pas** vraie.

Implication : $A \Rightarrow B$ est vrai quand A vrai **implique** B vrai.

Si l'on se rappelle que $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow$ se lisent « et, ou, non, implique », la définition revient à changer de graisse : A est vrai quand **A**. N'hésitons pas à dire que le roi est nu : cette définition semble l'œuvre du Diafoirus de Molière : « Pourquoi l'opium fait-il dormir ? – À cause de sa vertu dormitive ».

La définition de Tarski trouve un écho dans la notion de *modèle* du calcul des prédicats. Il faut préciser un domaine⁷ \mathbb{D} et spécifier la vérité (vrai/faux) des propositions atomiques $p(c_1, \dots, c_n)$ à paramètres c_1, \dots, c_n dans \mathbb{D} .

Ces modèles *classiques* sont intéressants, car ils réduisent certaines questions à l'alternative vrai/faux. Comme toutes les réductions, celle-ci a ses bons côtés – sa proximité avec la Théorie des ensembles –, mais aussi ses points aveugles : elle détruit des pans entiers de la logique. C'est ainsi qu'elle oblige à traiter les individus à part, avec pour pour dommage collatéral l'expulsion de l'*égalité* du paradis logique, voir section 2.7.

La notion de vérité n'a, au départ, rien d'externe : elle est liée à la *preuve* :

A est vrai quand A est prouvable.

Encore ne faut-il pas confondre preuve et preuve formelle dans un *système*, *e.g.*, un système d'arithmétique \mathbf{T} . C'est exactement ce que dit le justement célèbre *Théorème d'incomplétude* (1931). Gödel fabrique une proposition G qui se lit « Je ne suis pas prouvable dans \mathbf{T} », avec le sens moral de « Je ne suis pas vrai » ou encore « Je ne suis pas prouvable du tout ». On évite l'antinomie, la contradiction qui tue, en distinguant la prouvabilité dans \mathbf{T} de la vérité, *i.e.*, la prouvabilité tout court : l'incomplétude est une *antinomie subjective*⁸ qui se résoud en blâmant le Sujet, le système \mathbf{T} incomplet car trop bridé. Sans être antinomique, l'incomplétude est néanmoins un *paradoxe*, *i.e.*, un résultat qui s'oppose à la $\delta\acute{o}\xi\alpha$ scientifique et coupe ainsi l'herbe sous le pied du réalisme axiomatique.

Il aurait fallu essayer de comprendre ce qu'est une preuve générale, hors systèmes. Tarski a trouvé plus commode d'essentialiser cette vérité hors d'atteinte au moyen de son infâme pléonasmie. Qui repose sur l'architecture du puits, univers parallèle⁹ dans lequel baigne cette vérité hors d'atteinte. Et sa pile de bunkers et méta-bunkers, empilés les uns sur les autres – comme des tortues japonaises jusqu'en bas : « Turtles all the way down ». L'incomplétude montre que l'on n'a pas été très soigneux quelque part mais sans nous dire où : une quarantaine de nature prophylactique, le cloisonnement artificiel entre tortues et méta-tortues, s'impose.

Cette définition, dans lesquels d'aucuns ont vu un plagiat de l'immortel La Palice, est avant tout un SCUD destiné à noyer la dérangeante incomplétude dans une mare de prudhommeries, de distinctions byzantines entre le vrai et le prouvable. Ainsi le célèbre Théorème de Tarski « La vérité n'est pas définissable » où l'on peut voir un autre plagiat – de Gödel, dont l'immortalité est de meilleur aloi que celle de La Palice – : c'est l'incomplétude du pauvre.

7. Qui peut être vide, si l'on n'on n'a pas développé de dépendance aux variables Kijé.

8. Ce qui rappelle le film *C'est arrivé demain* (1944), où les soucis du héros qui avait lu la nouvelle de sa mort (= l'antinomie) dans le journal... du lendemain, s'arrangent car le quotidien avait en fait imprimé une fausse nouvelle.

9. Qui rappelle ces films de science-fiction – *Le monde sur le fil* ou *The matrix* –, amusants sinon profonds, fondés sur une hiérarchie entre des méta-niveaux indiscernables.

L'incomplétude nous apprend qu'il est des limites à la connaissance formelle, ces limites étant internes : autrement dit, Dieu seul a la réponse à certaines questions. Mais ce n'est qu'une façon de parler. Le plagiat tarskiste vulgarise l'approche de Gödel en remplaçant le « On ne peut pas tout savoir » de Gödel par « La vérité n'est pas définissable » ; il introduit Dieu sous la forme de cette vérité incestueuse et donc métaphysique. Quand je disais que le scientisme est irrationnel . . .

2.6 La gesticulation

Du point de vue mathématique, la logique classique se comporte comme une algèbre de Boole. Et un modèle binaire comme un quotient de cette algèbre par un idéal maximal, ce qui ramène l'algèbre à la dichotomie vrai/faux. On peut se passer du quotient, cela s'appelle alors *sémantique algébrique*.

C'est, en fait, la descendance illégitime de Tarski : on reprend sa définition de vérité – qui ne vole pas haut, mais qui repose sur une réduction implicite au couple vrai/faux – pour n'en retenir que son aspect de changement de graisse typographique : la vérité de A , c'est \mathbf{A} ; ce « méta- A » n'est rien d'autre qu'une copie de A . On peut faire un méta-méta- A , noté \mathbb{A} , etc.¹⁰

Exemples de sémantiques algébriques, les modèles de Kripke de la logique intuitionniste – ou encore les algèbres de Heyting – ne sont que le langage écrit d'une autre façon. Il n'y a aucune sorte de limitation à ce type d'activité, partant, aucun intérêt non plus. Le *tiers exclu* $A \vee \neg A$ ne saurait être vrai du point de vue intuitionniste, mais on trouvera cependant des modèles de Kripke pour le justifier, ce qui montre bien le caractère purement gesticulatoire de l'approche¹¹.

Passablement agacé par la prolifération de ce type de non-sens, j'ai proposé un ajout à la lapalissade tarskiste :

$A \clubsuit B$ est vrai quand A est vrai **broccoli** B est vrai.

Personne n'a jamais entendu parler de \clubsuit , et pour cause. Mais nous venons d'apprendre qu'il se dit « broccoli » : au cas où l'on aurait besoin d'un connecteur inutile, le travail est déjà mâché. Pour le reste, il suffira d'énoncer les mêmes principes de part et d'autre, l'univers et son « méta » ; avec un peu de maquillage pour que l'imposture ne soit pas trop apparente. Mais le fait d'écrire une ânerie de deux façons apparemment distinctes ne la transmute pas en idée profonde.

On n'est pas très loin de la justification incestueuse des variables Kijé ; pour rester dans les références russophiles, la sémantique algébrique, c'est un peu le village Potemkine de la mauvaise logique.

10. Revoilà les tortues de la comptine japonaise où elles s'empilent jusqu'à . . . patatrac !

11. En fait, la vérité tarskiste passe à côté du déréalisme logique – qui commence dès les années 1920 avec l'intuitionnisme.

2.7 Le mitard

La fermeture du bunker sur l'extérieur se prolonge en cloisonnement interne sur une sorte de mitard¹² où végètent des *individus* logiques qui ne communiquent avec le reste que pour former les propositions *atomiques* :

Si p est un prédicat n -aire, si t_1, \dots, t_n sont des individus, alors
 $p(t_1, \dots, t_n)$ est une proposition.

L'aspect déductif de la logique est concentré sur les propositions : ce sont elles que l'on prouve, les individus n'interviennent que comme auxiliaires de la quantification. Après plus de cent ans de logique formelle, ils restent une donnée contingente et inexplicable¹³.

Le bunker est une maison mal tenue où l'on ne passe jamais le balai : la dichotomie individus/propositions ne survit que par un effet d'inertie. La paresse intellectuelle nous fait admettre sans discussion l'existence d'évanescents individus t, u, \dots qui, selon un dogme d'autant plus fort qu'il est non écrit, seraient susceptibles d'avoir des propriétés (ou *prédicats*) $A[t], B[u], \dots$

Ce point de départ discutable conduit à une relégation de l'égalité, du rang de primitive logique à celui d'un *prédicat* « = » parmi d'autres. À moins que l'on n'essaye de la définir au second ordre – *i.e.*, comme second couteau – au moyen de l'« égalité de Leibniz » :

Toute propriété de t est propriété de u .

Du point de vue *rationnel*, cette définition ne tient pas la route. Si je l'applique à t et t , l'honnêteté me force à observer qu'ils peuvent être séparés par une propriété, puisque l'un est à gauche, l'autre à droite de « et ». Cette remarque provoque toujours l'indignation des cuistres : « Vous osez considérer une propriété qui s'attache à la *forme* et pas au *fond* ? ». Coucou, revoilà le célèbre duo d'illusionnistes, Mme Forme et M. Fond, la forme écrite, contingente, contre le fond sémantique, dématérialisé. Le prétendu fond sémantique étant exactement ce que l'égalité préserve, les seules propriétés licites sont celles compatibles avec cette égalité qui préexiste ainsi à sa « définition » : ceci s'appelle *reculer pour mieux sauter*.

Bien qu'intrinsiquement circulaire, l'égalité de Leibniz peut s'axiomatiser au second ordre, en particulier :

$$t = u \Rightarrow (A[t] \Rightarrow A[u]) \tag{1}$$

avec une quantification implicite « pour tout prédicat $A[\cdot]$ ».

Circulez, il n'y a rien à voir : la délicate sélection des prédicats $A[\cdot]$ licites est effectuée autoritairement par un système. La bunkerisation, qui permet de dissimuler l'aporie de cette égalité incestueuse, est un facteur essentiel d'irrationalité.

12. Qui a lui-même son propre mitard, les absurdes variables Kijé.

13. Qui fait chuter vertigineusement les standards logiques : comparez l'algèbre de Boole, parfaite dans un rôle limité, à sa généralisation « cylindrique », *ad hoc* de chez *ad hoc*.

2.8 L'œuf de Colomb

L'égalité, la plus fondamentale de toutes les primitives logiques, a toujours été traitée en parent pauvre auquel on abandonne quelques haillons axiomatiques. Le bunker ne l'aborde jamais telle quelle, mais seulement *modulo* réduction axiomatique. Ainsi, ne bénéficie-t-elle de l'élimination des coupures que *modulo* d'indigestes bricolages : 95% de transpiration, 5% d'inspiration.

La faute incombe à ces individus qui seraient doués de propriétés, comme le Padre Pio de bilocation ; un dogme qui n'est pas perçu comme tel, tout comme la mouche dans la bouteille¹⁴ n'a pas conscience de son enfermement.

On passe ainsi à côté de la solution, lumineusement simple : il n'y a pas d'individus, seulement des propositions. L'égalité devient alors l'équivalence logique. Les problèmes métaphysiques quand aux propriétés licites desdits individus disparaissent : elles deviennent des *connecteurs*, *i.e.*, des opérations logiques qui, comme la négation, transforment les propositions.

Si cette solution n'a pas été considérée il y a cent ans, c'est que la logique reposait sur un substrat « classique », pas vraiment fautif, mais rigide comme tout *système*. Un système basé sur le *tiers exclu* « parmi trois propositions, deux sont équivalentes » :

$$A \equiv B \vee B \equiv C \vee C \equiv A \quad (2)$$

(\equiv est l'équivalence, \vee la disjonction). Cette réduction des propositions à deux d'entre elles, le vrai et le faux, leur interdit de représenter les individus.

« Tout est vrai ou faux », utile mais discutable, est *logiquement* erronné comme tout ce qui ne va pas de soi. Car il n'y a aucune raison que (2) s'applique à *toutes* les propositions. Cette remarque importante de Brouwer est à la base de la logique intuitionniste qui ne rompt cependant pas vraiment avec le tiers exclu qui reste vrai, à double négation près :

$$\neg\neg(A \equiv B \vee B \equiv C \vee C \equiv A) \quad (3)$$

Ainsi, l'individu *t* n'est-il ni vrai ni faux, il est lui-même. Ce n'est qu'avec la *logique linéaire* (1986) que la souplesse a été réintroduite, non pas par un changement de système, mais par une possibilité d'ouverture, celle de sortir de *tout* système, quelques soient par ailleurs ses qualités. Devenue équivalence *linéaire*, l'égalité intègre le giron logique.

* * * *

Une référence, particulièrement croquignollette, pour la logique bunkerisée est le manuel de Mendelsohn *Introduction to Mathematical Logic* (1964)¹⁵.

14. Image de l'enfermement logique (Jean van Heijenoort, conversation privée, 1976).

15. Dans les années 1972, quand je m'indignai auprès de Kreisel qu'en dépit de sa vulgarité intellectuelle, cet ouvrage ait pu rencontrer un tel succès, il me répondit que c'était précisément à *cause* de cette vulgarité.

3 Quelques lueurs

3.1 BHK

Un possibilité de sortie du bunker s'offre avec BHK¹⁶ qui tente d'expliquer la notion de preuve en général, *i.e.*, hors de tout système. Par exemple :

Implication : une preuve de $A \Rightarrow B$ est une fonction φ qui associe à toute preuve α de A une preuve $\varphi(\alpha)$ de B .

Conjonction : une preuve de $A \wedge B$ est le couple (α, β) d'une preuve α de A et d'une preuve β de B .

La comparaison avec la vérité tarskiste montre qu'on est manifestement sorti du pléonasmisme. Mais BHK n'apporte cependant qu'une lueur car le cas de l'implication pose deux problèmes : le sens précis du mot « fonction » et la nature infinie de la définition qui réfère à la *totalité* des preuves de A . Les résoudre de façon convaincante, c'est sortir pour de bon du bunker et remplacer la vieille logique 1.0 par une logique 2.0 libérée des systèmes.

Une tentative d'évasion a été effectuée au moyen des *sémantiques catégoriques*. Le mot « sémantique », en adoubant le cloisonnement, préfigure l'échec stratégique de l'entreprise qui est cependant un succès tactique : Edmond Dantès a creusé un tunnel pour rejoindre l'abbé Faria. Cette approche – le niveau -2 de [3] – considère les preuves comme des *morphismes*, *i.e.*, des fonctions qui respectent une certaine forme.

La sémantique, discutable quand elle nous conforte, est très utile quand elle nous dérange. C'est dans l'espoir de quitter les sentiers battus et rebattus que j'ai introduit les *espaces cohérents* ([3], ch. 8) : ils mirent en évidence une décomposition des opérations habituelles selon des axes d'algèbre linéaire, produit tensoriel, etc. La prise en compte logique de cette analyse algébrique devait conduire à la *logique linéaire*. Les espaces cohérents jouèrent ici un jeu d'agent provocateur, une engeance qui ne saurait prendre le pouvoir : dans un élan d'enthousiasme, j'avais aussi créé des éléments neutres multiplicatifs $\mathbf{1}, \perp$ qui se sont finalement révélés des erreurs logiques – alors que, du point de vue catégorique, ils semblaient tellement naturels !

La pierre d'achoppement de cette approche est l'*essentialisme* inhérent aux catégories : de quel Ciel est donc tombée cette forme que les morphismes préservent si respectueusement ? Avec un peu de pratique, la sémantique catégorique, vue comme une Église de la Forme, peut être vidée de toute substance et devenir une autre gesticulation basée sur des diagrammes abscons.

Ce qui enferme les catégories dans un bunker, c'est le caractère complètement externe de cette forme : on ne la discute pas, ça passe ou ça casse ! Elle relève du *déontique* ; peut-on donc l'internaliser, en évitant les mauvaises blagues, par exemple la « logique » de ce nom (p. 5) ?

16. Brouwer-Heyting-Kolmogorov, vers 1930, due indépendamment à Brouwer et Kolmogorov, Heyting étant ici l'Amerigo Vespucci de ce nouveau monde logique.

3.2 Kreisel vs. Lewis Carroll

Une démonstration de $A \Rightarrow B$ est une fonction φ censée agir d'une certaine façon. Mais comment pouvons-nous en être sûrs ? On a donc proposé d'adjoindre à cette démonstration-fonction φ un auxiliaire φ_1 démontrant que φ envoie bien les démonstrations de A dans les démonstrations de B . Ce φ_1 , sorte de méta-démonstration, est la violente réaction du bunker qui cherche ainsi à obstruer la voie ouverte par BHK. Il ne reste, en effet, guère d'espoir : φ_1 ressemble étrangement à φ et deux options sont disponibles.

On peut décider que φ_1 est une démonstration au sens formel, ce qui revient à retourner à la case départ des systèmes. Connue sous le nom de *réalisabilité*, cette approche est techniquement intéressante ; mais si l'oiseau chante encore, ses ailes ont été coupées. La proposition de Kreisel [5] – en cette occurrence bien inférieur à lui-même –, qui fit polémique en son temps, selon laquelle φ_1 se ferait dans un système \mathbf{T} donné à l'avance est ridicule. Il se gardait d'ailleurs bien de préciser le fameux système \mathbf{T} de référence ; je le soupçonne de n'avoir guère creusé son idée¹⁷ qui induit une réduction axiomatique – non voulue, mais il avait le niveau pour s'en apercevoir – à \mathbf{T} .

On peut traiter φ_1 dans le style BHK ; mais il lui faudra alors sa propre méta-démonstration φ_2 . Pile de tortues en formation ! Ce qui rappelle un article de Lewis Carroll *What the Tortoise said to Achilles* (1895) qui se veut une variante du paradoxe de Zénon. Carroll imagine une course logique où la Tortue a décidé de refuser le *Modus ponens* tout en acceptant les tautologies habituelles. Achille veut se rendre à B en partant de A au moyen du véhicule $A \Rightarrow B$. La Tortue le lui interdit, mais concède l'implication $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$; Achille essaye alors de se rendre de $A \wedge (A \Rightarrow B)$ à B au moyen du véhicule $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$, nouveau refus de la Tortue qui concède cependant $(A \wedge (A \Rightarrow B) \wedge ((A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B)) \Rightarrow B \dots$ et itération de la chose pour en faire un *nonsense*.

Lewis Carroll prétend, avec sa modestie habituelle, avoir trouvé un pendant logique au paradoxe de Zénon, ce qui est ri-di-cule ! L'Achille de Zénon se rapprochait de la Tortue sans jamais l'atteindre. Ici, il s'en éloigne constamment¹⁸ : c'est en fait la Tortue qui poursuit Achille... Où est donc le paradoxe ?

Le texte n'a guère été commenté que par des philosophes analytiques ne connaissant pas plus de logique que Lewis Carroll – c'est comme si les lois de Kepler étaient glosées par des astrologues – : ce sont des méta-implications empilées que le « pédophile victorien » aurait mis au jour. On voit la relation à BHK : φ_1 prouverait une de ces méta-implication.

17. Quand je l'interrogeai sans ménagements à ce sujet vers 1979, il s'en tira avec une pirouette – il aurait voulu faire une blague. Ses partisans à l'humour limité, comme Troelstra, ne l'ont visiblement pas compris à l'époque.

18. Techniquement parlant, Achille propose des preuves $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots$ de B de plus en plus complexes : π_{n+1} se simplifie même en π_n par normalisation.

Cela justifie, pensent-ils, une version archaïque de la connaissance stratifiée selon des niveaux d'autorité. Il y aurait ainsi des capitaines, des colonels, des généraux de la certitude, chacun tirant sa légitimité du niveau supérieur et commandant au niveau inférieur ; mais parfaitement isomorphes par ailleurs. D'ailleurs, ce général dont se réclame le colonel, ne serait-ce pas lui-même ? « Je vais chercher mon supérieur » dit-il, avant de revenir avec deux étoiles subrepticement ajoutées à son képi.

3.3 Une question de tuyaux

BHK est un sérieux coup de canif dans le bunker, puisqu'il instaure des communications internes, des sortes de tuyaux entre démonstrations, *e.g.*, de $A \Rightarrow B$, de A et de B . La version Kreisel de BHK ne reconnaît que deux types de tuyaux, ceux du type fonction et ceux du type preuve dans le système de référence **T**. Lewis Carroll verrait plutôt un empilage de méta-tuyaux¹⁹, mais son approche se réduit en fait à la distinction entre le *Modus ponens* « Si A et $A \Rightarrow B$ alors B » et le principe $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$, distinction qu'il a reproduite *ad nauseam* en dessinant de grotesques moustaches sur le buste de Zénon. Kreisel et Lewis Carroll, dont seul le premier fut un logicien sérieux, s'accordent finalement sur l'existence de deux types de tuyaux, aux fonctionnalités différentes.

Adduction d'eau potable : forme, diagnostic, sans coupures, *usine*.

Évacuation d'eaux usées : fond, pronostic, coupure, *usage*.

L'empilement itéré fait de la vidange de l'un l'eau de source de l'autre, une conception digne de Monsanto. Le *Modus ponens* apparaît, en tout cas, comme un cloaque où toutes les eaux sont mélangées. Alors que la logique, qui va de soi, qui coule de source donc, n'a que faire des eaux usées.

Le bunker instaure un culte de la *forme* d'un essentialisme tellement respectueux qu'il ne la voit plus ; il faudrait l'opposer au *fond* sémantique et distinguer le jugement de forme sur φ et le fait, de fond, qu'elle fait bien ce qu'elle dit. Les mots forme et fond sont cependant à éviter du fait de leur imprécision, car on ne sait jamais trop ce qui relève de l'un ou de l'autre. Il servent à des justifications de type totalitaire : il paraît que la fin (le fond) justifie les moyens (la forme). C'est ainsi que Klaus Barbie est présenté comme un moyen au service d'une fin haïssable ou admirable selon qu'il exerce ses talents à Lyon pour la *Gestapo* ou à La Paz pour la CIA, ce qui ne peut que consoler les familles des victimes boliviennes du bourreau. Mais on peut tout aussi bien soutenir que, derrière une défense de pure *forme* de la démocratie, le but de *fond* de la CIA est l'instauration de régimes à la Pinochet dans le monde entier.

19. Certains extrémistes prétendent même que, comme toute la pile ne repose finalement sur rien, il est nécessaire de rajouter une tortue pour soutenir l'ensemble, puis une autre pour la soutenir, etc. Cela s'appelle une itération transfinie : pour penser qu'une bêtise s'améliore quand on l'itère transfiniment, il faut être soi-même d'une insondable bêtise.

Laissons donc forme et fond à la novlangue journalistique et passons à l'opposition diagnostic/pronostic : le diagnostic médical arrive, à la suite d'une série d'examens, en général sans conséquence pour le patient, à mettre un nom sur la maladie dont il souffre. Le pronostic, qui concerne l'évolution de l'affection, est la conséquence nécessaire du diagnostic. Mais la médecine est une activité trop empirique pour pouvoir servir de référence au raisonnement abstrait.

3.4 Gentzen et la coupure

Adduction/vidange, diagnostic/pronostic, il y a deux types d'implications : le symbole « \Rightarrow » et le *si... alors...* du *Modus ponens*. Concédonc à Lewis Carroll le fait d'avoir entrevu la distinction, ce qui est remarquable : $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ *vs.* « Si A et $A \Rightarrow B$ alors B ». Même s'il l'a aussitôt bunkerisée en décrétant que *si... alors...* était le « méta » de \Rightarrow , d'où cette production de... métastases.

Pour séparer l'eau de source de l'eau de vidange, il faut distinguer les aspects *constatatif* et *performatif* de l'implication. Le monde constatatif est celui des vérités établies, qui peuvent être soit données comme A et $A \Rightarrow B$, soit démontrées logiquement comme $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$. On veut les utiliser pour produire d'autres constats, *e.g.*, la conclusion B du *Modus ponens*, mais cette production est du ressort de la *performance* : il faut *faire* quelque chose. La distinction logique de base est donc celle entre *ne pas faire* et *faire*, *statique* et *dynamique* ; en informatique, *écrire* un programme et *exécuter*. Mais le réalisme axiomatique a brouillé les cartes : ainsi, le *Modus ponens*, fondamentalement performatif, est-il aussi partiellement constatatif²⁰.

La distinction a été mis au jour par Gentzen au moyen de son célèbre *Calcul des séquents*²¹ dont on a tout de suite vu les potentialités techniques ; il rétablit de la finesse dans ce bunker où règne la grossièreté. Il y a maintenant, non pas une règle quasi-unique – le sempiternel *Modus ponens* – mais une multitude de micro-règles adaptées à tel ou tel connecteur logique, y compris l'implication. Elles gèrent la partie constatative, dite sans coupures, de la logique, un monde où l'on produit sans jamais consommer : imaginez une cuisine où l'on ne pourrait pas utiliser de produits préparés, où il faudrait fabriquer son beurre avec du lait trait à la vache préalablement élevée et nourrie ! Cet univers malcommode est complété par un principe, la *coupure*, qui permet d'utiliser ce que l'on a produit, par exemple le beurre qu'un autre a préparé. La coupure est, si l'on veut, un *Modus ponens* épuré réduit à ses aspects performatifs : il sert uniquement à l'évacuation des eaux usées.

Parmi les percées techniques de Gentzen, la plus spectaculaire est sa *Propriété de la sous-formule* qui énonce – je suis le premier à le dire ici –

20. La touche « retour chariot » des claviers est tout aussi ambiguë : elle est constatative quand elle va à la ligne, performative quand elle lance un programme.

21. Qui permet aussi, si on le souhaite, d'éliminer sans effort les infâmes variables Kijé.

l'inutilité des systèmes, du moins au premier ordre. Elle permet d'aborder une proposition logique comme si le reste du monde n'existait pas.

Grandeur et misère de la sémantique : l'explication la plus simple du « sans coupure » est donnée par la non-fausseté dans un modèle trivalué. La non-fausseté n'est pas préservée par coupure, *i.e.*, par *Modus ponens* : si A n'est ni vrai ni faux, alors $A \Rightarrow B$ n'est ni vrai ni faux, mais B peut cependant être faux. Mais cette réfutation fulgurante n'a aucune contrepartie positive : en effet, les modèles à trois valeurs sont un désert, car la valeur « ptet ben qu'oui ptet ben qu'non » phagocyte les autres. Ce qui explique le peu d'intérêt de la version sémantique de l'élimination des coupures (Schütte [6]). Il faut sortir du cadre réaliste pour comprendre ce qu'il se passe.

3.5 Herbrand et le déontique

Le célèbre théorème du météorique Herbrand, mort dans un accident de montagne en 1931, est beaucoup plus qu'une version archaïque du calcul des séquents. C'est l'indispensable explication de la distinction mise au jour, mais pas du tout comprise, ni par Gentzen, ni par Schütte.

Revenons à BHK : « φ est une fonction qui associe à toute preuve $\alpha \dots$ » est de nature performative à cause de la monstrueuse potentialité de *tous* les α possibles. L'idée est de la remplacer par des cas particuliers $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, suffisamment représentatifs : on va vérifier que $\varphi(\alpha_1), \dots, \varphi(\alpha_n)$ sont des preuves de B . Cette idée de cas d'école, ou de cobayes pour prolonger la métaphore médicale, positionne le constat comme une performance domestiquée, une restriction de l'*usage* à une batterie de tests d'*usine*. À comparer au banal certificat de conformité à des règles tombées du Ciel de Kreisel [5].

Herbrand s'est attaqué à notre problème dans un cadre restreint : il voulait comprendre – hors de tout système – les itérations de quantificateurs, le cas de base étant la distinction entre $\forall \exists$ et $\exists \forall$. Une démonstration π , qu'elle soit de $\forall x \exists y A[x, y]$ ou de $\exists y \forall x A[x, y]$ repose sur la donnée d'un *témoin* $y = t[x]$ tel que $A[x, t[x]]$ ²². On sait que le préfixe $\exists \forall$ suppose que t ne dépende pas de x , mais comment le dire de façon générale ? Le calcul des séquents répondra en énonçant des règles logiques qui interdisent d'obtenir $\exists y \forall x A[x, y]$ à partir de $A[x, t[x]]$ quand la dépendance $t[x]$ n'est pas fictive.

Herbrand, moins discipliné que Gentzen, discute les ordres dans un esprit « existentialiste » : le préfixe $\exists \forall$ est impossible, non parce que les règles l'interdisent, mais parce qu'un test montre sa nocivité. Ce test consiste à chercher une contradiction entre la prétendue preuve de $\exists y \forall x A[x, y]$ et une hypothétique contre-preuve de sa négation $\forall y \exists x \neg A[x, y]$ basée sur un témoin $f(y)$, *i.e.*, $\neg A[f(y), y]$ où f est un symbole de fonction « frais ». Ce qui se ramène à la recherche d'une contradiction entre $A[x, t[x]]$ et $\neg A[f(y), y]$ et au système d'équations : $x = f(y)$, $y = t[x]$ qui se réduit à $x = f(t[x])$.

22. Dans le cadre linéaire ; le cas classique demande plusieurs témoins t_1, \dots, t_k , ce qui complique inutilement la discussion.

Si la dépendance $t[x]$ est bidon, des substitutions idoines mènent à $A[f[t], t]$ et $\neg A[f[t], t]$ et le test réussit. Si $t[x]$ dépend réellement de x , le test échoue. La dépendance formelle $x = f(y)$ est donc le « cobaye » représentatif de la monstrueuse potentialité des témoins supposés de $\forall y \exists x \neg A[x, y]$.

3.6 Le bunker contre-attaque

Ne campant pas sur ses positions, le bunker a contre-attaqué violemment.

Le génial BHK a été souvent qualifié de *sémantique des preuves*, une sorte d'oxymore, vu que l'idée était, justement, de dépasser le réalisme.

Les résultats de Gentzen furent longtemps confinés au cadre douteux des démonstrations de consistance à la Hilbert. La compréhension, en liaison avec l'informatique, des tenants et aboutissants (encore une paire intéressante) de la *logique linéaire* (1986), qui ne se voulait pas logique de brocoli, devait m'amener à une réinterprétation du travail de Gentzen et à reconnaître le caractère pionnier (par delà son apparence snobinarde) de Lewis Carroll²³

Réalité *über alles* : le bunker a recadré Herbrand, en donnant une version sémantique à côté de la plaque de son immortel théorème. Dans un contre-modèle où $\forall y \exists x \neg A[x, y]$ serait vrai, la « skolemisation » nous donnerait une fonction \mathbf{f} telle que $\forall y \neg A[\mathbf{f}(y), y]$; l'absence d'un tel modèle permet de conclure $A[f(t), t]$. Certains autodidactes sont même allés jusqu'à invoquer un « modèle d'Herbrand minimal » de leur cru. Cette lecture, qui manque de stabilité, ne fonctionne que dans des recoins du bunker. Son grand « mérite » est d'avoir servi d'alibi à une nullissime *Closed world assumption* qui éclipse les pires logiques philosophiques.

Plus tard, alors que la logique linéaire permettait d'entrevoir une libération du carcan des systèmes, les *Logical frameworks* tentèrent de renforcer leur prégnance en créant une sorte de Galeries Lafayette de l'axiomatique où des systèmes concurrents et dénués de tout cahier des charges pouvaient ouvrir un stand, sans possibilité d'établir le moindre contact entre eux.

Même remarque pour les « sémantiques de jeux » qui situent l'interaction logique dans un cadre prédéfini qui peut, comme chez Felscher [1], se réduire à une sommaire paraphrase du calcul des séquents, les règles droites correspondant au joueur, celles de gauche à son opposant. En évitant de voir que, tout comme la logique n'a pas besoin de systèmes, ses jeux n'ont pas besoin de règles : ce que dont les joueurs débattent n'est pas de nature aléthique (qui a raison) mais déontique (ce qui est permis). C'est ce que j'ai tenté d'exprimer au moyen de la ludique [2], tentative de sortie du bunker à laquelle il n'a manqué que la distinction usine/usage pour réussir.

23. Dont l'erreur est désormais facile à comprendre : son prétendu « méta-niveau » consiste en une vérification d'*usine* de l'adéquation usine/usage. Vérification stérile, puisqu'elle ne sort pas de l'usine. En termes bancaires, cela revient à justifier un chèque impeccablement écrit, mais douteux, par un autre, tout aussi impeccablement écrit et encore plus douteux. On appelle cela de la *cavalerie*.

3.7 Les trois coups

Les trois coups de la débunkerisation ont été frappés au début des années 1930 par BHK, Gentzen et Herbrand. Mais le spectacle a mis du temps à se mettre en route.

BHK, qui permet de penser la preuve hors de tout système, nous donne implicitement la clef de la vérité : la prouvabilité abstraite, hors système. Il brise la ségrégation sémantique en permettant aux démonstrations de communiquer entre elles sur le mode fonctionnel. La Propriété de la sous-formule de Gentzen qui limite l'impact global des systèmes, va dans le même sens. L'isomorphisme de Curry-Howard (vers 1970) est, avant tout, la reconnaissance de la profonde similitude entre BHK et les travaux de Gentzen et de ses successeurs comme Prawitz. Mais systèmes et ségrégation sémantique subsistent au niveau de la forme, tombée du Ciel et qu'on ne discute donc pas. Ce sont les réseaux de démonstration de la logique linéaire (1986) qui introduisent le dialogue déontique – prolongeant ainsi le Théorème d'Herbrand.

Les réseaux de démonstration, forme stable de l'approche esquissée par Herbrand, remplacent le réalisme axiomatique par des conditions de possibilité : une opération logique n'est admissible que s'il y a moyen de la tester (usine) de façon efficace (usage). On découvre que certaines opérations ne sont pas possibles, mais ce type de restriction est plutôt l'exception. Par exemple la quantificateur existentiel Kijé, qui demande des échafaudages extravagants, est refusé ; mais on voit bien que l'exclusion de $\forall \Rightarrow \exists$ n'est qu'une restriction marginale qui n'affecte en rien l'essentiel de l'opération.

Il ne reste plus alors qu'à se débarrasser du bunker, ce que j'ai réalisé pour le premier ordre... sous réserve de rédaction.

4 Covariance et contravariance

4.1 Le second ordre

Le second ordre est omniprésent mais souvent caché pour des raisons idéologiques, les fatwas de l'imam Quine. Pour éviter de nommer le Diable, la logique 1.0 préfère donc ruser. Ainsi, la formulation bateau, un peu obsolète, du calcul des prédicats contient-elle le principe

$$A \Rightarrow (B \Rightarrow A) \tag{4}$$

qu'elle présente comme un *schéma*, une machine à fabriquer des axiomes : pour tous A et B on peut énoncer (4). Il s'agit en réalité du principe du second ordre $\forall X \forall Y (X \Rightarrow (Y \Rightarrow X))$. Mais, par peur de l'excommunication, on utilise la périphrase des schémas, qui revient au même. Pas tout à fait, car on a introduit un échelon essentialiste supplémentaire et totalement inutile, celui de ce « méta-axiome » qu'est le schéma.

Débarassé de cette hypocrisie, le schéma de récurrence, consubstantiel aux entiers naturels

$$(\forall x(A(x) \Rightarrow A(Sx))) \Rightarrow (A(0) \Rightarrow A(t)) \quad (5)$$

devient la définition du second ordre, due à Dedekind, de « t est un entier »

$$\forall X((\forall x(X(x) \Rightarrow X(Sx))) \Rightarrow (X(0) \Rightarrow X(t))) \quad (6)$$

qui permet de rendre compte des entiers naturel, notion hautement naturelle. Et donc logique : tout comme l'égalité, les entiers ne sauraient faire l'objet d'un traitement au rabais à coups de « méta-axiomes ».

La prégnance des entiers nous interdit d'anathémiser cette logique du second ordre qui se distingue de celle du premier ordre au niveau déontique. Celle-ci était basée sur une sorte d'opposition Objet/Sujet résumée par l'idée de *test d'usine*. Le second ordre est plus tordu, car ce qui est testé n'est pas purement objectif, c'est un mélange complexe qui a lui-même une dimension subjective : c'est ce que j'ai appelé *déréalisme*. Pour donner une analogie, les véhicules automobiles de ma jeunesse étaient du premier ordre : on les gérait au moyen de tests externes. Ceux d'aujourd'hui, déréalistes, renferment des logiciels destinés à leur propre évaluation, ce qui pose problème, voir le récent scandale Volkswagen.

En termes de tests, le Sujet cherche à réussir, il est *covariant* : « Votre pression de pneumatiques est correcte ». Dans le monde déréaliste, le danger est que les tests embarqués soient laxistes, qu'ils laissent passer des erreurs. Il faudrait pouvoir les tester à leur tour, en montrant *qu'ils ne laissent pas passer* certaines erreur. On aurait ainsi besoin de tests *contravariants*, à la qui perd gagne, ce qui se révèle impossible : ne pas laisser passer une erreur donnée correspond à un test qui ne converge pas, *e.g.*, qui tourne en boucle.

La racine de la distinction entre premier et second ordre est donc la différence entre covariance et contravariance. La covariance, du style prouvabilité, est expansive, la contravariance, du style consistance, est récessive. Elles sont évidemment irréductibles l'une à l'autre : c'est ce qu'a établi, de façon irréfragable, l'incomplétude.

Dans l'impossibilité de fonctionner sur la base de tests indiscutables, le second ordre est amené à une sorte d'attitude autoritaire qui fait tomber du Ciel les tests embarqués. On pourrait qualifier ceci d'axiomatique, mais le mot ne veut plus rien dire de précis. Je préfère celui d'*épidictique* – le style épictétique étant celui, pompeux des oraisons funèbres, *e.g.*, « Il a vécu toute sa vie entre l'honneur et la vertu ». Maintenant, la forme stable de cette épictétique reste à définir. Si on pouvait la relier à la Théorie des ensembles, le versant systèmes du second ordre trouverait enfin ancrage satisfaisant.

4.2 Le contravariant

La partie contravariante de la raison est formée de ces tests épidiectiques que l'on ne saurait tester. Ils sont quelque part hors d'atteinte, de vérification ; ils sont pourtant essentiels au raisonnement. Concrètement, la logique du second ordre, quand elle utilise le quantificateur $\forall X$ réfère à tous les X possibles, autrement dit à toutes les batteries de tests d'usine. Une totalité dont le caractère monstrueux n'apparaît pas de prime abord.

Une batterie de tests, c'est le contenu déontique d'une proposition A : π est une preuve de A quand π passe les tests de la batterie associée. Mais il faut se donner, en même temps que les tests pour A , les tests pour sa négation $\sim A$. Et la question centrale, derrière laquelle peut se cacher un *scandale Volkswagen* est celle de la complémentarité entre A et $\sim A$. Cette complémentarité s'énonce en calcul des séquents par les deux principes :

$$\frac{}{\vdash \sim A, A} \quad (\textit{identité}) \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \sim A, \Delta}{\vdash \Gamma, \Delta} \quad (\textit{coupure})$$

La négation \sim étant l'internalisation de l'échange entre parties droite et gauche d'un séquent, nous retrouvons la formulation originale de Gentzen :

$$\frac{}{A \vdash A} \quad (\textit{identité}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Lambda, A \vdash \Pi}{\Gamma, \Lambda \vdash \Delta, \Pi} \quad (\textit{coupure})$$

La meilleure formulation de ces deux principes se fait au moyen de *réseaux de démonstration* : on peut voir les propositions comme des prises électroniques de formes tellement variées que celles de type A ne se branchent qu'avec celles de type $\sim A$. Les deux principes s'éclairent alors :

- L'identité correspond à une rallonge comportant deux extrémités, une de type A , l'autre de type $\sim A$.
- La coupure correspond au branchement d'une prise de type A à une prise de type $\sim A$.

Le branchement est comme la peau retournée de la rallonge.

L'identité est la partie covariante de la négation : je peux, en effet, tester une rallonge en testant simultanément les deux extrémités. De cette façon, je vérifie que les tests pour A et les tests pour $\sim A$ se répondent : cela correspond à un branchement de tests dont nous avons une liste finie et définitive. Ce test sur les tests vérifie que ceux-ci ne sont pas trop stricts, qu'ils ne demandent pas l'impossible.

La coupure correspond par contre à un branchement de *testés* : une chose testée pour A à une autre testée pour $\sim A$. Ces deux « quelque chose » font partie d'une totalité monstrueuse, cet inaccessible contravariant qui s'exprime par le remplacement des tests par les testés. Tester une coupure reviendrait à vérifier que nos tests ne sont pas laxistes, ce qui est impossible. Incidemment, le laxisme correspond à la troisième valeur de la sémantique à

la Schütte [6], une image intéressante qui hélas tourne court.

Pour comprendre, imaginons que les batteries de tests pour A et $\sim A$ aient été bien choisies, *i.e.*, qu'elles s'équilibrent. Si maintenant j'affaiblis mes critères sur A et/ou sur $\sim A$ en oubliant certains tests, la rallonge sera bien plus facilement testée puisque le cahier des charges est moindre : c'est la covariance. Pour cette raison, il y a alors plus de testés pour A et/ou $\sim A$ et donc plus de possibilité de désaccord entre eux : c'est la contravariance.

4.3 L'imposture religieuse

Le contravariant ne se vérifie pas, il est de l'ordre de l'intuition. Les grandes théories reposent toutes sur une architecture dont l'harmonie ne saurait se vérifier ou dériver d'un quelconque livre de préceptes. Elles présentent cependant quelques aspects covariants, que l'on présente à tort comme des preuves ou des confirmations expérimentales. Elles sont de la même nature que la partie « rallonge » de la complémentarité entre A et sa négation – celle qui énonce que les contraintes ne sont pas excessives. Il s'agit en fait d'outils de falsification analogues à la « preuve » par neuf : elles peuvent casser l'architecture, en aucune façon la justifier.

Il est normal de postuler une architecture, par exemple la relativité restreinte. À condition d'accompagner ce postulat de réserves qui permettront plus tard de la remplacer par une autre, *e.g.*, la relativité générale. En évitant de mentionner le Grand Architecte, réduction covariante de ce que j'ai appelé, faute de mieux, l'intuition. Cette réduction est une opération à laquelle se livrent toutes les religions, dans lesquelles j'inclus le réalisme scientiste.

Elles commencent par « Sans Dieu tout est permis » ou « Sans réalité, point de science ». D'accord, sauf qu'elles enchaînent sur « Voilà donc ce que Dieu – qui a d'ailleurs une barbe blanche – m'a révélé et qu'on ne saurait discuter », ou encore « Voilà ce que nous enseigne la Réalité : la Terre est plate ». En ligne directe avec Dieu, elles auraient trouvé la porte dérobée du contravariant qui serait covariante pour ceux qui sont du bon côté du manche. Alors que, si elles avaient pris leur Dieu au sérieux, elles auraient compris qu'il est à rebrousse-poil de tout²⁴, à commencer par la religion.

Idem avec droits (covariants) et devoirs (contravariants). Quand la Droite macroniste accuse la Gauche de ne penser qu'en termes de droits, elle n'a pas tout à fait tort. Le problème est qu'elle s'attribue un accès covariant aux devoirs : en sont exemptés ses copains, les prétendus « premiers de cordée ». On retrouve cette extrémité du manche à l'usage exclusif des prêtres, des philosophes scientistes ou des apprentis-Jupiter d'où tout ruissellerait.

Que l'on essaye parfois de démultiplier en méta-manches emboîtées à la Lewis Carroll : c'est aussi glorieux que Dupond et Dupont dans le désert découvrant des pistes et des méta-pistes qui ne sont que leur propre trace.

24. « Chacun pour soi et Dieu contre tous » (Werner Herzog).

4.4 Au pied de l'arc-en-ciel

Le contravariant, c'est l'inaccessible étoile, c'est le trésor qui se trouverait, selon la légende, au pied de l'arc-en-ciel. Difficile d'en parler directement car il est la réponse à une question qui n'en a pas, mais qu'on a raison de poser, celle de la différence entre découverte et invention. Les scientifiques, et tout particulièrement les mathématiciens, ont souvent l'impression de se borner à mettre au jour des structures inéluctables qui n'attendaient que le bon moment pour émerger, en aucune façon des constructions contingentes : un autre chercheur aurait trouvé, à des détails mineurs près, la même chose.

Vouloir répondre conduirait à s'engager sur la pente savonneuse du ruissellement covariant, du « C'était écrit » platonicien, qui amène à la question débile « Par qui ? » ou plutôt « Par Qui ? » et qui se termine dans l'arbitraire religieux : le contravariant ne s'explique pas, il est *ineffable*.

Je vais essayer d'illustrer ce contravariant par son rôle en logique, *i.e.*, depuis Aristote, la théorie de la la raison pure. Mais qui nous dit qu'il est possible de parler d'un raisonnement totalement abstrait, par exemple de remplacer « Tout homme est mortel » par « Tout A est B » ? C'est l'intuition car on pourrait très bien imaginer que le raisonnement ne soit pas séparable de ses aspects sémantiques, contingents. Dans un autre ordre d'idées, l'intuition réaliste qui voudrait parler des coordonnées « pures » d'une particule, hors du processus contingent de la mesure, a été réfutée par la mécanique quantique. Et donc l'idée de poursuivre la raison pure est une espèce d'acte de foi partagée plus tard par Kant, mais pas les scientifiques analytiques genre Russell : pour eux, le raisonnement, qui relève de l'arbitraire axiomatique, est nécessairement pollué par des considérations à la tête du client.

Je poursuis en évoquant *mon* lien à l'intuition. La croyance – injustifiable, je le concède – en la pureté de la raison pure m'a conduit à rechercher une architecture digne de l'opération logique la plus fondamentale, l'égalité. Je n'ai jamais pu accepter de la voir traitée axiomatiquement, comme un prédicat parmi d'autres, alors que les autres opérations de base (conjonction, disjonction, implication) échappent à la bunkerisation depuis Gentzen.

J'ai ainsi cherché le pied de l'arc-en-ciel pendant des années en ressassant la définition à la Leibniz $\forall X(X(t) \Rightarrow X(u))$, planche pourrie qui demeurerait mon seul point de repère. En l'insérant dans le cadre post-moderne des réseaux de démonstrations, et donc au moyen de « liens » entre des $\sim X(t)$ et des $X(u)$, je suis un jour tombé – presque par hasard, mais c'était inéluctable – sur l'« erreur » consistant à oublier les X et à lier directement les $\sim t$ aux u . C'est comme si une paroi de verre s'effondrait : les individus devenaient des propositions, et l'égalité se simplifiait en équivalence $t \equiv u$. Rétrospectivement, la variable X n'apparaissait plus que comme une sorte de condom interdisant tout contact entre des propositions gérées en mode « classique » et des individus qui ne supportent pas cette binarité vrai/faux trop réductrice.

Références

- [1] W. Felscher. **Dialogues, strategies and intuitionistic provability.** *Annals of Mathematical Logic*, 28 :217 – 254, 1985.
- [2] J.-Y. Girard. **Locus Solum.** *Mathematical Structures in Computer Science*, 11 :301 – 506, 2001.
- [3] J.-Y. Girard. **Le point aveugle, tome 1 : vers la perfection, tome 2 : vers l'imperfection.** Visions des Sciences. Hermann, Paris, 2006-2007. 296 pp. + 299 pp.
- [4] J.-Y. Girard. **Le Fantôme de la transparence.** Allia, Paris, Septembre 2016. 248 pp.
- [5] G. Kreisel. **Mathematical logic.** In T. L. Saaty, editor, *Lectures in modern mathematics, vol III*, pages 99 – 105. Wiley & Sons, New York, 1965.
- [6] K. Schütte. **Syntactical and semantical properties of simple type theory.** *Journal of Symbolic Logic*, 25 :305 – 326, 1960.