TITRES ET TRAVAUX

Jean-Yves Girard
Directeur de Recherches (Émérite)

jeanygirard@gmail.com
http://girard.disque.math.cnrs.fr

Février 2018

1 Curriculum Vitæ

1.1 Scolarité

Né à Lyon en 1947, j'ai été élève-maître à l'Ecole Normale d'Instituteurs de Lyon (1962-65), puis après un an de préparation à l'ENI de Montpellier, élève-professeur à l'ENS de St Cloud (1966-70). Durant cette période, j'ai passé licence (1967), maîtrise (1968) et agrégation (1969). En 1970, j'ai obtenu un DEA de logique sous la direction de Jean-Louis Krivine. J'ai aussi commencé une recherche personnelle (système $\mathbb{F}$, voir partie scientifique), qui m'a amené à rentrer au CNRS en mars 1971 et à soutenir ma thèse d'Etat en juin 1972, avec Georg Kreisel comme rapporteur.

1.2 Activité au CNRS

Promu chargé de recherches (CR1) au 01.10.1973, puis maître de recherches (DR2) au 01.01.1981, DR1 au 01.10.1990, DR0 au 01.10.2001, DR00 au 01.01.2007, j'ai travaillé à l'Université Paris VII, dans l'Equipe de Logique Mathématique (UA753) jusqu'au 30.09.1992. Depuis, je suis à Marseille, où j'ai dirigé l'équipe de *Logique de la Programmation* au sein de l'Institut de Mathématiques de Luminy avant de prendre progressivement ma retraite. Actuellement émérite, je suis rattaché à l'Institut de Mathématiques de Marseille (I2M).
Membre nommé du Comité National (section 03) 1983-1986.
Membre élu du Comité National (section 01) 1991-1995.
Médaille d'Argent du CNRS en 1983.

1.3 Invitations

1.3.1 Mathématiques

Congrès International des Mathématiques, (ICM83, 08/1983).
Séminaire Bourbaki, 02/87.
Mordell Lecture, Cambridge, 02/1994.

1.3.2 Logique mathématique

De nombreuses invitations, dont : Logic Colloquium (Orléans 09/1972, Clermont-Ferrand 07/1975, Oxford 07/1976, Marseille 07/1981, Padova 08/1988, Clermont-Ferrand 07/1994, San Sebastian 07/1996, Philadelphie 03/2001, Helsinki 08/2003, Paris 07/2010) ; Logique et Philosophie des Sciences (Ontario 08/1975, Hanovre 08/1979, Florence 08/1995, Cracovie 08/1999).

1.3.3 Informatique théorique

Beaucoup d'invitations, dont de nombreuses écoles thématiques. Parmi les congrès : CSL (Berne 10/1991, Paris 09/2001, Turin 09/2013) ; LICS (Boston 1986, Trente 1999) ; 25$^{\text{ème}}$Anniversaire INRIA 12/1992 ; programmation logique ICLP, Paris 07/1991.

1.3.4 Séjours de moyenne et longue durée

Séjours à l'étranger à CALTECH (Janvier 1984), UPENN (Octobre–Décembre 1987), séjours récurrents à Tokyo (KEIO, le dernier fin 2015), un à Kyoto (RIMS 15.10.2011-15.01.2012).
Dans le cadre de l'Université Franco-italienne, j'ai obtenu en 2004 une des quatre chaires Venturi–de Giorgi, ce qui a donné lieu au cours [42, 43, 44] (ROMA TRE 10–12/2004).

1.3.5 Congrès spécifiques

Autour des idées que j'ai introduites, plusieurs réunions ont été organisées :

- Table-ronde sur la logique Π^1_2 à Oslo (08/1984).
- 1^er congrès de logique linéaire à Cornell (06/1993), qui a donné lieu au livre « Advances in Linear Logic ».
- 2^ème congrès de logique linéaire à Tokyo (KEIO, 03/1996), qui a donné lieu a deux volumes de comptes-rendus dans TCS (1999).
- 3^ème congrès de logique linéaire à Luminy (04/1998).
- Plusieurs écoles de logique linéaire ; par exemple aux Açores (Septembre 2000).
- Depuis 2016, le GDR franco-italien « logique linéaire » organise des réunions régulières (Lyon, Bologne, Rome, etc.).
- On mentionnera aussi les « évènements » organisés à l'occasion de mes 60 ans (Sienne, 05/2007) et 65 ans (Paris 09/2012) et 70 ans (Rome, 10/2017).

1.4 Activités d'encadrement scientifique

1.4.1 A l'INRIA

De septembre 1989 à décembre 1991, j'ai exercé les fonctions de conseiller scientifique auprès du projet FORMEL de l'INRIA (Gérard Huet).

1.4.2 Dans la CEE

J'ai dirigé un projet STIMULATION de la CEE, intitulé *Lambda-calcul typé* et qui regroupait des participants de 7 universités de France, Hollande, Italie et Royaume Uni. Le projet, étalé sur trois ans et demi (1988–1991), comportait un aspect matériel important — du moins pour les standards de l'époque en mathématiques —, 3.10^6 FF.
J'ai aussi dirigé un projet CAPITAL HUMAIN ET MOBILITÉ, d'un montant total de 610 000 ECU étalés sur 5 ans, de 1993 à 1998 ; à quelques modifications près (la plus importante étant l'adjonction d'un nouveau site à Marseille comme site principal, du fait de mon départ de Paris), il reprenait l'ancien projet STIMULATION.
Ce projet a été relayé à partir du 01/05/1998 par un projet TMR FORMATION ET MOBILITÉ DES CHERCHEURS, d'un montant de 1 310 000 ECU. Ce projet, centré sur la logique linéaire et coordonné de Marseille (Laurent Regnier), regroupait sept universités de France, Italie, Portugal et Royaume Uni.

1.4.3 Evaluation scientifique

Outre mon activité de commissaire au CNRS (1983–86, 1991–95), j'ai fait partie comme tout le monde de comités de programme. En particulier j'ai fait à deux reprises partie du comité « logique » d'un Congrès International des Mathématiques : ICM-86 et ICM-98. J'ai présidé le comité de programme de la conférence TLCA (Typed lambda-calculus and applications, L'Aquila, 04/1999 [6]) et j'ai coorganisé avec Philip Scott un séminaire thématique « Logique et Interaction » dans le cadre de la réunion AMS-SMF (ENS Lyon, 07/2001).
De 1992 à 1994, j'ai fait partie du comité d'experts mathématiques/informatique du programme CAPITAL HUMAIN ET MOBILITÉ de la DG XII, et en 2001 du comité d'experts maths/info du programme RESEARCH TRAINING NETWORKS de la même DG XII.

1.4.4 Travail éditorial

Entre autres, « managing editor » de la revue *Annals of Pure & Applied Logic* (1992–2008).

1.5 Direction d'équipe et de recherches

J'ai dirigé une équipe à l'Institut de Mathématiques de Luminy (LMD, puis IML), ce qui a permis de développer le second pôle logique de France. J'ai passé la main en Janvier 2004.
Depuis les années 1970, j'ai dirigé de nombreuses « thèses ». On comprendra que, de peur d'inévitables omissions, fatalement désobligeantes, je renonce à en dresser la liste.

1.6 Vulgarisation scientifique

J'ai exposé dans *Pour la Science* mes travaux sur les dilatateurs [17] ; un article sur la logique linéaire est sorti, dans la même revue, en 1990 [26].
J'ai publié au *Seuil* une postface à un livre sur le théorème de Gödel [1] ; le succès de ce livre (ma postface avait été traduite par un éditeur italien) a incité *le Seuil* à récidiver en 1996 [2] : un livre sur Turing dans lequel j'ai écrit une longue postface, prenant position sur — en fait, plutôt contre — l'intelligence artificielle.
Je garde une certaine tendresse pour le pamphlet [3] (disponible sur ma page Oueb) sur les « montres à moutarde ». Qualifié d'« inutile gâchis de papier » par un philosophe analytique... Un quiproquo, puisque la cible implicite du texte était interne à la profession : la théorie de la démonstration ossifiée (prédicativité, etc.). Ce qui montre qu'un pamphlet est une sorte de drapeau dont le sens final est donné par ceux qui le saluent — en l'occurrence les logiciens dits philosophiques, les experts es modèles de Kripke, qui se sont sentis visés. Si l'on ne naît pas montre à moutarde, on le devient.
J'ai abordé la question des fondements et le théorème de Gödel dans le cadre de l'*Université de tous les savoirs* (17/06/2000) [4].
J'ai rédigé le texte [5] sur la théorie de la démonstration pour l'encyclopédie coordonnée par J.-P. Pier « les Mathématiques 1950–2000 »; ce qui m'a demandé un gros travail de synthèse doublé d'un effort stylistique en rapport avec la difficulté à « faire passer » les grandes lignes du domaine.
Les années 2001–2012 ont été celles du groupe LIGC, coordonné par Jean-Baptiste Joinet. Les participants, venus de disciplines diverses, cherchaient à renouveler l'épistémologie, domaine bien sclérosé, à partir d'un implicite refus du scientisme « analytique ». Bien que non exclusivement logique, LIGC a eu le mérite de réconcilier les deux branches — technique et philosophique — de ce domaine : suite au travail de décervelage entrepris par Russell et ses épigones (Tarski, Quine, etc.), elles ne disposaient même plus d'un langage commun. Mon livre [45] (p. 25) est le fruit tardif de cette réconciliation.

1.7 Livres scientifiques

Mon livre de théorie de la démonstration [40] essayait de faire le tour du sujet, tel qu'il était avant que je ne découvre la logique linéaire. Le livre contient de nombreux résultats nouveaux qu'il serait fastidieux d'énumérer et une curiosité, l'analyse détaillée, étape par étape, d'une « vraie » démonstration : celle, topologique, du théorème de Van der Waerden (due à Furstenberg & Weiss) est complètement ramenée à son contenu combinatoire par une application des méthodes de Gentzen.
Bien moins complexe est mon livre suivant [41]. Au lieu de se vouloir l'encyclopédie d'un sujet, il se contente d'introduire, en évitant tout détail fastidieux, au sujet du λ-calcul typé. Les grandes lignes de la théorie de la démonstration y sont évoquées, et le livre se conclut naturellement sur une introduction à la logique linéaire. La légèreté du style l'avait fait adopter dans de nombreuses universités de par le monde comme texte de base dans le domaine.

Fin 2004, dans le cadre de la chaire Venturi–de Giorgi de l'Université Franco-Italienne, j'ai fait un cours de trois mois, en vingt–et–un chapitres et presque 500 pages, à l'université Roma Tre. Ce cours est une synthèse de la théorie de la démonstration, depuis le théorème de Gödel jusqu'aux développements liés aux algèbres d'opérateurs. C'est aussi l'embryon d'une réflexion méthodologique et philosophique approfondie sur la logique ; ainsi le premier chapitre s'intitule-il « Existence contre essence ». La traduction anglaise du livre a été publiée par la Société Mathématique Européenne [42, 43, 44].
Mon livre le plus récent [45] (2016), est une tentative originale, puisqu'il se propose d'ouvrir un placard qui sent plutôt le renfermé, celui du lien entre philosophie et logique. Ce rapport a été ossifié par les philosophes analytiques, dont le scientisme obtus est largement responsable du discrédit dont souffre la logique. Le livre s'en prend aux trois thèses transparentistes « On peut tout savoir/comparer/prédire » en cherchant au contraire à trouver les *conditions de possibilité* de la connaissance. Celle-ci apparaît comme le résultat d'un maillage entre quatre pôles : CONSTAT/PERFORMANCE/USINE/USAGE. Le maillon essentiel est celui de l'*usine* — ou synthétique *a posteriori* — qui correspond au concept central de la logique linéaire : le réseau de démonstration. Cette approche permet enfin une rupture avec le réalisme axiomatique qui sévit en logique — l'arbitraire axiomatique (le Sabre) en cheville avec une espèce de religion du réel, la réalité sémantique (le Goupillon), voir p. 25.

2 Recherche scientifique

Je vais essayer de positionner mon travail au sein de la logique moderne, qui commence au milieu du XIX$^{\text{ème}}$siècle.

2.1 La logique vers 1900

2.1.1 Une position douteuse

La logique n'est pas le rayon d'un grand magasin : Galeries Mathématiques, Printemps Philosophique ou Bazar de l'Informatique. C'est un domaine à part qui entretient des relations privilégiées avec mathématiques, philosophie et informatique… sans oublier la linguistique. La difficulté d'être de la logique vient de son fort potentiel idéologique, ce qui fait que les tentatives d'annexion totalitaires sont légion. « Logique » signifiant un peu « irréfragable », qui peut se targuer d'une justification logique devient inattaquable. Le problème est que la logique, approche rationaliste s'il en est, ne traite que de la raison pure, pas de la vie courante ou de la politique. Elle est donc plutôt cantonnée au rayon idéologique : ainsi le despote infaillible serait-t-il conforté si la logique pouvait, dans son champ limité, répondre à tout ; mais ce ne serait jamais qu'une analogie.
Il y a 120 ans, le totalitarisme prenait l'aspect du *scientisme*. Avec les progrès de la Physique, de la Chimie, on devait arriver à bout de tous les problèmes : en réduisant la Biologie à la Chimie, la Chimie à la Physique, la Physique aux Mathématiques et ces dernières à la Théorie des Ensembles, on disposait d'une espèce de moulinette implacable permettant de « répondre à tout ». Ce scientisme effarant — toujours à pied d'œuvre dans la « philosophie » analytique qui prétend réduire les concepts à des formules logiques — « oubliait » le formatage qui permet de réduire un problème à un autre. Mais nos Jivaros de 1900 ne s'en souciaient guère : leur attention était monopolisée par la découverte d'une antinomie en Théorie des Ensembles — Burali-Forti 1897, simplifiée par Russell 1902.
Dès lors, le rôle de la logique comme vaccin contre l'antinomie est avancé ; cette position douteuse explique les égarements consécutifs à cette « crise des fondements ».

2.1.2 Le logicisme

Russell, porte-drapeau du scientisme arrogant — faut-il rappeler son eugénisme croquignolet ?— , a une réponse toute faite : le réalisme logique. On va dépasser les antinomies en s'en tenant à la logique pure, laquelle est censée reposer sur une adéquation entre langage et réalité.
On ne peut pas se tromper davantage quant à la logique. En effet, celle-ci est basée sur une *défiance*, une prise de distance par rapport au réel. Il ne suffit pas de voir, comme Saint Thomas, encore faut-il savoir *pourquoi*. Fonder la logique et le raisonnement sur le réel revient à oublier que ce dernier n'est jamais qu'une construction, certes respectable, mais qui n'est pas à l'abri du préjugé ; surtout quand on traite d'abstractions très éloignées de nos intuitions.

2.1.3 Le formalisme

Beaucoup moins superficiel, Hilbert se recommande de Kant et refuse d'essentialiser le réel : son approche formaliste refuse toute sémantique. Ce qui se comprend ainsi : le raisonnement — y compris le recours à la réalité cher à Russell — n'est jamais qu'une opération du Sujet ; tout se passe donc au niveau de ces opérations qu'il suffit d'étudier sans la moindre référence réaliste. En termes kantiens, Hilbert comprend bien le caractère synthétique *a priori* des mathématiques ; mais il commet une double erreur.
Stratégiquement, en proposant de résoudre les problèmes de fondements au moyen de *démonstrations de consistance*. Qui justifieraient donc le synthétique *a priori* : passé à la moulinette formaliste, les *a prioris* seraient justifiés et c'est tout ce dont on a besoin dans un monde sans référence réaliste. Mais un *a priori* justifié n'est plus un *a priori*, ce qui prend Kant à rebrousse-poil. Ce dernier avait cependant raison : le synthétique *a priori* ne se justifie pas... c'est ce que dit le théorème d'incomplétude.
Tactiquement, en nous proposant une forme inexpressive : chercher le sens du raisonnement dans sa forme n'est possible que si celle-ci n'est pas triviale. Or les démonstrations selon Hilbert sont des combinaisons d'axiomes et de règles qui ont une structure arborescente, i. e., connexe et acyclique. Topologiquement, tous les arbres sont les mêmes et il est vain de tenter d'extraire quoi que ce soit de leur forme.
Au terme de mes travaux, je suis arrivé à la conclusion que le formalisme est viable. Il faut évidemment oublier l'élimination de l'*a priori* et les démonstrations de consistance. On peut tout à fait chercher le sens dans la forme — pourvu que ce soit celle, éloquente, des réseaux de démonstration. Je propose l'expression *morphologisme* pour ce formalisme débarrassé de ses errements de jeunesse.

2.1.4 L'intuitionnisme

Brouwer se recommande aussi de Kant, mais c'est celui des intuitions fondamentales. Il s'inscrit dans une ligne de pensée, où l'on trouve aussi Poincaré, qui refuse la formalisation à outrance et, en particulier, la logique. Pour lui, une démonstration n'est pas une description du réel ou une suite d'opérations formelles, mais une *construction*. Par exemple une démonstration de $A \Rightarrow B$ est une fonction (= procédure) transformant toute démonstration de A en démonstration de B. Cette explication [1] est un des axes de la modernité logique : « fonction, procédure » peuvent se lire « algorithme », d'où une possible lecture informatique.
Hilbert devait se brouiller avec Brouwer dans les années 1920 et lui infliger diverses avanies. Force est cependant de constater que les deux approches se complètent à merveille dans une perspective morphologique. Ainsi, une forme éloquente comme celle des réseaux (p. 14) est-elle aussi procédure de transformation.

1. Dite BHK, pour Brouwer, Heyting (porte-plume de Brouwer) et Kolmogoroff, voir p. 10.

3 Le renouveau de la logique moderne

3.1 L'incomplétude

En 1931, Gödel énonce son théorème d'incomplétude qui interdit toute réduction de l'*a priori.* La consistance ne peut pas être établie sans la supposer d'une façon ou d'une autre.
Une version simplifiée de l'incomplétude, l'indécidabilité, est due à Turing (1936). Les deux résultats répondent négativement à la question de répondre à tout. Mais, alors que l'incomplétude restreint ses méthodes à des méthodes nobles, logiquement correctes, l'indécidabilité envisage des algorithmes sortis du chapeau : peine perdue, même sous cette forme laxiste, on ne saurait répondre à tout. En fait (voir *infra*, p. 26), l'indécidabilité montre l'irréductibilité de la performance au constat, alors que l'incomplétude établit l'irréductibilité de l'usage à l'usine. Indécidabilité et incomplétude sont donc les versants analytique et synthétique de la même impossibilité.
Le Kaiser Hilbert pouvait difficilement accepter l'échec de sa réduction. Techniquement parlant, son programme consistait en une justification « finitiste », i. e., combinatoire, des mathématiques. La combinatoire n'étant même pas capable de justifier sa propre consistance, on a pensé à des méthodes « finitistes généralisées ».

3.2 Gentzen et les ordinaux

Le disciple le plus doué de Hilbert, Gentzen, a proposé de généraliser le finitisme au moyen de récurrences transfinies sur de petits ordinaux comme ϵ_0 qu'il associe à l'*arithmétique de Peano.* Du point de vue épistémologique, ces démonstrations n'emportent la conviction que des seuls convaincus. Après la mort prématurée de Gentzen, le flambeau de la logique ordinale a été repris par Schütte et a perduré jusqu'au début des années 1980 à Munich. Il s'agissait de travaux un peu stéréotypés, un plus grand ordinal correspondant à une théorie « plus forte ».

3.3 La logique Π^1_2

C'est ici que je vais situer brièvement la logique Π^1_2 qui m'a occupé de 1975 à 1985 ; ces travaux, qui m'ont valu en 1982 la médaille d'argent du CNRS, sont une réponse à la question « Quelle est la structure *géométrique* de la représentation des ordinaux ? ».

3.3.1 Limites inductives et dilatateurs

L'idée essentielle est que les opérations infinies sur les ordinaux sont le plus souvent définies sur les entiers, puis étendues aux ordinaux par limite inductive filtrante : en effet les entiers sont denses dans la catégorie ON des ordinaux, quand on prend pour morphismes l'ensemble $I(n, n')$ des fonctions strictement croissantes de n dans n'. Par exemple, si n et m sont des entiers, on sait définir non seulement la somme $n + m$ d'entiers, mais aussi la somme de morphismes d'entiers : si $f \in I(n, n')$, $g \in I(m, m')$, $f + g \in I(n + n', m + m')$ vérifie $(f + g)(z) = f(z)$ si $z < n$, $(f + g)(n + z) = m + g(z)$. La somme ordinale est alors définie au moyen d'une extension par limite directe. Il en va de même pour le produit, l'exponentielle etc. et plus généralement pour les fonctions ordinales utilisées par la théorie de la démonstration allemande. Les particularités de l'arithmétique ordinale s'expliquent aisément à partir de pures considérations sur la partie finie des *foncteurs* ainsi introduits. Par exemple, du fait que l'identité $(f + g) + h = f + (g + h)$ est vraie sur les morphismes d'entiers, la somme ordinale est associative. A ce sujet, on pourra lire mon article de vulgarisation dans *Pour la Science* [17].
Le concept essentiel est celui de *dilatateur*, à savoir celui de foncteur des ordinaux dans les ordinaux préservant limites directes et produits fibrés. Il s'agit en fait d'une approche finitaire,

avec un important aspect géométrique [16], qui permet de coder les ordinaux par des invariants structurels, et non pas de façon arbitraire, comme on le faisait jusque là. En particulier, les fonctions infinies extrêmement compliquées de Veblen et Bachmann, se trouvaient représentées au moyen du foncteur Λ, qui envoie les dilatateurs dans les dilatateurs [10, 12, 13]) : elles étaient ainsi complètement finitisées.
Le foncteur Λ a de nombreuses applications, mentionnons le problème alors ouvert de la *comparaison des hiérarchies*, que j'ai résolu en 1976 : on peut définir des hiérarchies de fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl} \gamma_0(n) & = & 0 \\ \gamma_{\alpha+1}(n) & = & \gamma_\alpha(n)+1 \\ \gamma_\xi(n) & = & \gamma_{\xi[n]}(n) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \lambda_0(n) & = & n \\ \lambda_{\alpha+1}(n) & = & \lambda_\alpha(n+1) \\ \lambda_\xi(n) & = & \lambda_{\xi[n]}(n) \end{array}$$

indicées par des ordinaux ; dans le dernier cas, ξ est limite et on doit choisir une « suite fondamentale » $\xi[n]$ tendant vers ξ. La hiérarchie λ croît extrêmement vite, et sert à « mesurer » les théories mathématiques courantes : par exemple, si l'arithmétique de Peano prouve la terminaison d'un algorithme qui envoie $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, alors l'algorithme est majoré par un λ_α, pour un $\alpha < \epsilon_0$. Par contre γ, plus lente, compte en quelque sorte les étapes de calcul. On ne savait pas manipuler γ (avant l'invention des dilatateurs) à cause de l'arbitraire du choix des *suites fondamentales* dans le cas limite. Mais il est possible de faire apparaître derrière les suites fondamentales une structure de dilatateur. En gros on obtient $\gamma_{D(\omega)} = D(n)$ et $\lambda_{D(\omega)} = (\Lambda D)(n)$ quand D est un dilatateur, ce qui résoud de façon simple le problème de comparaison des hiérarchies :

Théorème 1

Si D est un dilatateur, alors $\gamma_{(\Lambda D)(\omega)} = \lambda_{D(\omega)}$.

Cas particulier : $\lambda_{\epsilon_0} = \gamma_{\eta_0}$, où η_0 est l'« ordinal de Howard », ce qui associe un nouvel ordinal à l'arithmétique.

3.3.2 La β-logique

Le théorème de *β-complétude* (1978) résoud un problème ouvert par Mostowski depuis les années 60. Pour traiter la récurrence ordinaire, on sait que Schütte avait introduit des règles infinies : le problème était de trouver une nouvelle règle infinie, la *β-règle*, correspondant à la récurrence transfinie. Le problème demandait une solution syntaxique de type absolument nouveau : par exemple, certains avaient imprudemment « démontré » que le problème n'a pas de solution ; en réalité, pas de solution sauf à sortir des chemins battus... La réponse que j'ai trouvée [14] est basée sur la notion de limite inductive filtrante de démonstrations : en se donnant pour chaque entier n, une démonstration Π_n « de largeur n », on peut dans certains cas, étendre fonctoriellement la famille (Π_n) (au moyen d'opérations chirurgicales) de façon à obtenir une démonstration Π_α de largeur α pour chaque ordinal α. De tels foncteurs, appelés *β-démonstrations*, ont en fait une structure bien plus satisfaisante que les démonstrations infinies qu'ils généralisent. Le théorème s'énonce :

Théorème 2

Si A est vrai dans tout β-modèle de la théorie T, alors A admet une β-démonstration dans T.

3.3.3 Vers la détermination

Dès 1982, j'ai essayé d'appliquer mes idées à la théorie des ensembles, en particulier aux propriétés de *détermination* (existence de stratégies gagnantes) dans les jeux infinis. En 1985 (résultats jamais publiés), j'obtenais un résultat qui permettait de donner une interprétation géométrique à la détermination des jeux Π^1_1 :

THÉORÈME 3

La détermination Π^1_1 *est équivalente à l'égalisation des dilatateurs, c'est à dire (modulo quelques petites restrictions techniques) au fait que*

$$\forall D \forall D' \exists D"(D \circ D" = D' \circ D")$$

Cette nouvelle approche permettait de faire apparaître le fameux réel $O^\sharp$ des théoriciens des ensembles comme l'égalisateur des dilatateurs récursifs.

La logique Π^1_2 reste une parenthèse dans ma carrière. Les outils utilisés (limites directes, produits fibrés) ont cependant été recyclés sous forme d'espace cohérents (p. 11), mon premier contact avec la logique linéaire, vers 1985.

3.4 Gentzen

Si l'utilisation des ordinaux reste un sujet controversé, le *calcul des séquents* du même Gentzen (1934) est un point de repère majeur de la logique post-Gödélienne (avec le théorème d'Herbrand et BHK, pp. 9 et 10). *Grosso modo*, il rompt avec l'arbitraire axiomatique pour donner une approche « naturelle » au raisonnement ; d'ailleurs, une variante essentielle du calcul des séquents a été baptisée *déduction naturelle*.
La calcul des séquents, formulation symétrique des axiomes et règles de la logique, n'est pas très utile pour écrire la logique, mais essentiel pour l'étudier (un peu comme les équations de Hamilton en mécanique, qu'on utilise peu en pratique, mais qui permettent de poser les problèmes de façon abstraite). Cette formulation lui permit de démontrer (en l'absence d'axiomes) ce qu'on pourrait appeler un principe de *pureté des méthodes*, à savoir que pour démontrer A, seulement les sous-formules de A sont nécessaires. En particulier, si A a un contenu finitaire (sans quantification universelle), A se démontre sans quantificateurs universels, c'est à dire *par un calcul fini*. De plus, Gentzen donna un procédé mécanisable (*l'élimination des coupures*) permettant de remplacer une démonstration quelconque par une autre qui vérifie la propriété. De nos jours, on peut donc voir une démonstration abstraite comme un *programme*, que l'on calcule par élimination des coupures. Par exemple, le programme énonce l'*existence* d'un entier vérifiant une propriété finitaire, et l'élimination des coupures nous donne sa *valeur*.

3.5 Le système $\mathbb{F}$

Le problème s'est alors posé d'étendre le résultat de Gentzen à des cadres plus généraux. En 1953, Takeuti remarquait que la logique du second ordre permettait de formuler sans axiomes toutes les mathématiques courantes, et il proposait un procédé effectif d'élimination des coupures pour étendre le théorème de Gentzen : c'est la *conjecture de Takeuti*. En 1965, Tait démontrait l'existence de démonstrations sans coupure pour le calcul des séquents de Takeuti, mais l'essentiel manquait, à savoir la convergence du procédé d'élimination proposé par Takeuti. C'est ce que j'ai démontré en 1970, dans l'article [7], résultat amélioré dans [8]. En fait, ce résultat se présentait comme un système de *calcul fonctionnel typé*, (le système $\mathbb{F}$), dans lequel on pouvait définir un *type* **nat** des entiers (i.e. dont les objets sont les entiers), avec deux théorèmes principaux :

Théorème 4

Le procédé de calcul dans $\mathbb{F}$ converge (normalisation).

Théorème 5

Tout algorithme fonctionnel (envoyant les entiers dans les entiers) dont on peut établir la terminaison au moyen des mathématiques courantes, se représente dans $\mathbb{F}$ au moyen d'un objet de type **nat** $\Rightarrow$ **nat**.

L'intérêt soulevé en théorie de la démonstration par la solution de la conjecture de Takeuti retomba vite, car on ne sut que faire du résultat et on tourna la page. Cela dit, les informaticiens devaient plus tard redécouvrir le système $\mathbb{F}$ (Reynolds 1974) et mettre en avant son intérêt pour la programmation modulaire : en effet, le système, malgré son nombre limité (5) de schémas, permet de définir tous les *types de données* courants (entiers, booléens, arbres, listes etc.) et garantit la bonne marche des calculs. Des langages comme ML sont clairement reliés au système $\mathbb{F}$. Le système (rebaptisé *λ-calcul polymorphe* par les informaticiens) reste un des principaux outils d'étude de la programmation modulaire, car il est simple et général.
Au sujet du système $\mathbb{F}$, on pourra consulter mon exposé au séminaire Bourbaki [9].

3.6 Herbrand

Revenons à Gentzen. La notion de démonstration sans coupures est incompréhensible du point de vue réaliste. La seule sémantique du *sans coupures* consiste à ajouter une troisième valeur, **i** comme « indéterminé ». Mais aussi « inutile » : il s'agit d'une absence de valeur et on comprend qu'une sémantique basée sur le « p'tet ben qu'oui, p'tet ben qu'non » ne va pas mener bien loin. Mon article [18] tourne autour des limitations de cette interprétation ; on peut donc le lire comme la réfutation de toute vision sémantique du travail de Gentzen.
À la lumière des réflexions de mon livre récent [45], on peut donner une explication moins désolante du « sans coupures ». Il correspond à un monde où l'on aurait plus de droits que de devoirs. La troisième valeur représente alors, mais très maladroitement, le fossé entre droits et devoirs : s'il est facile de dire « p'tet ben qu'oui... », il est difficile d'en tirer quoi que ce soit. La règle de coupure, qui correspond à la conséquence logique — au vieux *Modus Ponens* « De A et $A \Rightarrow B$ conclure B » — suppose un équilibre entre les droits sur A et les devoirs afférents (celui de produire B).
C'est le moment de parler du travail d'Herbrand (1930), logicien français disparu encore plus prématurément que Gentzen et dont le travail présente plus d'un lien avec le calcul des séquents. Leurs résultats respectifs ayant souvent des utilisations voisines, on a été d'ailleurs tenté de réduire l'un à l'autre.
Herbrand, dans une optique finitiste, cherche à éliminer les quantificateurs et ne s'intéresse donc qu'à eux. Par exemple, à la différence entre $\forall x \exists y$ et $\exists y \forall x$; l'explication triviale, sémantique, consiste à dire que, dans le second cas, y ne dépend pas de x. Herbrand prend la question du point de vue *existentialiste* (p. 16) : dans les deux cas, on se donne y en fonction de x sans se poser de question, soit $y = t[x]$; puis on fait passer un test consistant à écrire les universels en fonction des existentiels *précédents*, soit $x = f(y)$, où f est une fonction symbolique dans le cas $\exists y \forall x$ et à effectuer ce remplacement dans notre solution, ce qui donne $y = t[f(y)]$, ce qui n'est possible que si t ne dépend pas de x. Cette transformation est la seule préfiguration des *réseaux* apparus en 1986 avec la logique linéaire (p. 14) et qui constituent ce que j'appelle l'*usine* (p. 26).
L'*usine* (synthétique *a posteriori*) se révèle ainsi l'explication du *sans coupure*, alors que le « avec coupures » constitue l'*usage* (synthétique *a priori*), le déductif. Mais ce n'est que très récemment,

durant mon éméritat, que j'ai vraiment compris tout cela. Comme quoi il y a une vie après la retraite...

Incidemment, Herbrand a développé une technique extraordinaire de solution des équations formelles, l'*unification*, très utilisée en informatique. Elle était à la base du défunt langage PROLOG ; plus récemment, elle permet de définir la *performance* (p. 27) dans les constellations.

3.7 BHK

Nous avons déjà rencontré BHK, i. e., la notion de preuve comme fonction. Cette notion a donné lieu à la dernière grande polémique de la logique. La question est la suivante : une preuve de $A \Rightarrow B$ est une fonction des preuves de A vers les preuves de B, mais comment s'en assurer, puisque l'on parle d'un domaine *a priori* infini ? Il faudrait pour cela une sorte de preuve auxiliaire montrant que la démonstration fait bien ce qu'elle est censée faire. Ce qui est le début d'une fuite en avant, car comment savoir que la démonstration auxiliaire est bien ce qu'elle prétend être ? Une solution désinvolte — le traitement axiomatique de la preuve auxiliaire —, proposée par Kreisel en 1965, n'a donné lieu qu'à des polémiques aussi stériles que violentes.

On peut maintenant comprendre qu'il s'agissait d'un faux problème : BHK est une définition d'*usage*, elle nous donne une espèce de mode d'emploi. Les logiciens d'il y a cinquante ans auraient voulu en plus un garantie absolue de fonctionnement. Si l'on replace la question dans le domaine courant, une définition d'usage correspond à la publicité faite autour d'un véhicule ; que l'on ne peut pas vraiment justifier en usine : on peut, au mieux passer des tests très pointus, lesquels ne peuvent en aucune façon préfigurer la monstrueuse totalité des utilisations possibles. Si la démonstration BHK appartient à l'usage, la démonstration auxiliaire appartiendrait, elle, à l'usine. Et il y a un fossé entre les deux, celui entre les deux synthétiques kantiens (*a priori*, usage et *a posteriori*, usine, p. 27). L'incomplétude nous assure que l'on ne peut, en aucune façon, assumer les deux positions.

Les logiciens d'il y a cinquante ans ne comprenaient donc pas qu'une démonstration est une espèce de *chèque sur le possible*. Avec l'élément d'incertitude, limité, mais légitime, qui s'attache à tout chèque : la seule solution absolument sûre consiste en une régression au niveau du troc, i. e., en l'abandon de l'approche indirecte, déductive, abstraite. Cela semble évident, mais à l'époque, le scientisme des fondements était encore tellement virulent que les logiciens n'avaient pas encore rompu avec l'idée de *solution finale*, pour reprendre un tic de langage scientiste auquel Hitler devait donner un sens second [2].

4 La logique linéaire

4.1 Un peu de sémantique

4.1.1 Espaces cohérents

Au départ, quand j'ai commencé à m'intéresser à l'informatique théorique, je ne prenais pas le sujet bien au sérieux ; en particulier je n'en comprenais pas les problèmes. De plus le caractère de « pièce montée » de beaucoup de prétendues conceptualisations informatiques — qui dépassent rarement le niveau de la paraphrase — n'était guère engageant. Mais j'avais, sur des points techniques mineurs, des améliorations à proposer, ce qui m'a amené à écrire deux articles [19], [20]. J'ai alors découvert que l'informatique était plus qu'un sujet à la mode ou une source

2. Et qui a persisté, on a du mal à le croire, après guerre. Un des textes du volume *Le Théorème de Gödel* [1], dû à deux philosophes analytiques des années 1955, Nagel & Newman, déplorait que Gödel nous ait éloigné de la « solution finale du problème de la consistance ». Ce que je pouvais difficilement laisser passer ; hélas, *le Seuil* ayant traduit *final solution* par *solution définitive*, mes sarcasmes tombèrent un peu à plat.

de crédits, car elle induit une remise en cause totale des bases de la logique. En particulier, les problèmes considérés par les grands logiciens des années 30 (Gentzen, etc.) prenaient une nouvelle dimension.
Au départ, il y eut le problème de la sémantique du système $\mathbb{F}$. La *sémantique dénotationnelle* avait été introduite par Dana Scott en 1969 : il s'agissait de modéliser des algorithmes fonctionnels au moyen de fonctions possédant certaines propriétés de finitude. Les tentatives faites par Scott et ses élèves pour modéliser $\mathbb{F}$ n'avaient mené qu'à des horreurs. En effet, le système $\mathbb{F}$ permet de considérer des expressions comme $I = \lambda\alpha\lambda x^{\alpha} x^{\alpha}$, qui est « typé » $\Lambda\alpha(\alpha \Rightarrow \alpha)$; cette expression a le sens suivant : c'est une fonction qui prend pour argument un type quelconque τ et nous rend le résultat $\lambda x^{\tau} x^{\tau}$; cette nouvelle fonction prend pour argument un objet a de type τ et nous rend a. Autrement dit, I est la fonction identique universelle. Le théorème 4 nous assure (bien que parmi les types τ acceptés par I comme argument, il y ait le propre type de I) que de tels objets ne mènent pas à des boucles dans les calculs. Mais modéliser ce type d'intuition fonctionnelle est très délicat pour des raisons de circularité plus ou moins évidentes ; ainsi, les épigones de Scott représentaient-ils I au moyen d'un monstrueux point fixe.
L'idée a été d'adapter le principe de prolongement par limites directes qui avait réussi dans le cas des dilatateurs. Dans le cas de I, il suffirait d'avoir une notion de domaine abstrait (du genre des *domaines de Scott*), avec la propriété que tout domaine est limite directe de domaines finis. On considérerait alors les fonctions identiques $i(D)$ de tous les domaines finis, et la fonction identique d'un domaine infini quelconque s'obtiendrait par limite directe, éliminant ainsi les problèmes de circularité... Mais pour mener à bien ce programme, il fallait d'abord « nettoyer » les domaines de Scott qui ne sont pas limites directes de domaines finis. En fait Scott avait travaillé dans la pure tradition logiciste qui consiste à se contenter de codages finis arbitraires, au lieu de codages par des invariants structurels ; il ne fut pas très difficile de trouver une simplification desdits domaines (*espaces cohérents*, [19], [20]), avec une possibilité de codage par des invariants. Dans la sémantique cohérente, les types deviennent des graphes et les objets sont des *cliques* dans ces graphes. Le côté le plus spectaculaire de l'interprétation donnée dans [20] est la grande économie des interprétations. Ainsi, le « monstrueux » I devient-il tout petit :

THÉORÈME 6

Le type $\Lambda\alpha(\alpha \Rightarrow \alpha)$, en tant que graphe, n'a qu'un point.

4.1.2 Espaces cohérents quantiques

Je suis revenu à plusieurs reprises sur le thème de la sémantique. Par exemple, en interprétant la logique dans les espaces de Banach [24].
Ou en développant une version quantique des espaces cohérents. Je voulais prendre à rebrousse-poil le point de vue de la défunte « logique » quantique, dont le but implicite était de punir la physique pour ses erreurs de logique. En d'autres termes, au lieu d'une interprétation logique du quantique, je cherchais une interprétation quantique de la logique. Ce n'est qu'en 2002 que j'ai brutalement compris comment remplacer mes espaces cohérents par une version quantique, voir [25].
Pour cela on observe qu'on peut définir les espaces cohérents au moyen de la mise en dualité suivante : deux sous-ensembles a, b du même ensemble $\mathbb{X}$ sont *polaires* quand leur intersection a au plus un point. On peut caractériser les espaces cohérents de support $\mathbb{X}$ comme les ensembles de parties de $\mathbb{X}$ égaux à leur bipolaire. Sous cette forme, la notion se laisse facilement généraliser en espaces cohérents *probabilistes* : il suffit de remplacer les sous ensembles par des fonctions du support (discret) à valeurs dans $[0, 1]$, la polarité étant donnée par $\sum f(x)g(x) \leq 1$.

La version quantique consiste à prendre pour support $\mathbb{X}$ un Hilbert (de dimension finie), le rôle des ensembles étant joué par les hermitiens, pas forcément positifs. La mise en dualité se faisant au moyen de $0 \leq \mathrm{tr}(\mathsf{fg}) \leq 1$. En fait un ECQ (espace cohérent quantique) est équipé d'une semi-norme (pouvant être infinie) ainsi que d'une relation d'ordre (ne coïncidant pas forcément avec l'ordre usuel des hermitiens). Ce qui nous intéresse ce sont les hermitiens « positifs » et de « norme » au plus 1. Ceci généralise les espaces cohérents usuels et probabilistes.
La logique linéaire s'interpréte naturellement dans les ECQ, en fait on ne voit guère la différence avec le cas de base, non quantique. Sauf que l'axiome d'identité de la logique (la fonction identique de C dans C) est susceptible de deux interprétations différentes, celle venant de la tradition, et une autre — que le cas « commutatif » ne différenciait pas. Concrètement, prenons l'implication entre $C := A \oplus B$ et lui-même ; on a le choix entre :

Commutatif : la fonction qui envoie A sur A, B sur B.

Non-commutatif : la fonction qui envoie n'importe quoi sur lui-même.

Dans le monde usuel, commutatif, ces deux fonctions sont indiscernables. Dans un monde quantique, elles le deviennent, en effet l'argument de la fonction peut s'écrire sous-forme de blocs par rapport à A, B. Le monde commutatif ne s'occupe que des blocs diagonaux, *ensemblistes.* Concrètement, la première fonction, appliquée à une matrice par blocs « tue » les deux blocs non-diagonaux, ce que ne fait pas la seconde. Cette diagonalisation « à la hussarde » opérée par la première fonction correspond au processus de mesure dans le formalisme des « matrices de densité » de von Neumann. Logiquement, la nuance entre les deux existe, elle est faite par le calcul (la première fonction est plus coûteuse) mais impossible à expliquer par les entrées/sorties, vu que dans la cas logique, les entrées seront diagonales. Cette nuance possède un nom en logique, c'est la η-expansion, variante fonctionnelle de l'axiome d'extensionalité. Pour nous résumer :

L'extensionalité, c'est la réduction du paquet d'ondes.

Les résultats de [25] sont encourageants et originaux. Cela dit, la problématique est limitée, car on ne peut pas passer en dimension infinie : on a besoin de la trace, i.e., d'une algèbre de type II_1. Malheureusement, la fonction identique dont nous venons de parler n'est plus représentable.

4.1.3 Misère de la sémantique

Bien que la sémantique puisse être ponctuellement utile — elle m'a mené à la logique linéaire —, j'ai fini par abandonner totalement ce point de vue stratégiquement condamné par l'incomplétude. Je m'explique : l'énoncé de Gödel n'est pas démontrable, bien que « vrai ». Le dogme sémantique prétend produire *quand même* des réfutations : ce sont les modèles « non standards », dont le nom est déjà un aveu d'échec. En effet, à côté du modèle standard (le bon, quoi !) il y a des machins indigestes. Tout rapprochement avec la géométrie non euclidienne serait malvenu, car, alors que les surfaces à courbure négative ou positive abondent, les bidules non standards sont obtenus *après coup*, en bidouillant la démonstration, passablement technique, de l'incomplétude. Autrement dit, il s'agit d'une réalité *ad hoc* : les modèles non standards sont les villages-Potemkine du réalisme axiomatique.
Concrètement parlant, dans toutes les questions cognitives faisant intervenir les entiers — e. g., le célèbrissime problème P=NP ? —, on ne peut pas exhiber le moindre modèle prenant en compte des limitations quant aux méthodes de raisonnement ou de calcul.

4.2 La logique linéaire

La sémantique de Scott était si compliquée à manipuler (car pleine d'informations redondantes) qu'on ne pouvait pas prendre un objet fonctionnel simple et écrire sa sémantique noir sur blanc ;

avec la sémantique cohérente, cela devint possible. A ce moment là (fin 1985), je me suis rendu compte que l'opération fondamentale du typage (la flèche $\sigma \Rightarrow \tau$ entre deux types, qui est aussi l'implication intuitionniste) n'est pas primitive : elle se décompose en opérations plus simples. Il n'était pas évident *a priori* que cette décomposition pût être internalisée, c'est–à –dire exprimée au moyen de nouvelles opérations logiques ; en fait on peut écrire une implication intuitionniste $A \Rightarrow B$ comme $(!A) \multimap B$, où « $\multimap$ » désigne l'*implication linéaire* qui est plus causale (algorithmiquement, $\sigma \multimap \tau$ est le type des algorithmes fonctionnels de σ vers τ qui appellent leur argument exactement une fois) ; « ! » (*bien sûr*) a le sens d'une répétition « A autant de fois que l'on veut » et correspond algorithmiquement à une mise en mémoire. En poussant l'analyse plus loin est apparue la *négation linéaire*, qui a le sens de l'échange entrées/sorties : ainsi, $A \multimap B$ est-il identique à $B^\perp \multimap A^\perp$, ce qui est l'analogue de la transposition en algèbre linéaire.
La *logique linéaire* apparaît dans l'article [21]. Elle se distingue de la logique usuelle en ce qu'elle est basée sur de nombreux petits connecteurs que l'on peut appréhender en termes de *ressources*. Par ressources, on entendra aussi bien de l'argent que du temps de calcul ou encore de l'espace mémoire. Les connecteurs linéaires peuvent s'expliquer ainsi (voir aussi mon article de vulgarisation paru dans *Pour la Science* [26]) :

- L'implication $A \multimap B$ énonce qu'en utilisant (mieux : en *usant*) A, j'ai B ; bien sûr, une fois utilisé, A n'est plus là (exemple trivial : en déboursant A, j'ai B).
- $\otimes$ (*fois*) énonce plus qu'une simple conjonction : les ressources pour A et pour B s'ajoutent (exemple : B n'est pas identique à $B \otimes B$, car $B \otimes B$ demande deux fois les ressources pour B).
- & (*avec*) est une conjonction qui n'a les ressources que pour l'un des deux (quand on a $A \& B$, on a A ou B, au choix, mais pas les deux) ; il s'agit bien d'une conjonction, puisque $A \& B \multimap A$ est valide.
- $!A$ (*bien sûr*) énonce que l'on a A sans limitation de ressources ; c'est typiquement la situation des mathématiques, où l'utilisation d'un lemme ne s'oppose pas à sa réutilisation ultérieure ! Ainsi, si l'on sature les formules logiques à l'aide de « ! », on retrouve les principes de la logique classique, qui apparaît donc comme un cas particulier de la logique linéaire.

Du point de vue technique, la logique linéaire se présente comme une modification très naturelle de la logique usuelle, formulée à la Gentzen : on se contente de faire disparaître les règles dites d'*affaiblissement* (de B déduire $A \multimap B$) et de *contraction* (de A déduire $A \otimes A$), qui énoncent précisément l'absence de problèmes de ressources ; par contre ces règles restent vraies dans le cas où A est de la forme $!C$, autrement dit les deux règles deviennent les règles du connecteur « ! ». En fait toute la logique linéaire est bâtie sur une analogie avec l'algèbre linéaire : « $\multimap$ » se comporte comme l'espace des applications linéaires, « $\otimes$ » comme le produit tensoriel, « & » comme la somme directe, « ! » comme l'algèbre symétrique etc. Les connecteurs de la logique linéaire sont du genre tenseur ($\multimap$ [3], $\otimes$, $\parr$ « par », le dual de « fois »), et appelés *multiplicatifs*, ou du genre somme (&, $\oplus$ « plus », le dual de « avec ») et appelés *additifs*, ou du genre algèbre symétrique (!, ? « pourquoi pas » le dual de « bien sûr ») et appelés *exponentielles*.

4.2.1 Applications informatiques

L'explication informelle des nouveaux connecteurs peut en fait être rendue rigoureuse : on peut coder naturellement tout un tas de machines abstraites grâce à la logique linéaire. Rappelons que ceci est strictement impossible en logique classique, sauf à introduire une temporalité externe

3. L'implication linéaire, pourtant le connecteur le plus important de tous, se définit à partir de *par* et de la négation par $A \multimap B := A^\perp \parr B$: c'est pourquoi il n'apparaît que rarement dans l'énoncé des résultats sur la logique linéaire.

ad hoc.
Il y a eu un véritable engouement dans les années 1990 pour la logique linéaire. Puis la bulle s'est dégonflée ; je m'abstiens donc d'en parler.

4.2.2 Les deux logiques allégées

En liaison avec l'informatique, je me suis penché à plusieurs reprises sur la question de la complexité de l'élimination des coupures, en particulier dans [27]. Il s'agit de remettre en cause, non pas l'opération de pérennisation $!A$, mais ses attributs. Par exemple la pérennité est-elle pérenne ? Ce qui revient à douter du principe $!A \multimap !!A$. Les résultats sont les suivants :

- La découverte de deux systèmes logiques LLL et ELL où la complexité de l'élimination des coupures est constante, autrement dit ne dépend pas du choix des formules. Les deux systèmes sont basés sur le remplacement des règles usuelles d'exponentiation par des règles plus faibles. La mise au point de ces systèmes et le calcul précis de leur complexité est un tour de force qui sollicite de façon essentielle les réseaux de démonstration (p. 14).
- LLL (le premier « L » pour *light*, c'est à dire *allégé*), est un système à complexité constante polynomiale (le degré du polynôme dépend d'un invariant de *profondeur*). C'est le premier système avec une telle propriété qui soit vraiment « naturel », i. e., intrinsèquement polynomial.
- ELL (la lettre « E » pour *élémentaire*, c'est à dire la classe correspondant aux tours d'exponentielles) a une plus grande complexité, puisqu'il permet d'exprimer l'exponentiation (au sens usuel des fonctions exponentielles) et partant, se rapproche des mathématiques courantes.

Théorème 7
Les démonstrations de taille h et de profondeur d de LLL *(resp.* ELL *se normalisent en temps h^{2^d} (resp. une tour d'exponentielles $2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^h}}}}$ de hauteur d).*

L'orientation scientifique — la complexité implicite — initiée par LLL et ELL reste très vivante. Il ne semble pas, cependant, que ces deux systèmes soient le dernier mot sur le sujet.

5 Une rupture épistémologique

Le mot n'est pas trop fort, car il s'agit d'une redistribution des cartes au sein de la logique. La logique linéaire peut encore s'accommoder d'une approche sémantique — les ressources, e. g., la sémantique des phases [21] — ; mais son *artefact* principal, les réseaux, remet en cause de l'idée-même de sémantique. Ce qui, au terme d'un processus de trente ans, m'a amené à la récente *logique 2.0.* (25).

5.1 Les réseaux de démonstration

Les *réseaux de démonstration* se présentent comme une espèce de langage parallèle.
Le premier problème résolu (pour les connecteurs $\otimes, (-)^{\perp}$ et $\parr$ était de trouver une nouvelle syntaxe, plus proche du calcul que les formalismes à la Gentzen. Ces formalismes contiennent en effet des informations redondantes qu'on est ensuite obligé de gérer, de modifier : typiquement, l'ordre d'application des règles logiques, qui n'a souvent d'autre signification que la nécessité toute bureaucratique d'écrire des règles dans un ordre contingent. La déduction naturelle, due aussi à Gentzen, résolvait la question pour les connecteurs intuitionnistes $\Rightarrow$ et $\wedge$; mais sa nature arborescente — la conclusion à la racine, les hypothèses comme feuilles — la rendent inopérante

dans le cadre linéaire. En effet, la négation linéaire, qui échange prémisses et conclusion, retourne l'arbre, ce qui nous fait sortir du format. Incidemment, on voit ici l'émergence d'une idée nouvelle : les opérations logiques comme manipulations topologiques sur les démonstrations, retournement pour la négation, juxtaposition pour la conjonction $\otimes$.
Les *réseaux de démonstration* écrivent (pour le fragment logique mentionné plus haut) les démonstrations (ou les programmes) sans ordonner les règles, c'est à dire sous forme d'un graphe à conclusions multiples. Le problème mathématique qui se pose est alors de savoir reconnaître, parmi tous les graphes qui se présentent, ceux dans lesquels on peut trouver *au moins un* ordre pour les règles, c'est à dire ceux qui sont *séquentialisables.*
La solution [21] consiste à donner des instructions de voyage dans le réseau, dépendant du positionnement préalable d'*interrupteurs* ; ces interrupteurs sont choisis suivant un principe de dualité : pour exprimer que deux parties d'un graphe ne communiquent pas, on les force à communiquer en un point, pour exprimer que ces deux parties communiquent, on empêche la communication en ce point. Le principal théorème de [21] s'énonce alors :

THÉORÈME 8
Un réseau est séquentialisable ssi quelque soit la position de ses interrupteurs, le voyage n'a qu'un cycle (absence de court-circuit*).*

Mentionnons la variante dite de Danos–Regnier, basée sur les graphes : un réseau est séquentialisable ssi quelque soit la position de ses interrupteurs, le graphe est connexe et acyclique.

5.2 Essentialisme et existentialisme en logique

5.2.1 Négation et normativité

L'article [28] étudie la signification topologique des réseaux multiplicatifs. Une démonstration de A devient une permutation σ des atomes $p_1, \ldots, p_n$ de A. Chaque positionnement $\mathcal{S}$ des interrupteurs définit une permutation $\tau_{\mathcal{S}}$ des mêmes atomes, et on note $\Sigma(A)$ l'ensemble de ces $\tau_{\mathcal{S}}$. La condition du théorème 8 se réécrit : « $\sigma\tau_{\mathcal{S}}$ est cyclique pour tout $\mathcal{S} \in \Sigma(A)$ ». Si on introduit la notation $\sigma \perp \tau$ pour dire que $\sigma\tau$ est cyclique, une démonstration de A est donc un élément de $\Sigma(A)^{\perp}$. Mieux, on peut démontrer que :

THÉORÈME 9

$\Sigma(A)^{\perp} = \Sigma(A^{\perp})^{\perp\perp}$ *($A^{\perp}$ est la négation linéaire de A).*

Ce résultat exprime (rappelons-nous que $\Sigma(A)^{\perp}$ est l'ensemble des démonstrations de A), qu'à la bi-orthogonalité près, les voyages dans $A^{\perp}$ sont exactement les démonstrations de A ; en fait ils sont denses (par rapport à la bi-orthogonalité) dans les démonstrations de A et donc les voyages peuvent être vus comme des démonstrations *virtuelles* de A. Malgré des apparences contraires, il n'y a pas de contradiction à supposer l'existence de « démonstrations » pour toute formule ; ce qui se passe c'est que n'importe quoi va avoir des « pré-démonstrations », mais les « vraies » démonstrations (ou les vrais programmes) doivent vérifier une propriété supplémentaire. Une analogie en termes de jeux : stratégies générales/stratégies gagnantes.
Ce qui fait la nouveauté fondamentale du théorème 9 est qu'il suggère une nouvelle façon de calculer : jusque là on utilisait des algorithmes de réécriture qui implantent, de façon plus ou moins astucieuse, les résultats de normalisation dans le style du théorème 4. La géométrisation du théorème 9 permet de se passer de l'essentiel de la réécriture : on s'aperçoit que la réécriture ne fait qu'assurer la « mise en contact » de deux permutations σ et τ, mais qu'elle le fait de façon particulièrement coûteuse. On peut exprimer le calcul multiplicatif en introduisant des matrices

de permutation : un calcul (dans le fragment considéré) se présente comme un couple (u, σ) où u est unitaire et σ est une symétrie partielle représentant la « mise en contact » qui indique une situation dynamique (si $\sigma = 0$, alors il n'y a rien à calculer). Les propriétés du calcul s'énoncent alors au moyen du

Théorème 10

Le calcul (u, σ) converge exactement quand σu est nilpotent. Le résultat est alors le couple

$$((1 - \sigma^2)u(1 - \sigma u)^{-1}(1 - \sigma^2), 0)$$

Cette formule exprime le résultat de Gentzen dans un cas sans doute très limité, mais sous une forme tout à fait inattendue. La terminaison des calculs devient une propriété de nilpotence, les coupures deviennent une symétrie partielle σ, et la forme normale est obtenue au moyen de

$$\text{RES}(u, \sigma) = (1 - \sigma^2)u(1 - \sigma u)^{-1}(1 - \sigma^2) \tag{1}$$

Cette formule est à l'origine de la GdI (p. 17).
La version « Danos–Regnier » du critère de correction (théorème 8) remplace les permutations par des *partitions*, avec $\sigma \perp \tau$ quand $\sigma \cup \tau$ est connexe et acyclique. Elle ne mène pas à la GdI, mais aux *constellations* de la syntaxe transcendantale (p. 27).

5.2.2 Réfuter ou récuser ?

Le point de vue dominant en logique est une espèce d'*essentialisme*, celui de Frege. *Grosso modo*, les règles du raisonnement tombent du Ciel et une démonstration est correcte quand elle les suit aveuglément. Pour tempérer le caractère axiomatique — mot qui, en Grec moderne, signifie « officier », tout un programme ! — de cette approche, on justifie les règles par leur adéquation à la réalité. Mais cette justification est fondamentalement vicieuse, puisque tout cela ne pourrait être qu'un monstrueux préjugé.
Un exemple simple, le principe $\forall \Rightarrow \exists$: bien que sévissant toujours dans les manuels, il est faux, car il conduit à des complications à n'en plus finir, alors qu'il ne sert à rien. Pas gênés aux entournures, les tenants du *réalisme axiomatique* ont décidé que les modèles ne peuvent pas être vides ! Pourquoi donc ? Uniquement pour réduire au silence un témoin gênant, le modèle vide, le seul à rétuter $\forall \Rightarrow \exists$. Il y a donc réalité et réalité, celle que l'on peut invoquer et celle qui n'est pas présentable !
Les réseaux font apparaître une autre approche, que je qualifierais d'*existentialiste*. En effet, la démonstration, vue comme objet, préexiste à sa correction ; c'est au terme d'un processus de *vérification* qu'elle devient démonstration de quelque chose. Tout comme une voiture n'acquiert son nom commercial qu'au terme d'un test d'usine. C'est la bonne lecture du théorème d'Herbrand.
Dans un réseau de démonstration, la partie inférieure — celle qui renferme les interrupteurs — détermine les tests. Nous venons de voir que ces tests correspondent à la négation linéaire. On se trouve face à deux conceptions de la négation :

Essentialiste : la négation *réfute* ; c'est le point de vue courant, banal.

Existentialiste : la négation *récuse* ; c'est le fondement contradictoire hégelien.

Ces deux visions ne peuvent être confondues. C'est ainsi qu'on a donné des noms d'oiseau à Hegel pour son fondement contradictoire, lu comme réfutation : A ne peut, en effet, pas se fonder sur sa réfutation ! Le fondement contradictoire hégelien doit se lire en termes de récusation : la négation constitue le format, les murs à ne pas franchir.

Ce point de vue est diamétralement opposé aux approches essentialistes, typiquement la sémantique. Par exemple, les catégories nous proposent un format tombé du Ciel — pensez au mot « morphisme » — dans lequel s'inscrivent les constructions. L'existentialisme permet, à travers la récusation, le dialogue entre l'objet et son format.

6 Reconstructions existentialistes

Pendant 25 ans, j'ai essayé de développer une approche existentialiste à la logique, à travers deux projets, la *géométrie de l'interaction* et la *ludique*.

6.1 La géométrie de l'interaction (GdI)

6.1.1 Première vague

Le programme de *géométrie de l'interaction* [29] se propose de donner une base à la logique (et l'algorithmique) au moyen de considérations entièrement géométriques (par exemple les isométries partielles des espaces de Hilbert), la clef de voûte étant la formule d'exécution (1). Les problèmes de dynamique — on perd tout contrôle sur l'ordre de nilpotence de σu, ce qui correspond à la complexité du calcul — suggèrent une notion de « dimension continue ». Il m'est apparu assez vite que la solution devait employer pour cette raison des algèbres stellaires. Le choix exact de l'algèbre fut par contre beaucoup plus délicat et c'est seulement fin 1988 que j'ai obtenu la première vague de résultats qui étayent le programme [30].
La C^*-algèbre Λ^* peut se décrire aussi bien concrètement (comme agissant sur un espace ℓ^2) ou abstraitement (sans référence à une représentation) ; les deux approches sont complémentaires, la seconde ayant un contenu algorithmique important. Fondamentalement, Λ^* est obtenue en internalisant :

- Une isométrie de $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$; si on écrit cette isométrie $x \oplus y \mapsto p(x) + q(y)$, cela nous donne les équations :

$$p^*p = q^*q = 1 \quad p^*q = q^*p = 0$$

- Une isométrie de $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}$, ce qui permet de définir un « produit tensoriel interne » dans Λ^*, $u, v \mapsto u \otimes v$; la non-associativité de ce produit est compensée par la présence d'un unitaire t tel que :

$$t(u \otimes (v \otimes w))t^* = (u \otimes v) \otimes w$$

L'interprétation a la forme suivante :

- A chaque démonstration sans coupure d'un énoncé A, on associe un opérateur de Λ^*.
- Plus généralement, à chaque démonstration sans coupure d'un séquent $\vdash A_1, \ldots, A_n$ on associe une matrice $n \times n$ d'opérateurs de Λ^*.
- A une démonstration d'un séquent $\vdash A_1, \ldots, A_n$ avec m coupures, on associe deux matrices u et σ de taille $2m + n \times 2m + n$, σ étant la symétrie partielle qui échange les indices 1 et 2, 3 et 4,..., $2m - 1$ et $2m$. $1 - \sigma^2$ est donc le projecteur orthogonal sur le sous-espace correspondant aux indices $2m + 1, \ldots, 2m + n$.

Exemple typique : si θ est un terme normal, par exemple du système $\mathbb{F}$, avec n variables libres, on lui associera une matrice $n+1 \times n+1$ — soit M —, les n premiers indices pour les variables, le dernier pour le résultat. Si on veut parler du remplacement des variables $x_1, \ldots, x_n$ par des termes normaux et clos représentés par des opérateurs $u_1, \ldots, u_n$ on adjoindra n indices supplémentaires (disons $1', \ldots, n'$) à M, et pour ces nouveaux indices une diagonale formée des u_i ; la dynamique du remplacement sera représentée par la symétrie partielle σ qui échange 1 et $1'$, ..., n et n'.

Sans détailler cette traduction, donnons quelques points de repère :

- Les règles logiques sont interprétées par des $*$-isomorphismes (sans préservation de l'élément neutre). Par exemple les règles multiplicatives (conjonction/disjonction, $\otimes/\parr$) sont interprétées par la contraction de deux indices en un seul au moyen de p et q. Les règles pour le point d'exclamation font intervenir la tensorisation avec 1 : en effet $1 \otimes a$ se comporte comme une mise en mémoire de a (à partir de $1 \otimes a$ on peut récupérer a, au moyen de $a = d^*(1 \otimes a)d$ (où d est un opérateur de Λ^*) ; surtout l'utilisation du produit tensoriel interne permet de faire commuter certaines opérations dans des cas cruciaux ; ainsi pour créer deux copies de $1 \otimes a$ à partir de $1 \otimes a$ on comprendra — sans que je rentre dans les détails — qu'on ait besoin d'un plongement de $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$; mais si on utilisait celui qui est défini au moyen de p et q, on se heurterait à des problèmes de commutation insurmontables (on ne sait rien de a), problèmes immédiatement résolus par l'utilisation de $p \otimes 1$ et $q \otimes 1$).
- La procédure d'élimination des coupures de Gentzen correspond au fait que les règles logiques sont des $*$-isomorphismes, et donc que la formule d'exécution (1) qui dénote le résultat ultime du calcul est invariante.

Tout ceci permet d'interpréter le système $\mathbb{F}$ (ou encore la logique linéaire sans sa partie « additive », i.e. sans $\&, \oplus$), avec le théorème suivant :

Théorème 11

A chaque terme θ du système $\mathbb{F}$ est associé un couple (u, σ) tel que :

- *$u\sigma$ est toujours nilpotent*
- *(en gros) si la forme normale de θ est représentée par u' alors $u' = \text{RES}(u, \sigma)$.*

Curieusement je n'ai obtenu qu'après coup l'explication suivante de la formule d'exécution, explication d'une simplicité déconcertante : on peut voir un algorithme, une démonstration etc. comme une boîte munie d'une prise. Cette boîte est caractérisée par un opérateur d'entrée-sortie qui me donne (en fonction d'une entrée x dans $\mathcal{H}$) une sortie $u(x)$ dans $\mathcal{H}$. Les matrices (cas des démonstrations à plusieurs conclusions) correspondent à plusieurs sorties en fonction de plusieurs entrées. Ainsi examinons le cas de l'application d'une fonction à un argument :

- D'un côté j'ai mon argument, caractérisé par une équation

$$u(x) = x' \tag{2}$$

- D'autre part j'ai ma fonction (deux entrées, deux sorties) caractérisée par le système :

$$\begin{aligned} a(y) + b(z) &= y' && (3) \\ c(y) + d(z) &= z' && (4) \end{aligned}$$

La règle de coupure, c'est à dire brancher l'argument et la fonction, consiste à identifier les entrées-sorties de (2) avec les premières sorties-entrées de (3), (4)... comme nous le ferions pour un vulgaire appareil électrique, soit $y = x'$, $x = y'$. Notre système devient

$$\begin{aligned} u(x) &= y \\ a(y) + b(z) &= x \\ c(y) + d(z) &= z' \end{aligned}$$

Ce qu'on appelle élimination des coupures, normalisation, exécution, n'est rien d'autre que la solution symbolique de ce système, c'est à dire l'opérateur donnant z' en fonction de z. Il est facile

de voir que cet opérateur est précisément celui qui est calculé par notre formule d'exécution. Tout l'appareillage logique ne sert finalement qu'à établir l'existence d'une solution pour le système.
Pour revenir au théorème 11, l'ordre de nilpotence de $u\sigma$ est *grosso modo* le nombre d'étapes de calcul. En particulier il peut devenir extrêmement grand.
La seconde partie du théorème n'est, quant à elle, vraie que sous certaines restrictions. La différence entre notre exécution (de type parallèle asynchrone) et celle prévue par la syntaxe (de type séquentiel synchrone) est réelle et complique le véritable énoncé de la seconde partie ; mais c'est loin d'être un défaut. En effet, la seule différence se produit dans le cas du calcul d'une fonction dont on ne donne pas l'argument : la syntaxe permet de faire alors des opérations *globales* que l'exécution géométrique ne peut effectuer, car elle doit transiter « physiquement » à travers l'argument. Ce qui est d'ailleurs en accord avec la pratique informatique : on ne calcule jamais de fonction sans lui donner d'argument. Comme on peut par ailleurs démontrer que cette différence n'affecte que la structure des calculs (qui sont entièrement « parallélisés ») mais pas le résultat final, c'est finalement un résultat théorique de parallélisation du calcul qui est caché dans l'« en gros » de notre formulation.
On pourrait s'inquiéter du fait que la modélisation ultime du calcul proposée ici réfère à l'espace de Hilbert et à ses isométries partielles. Ces notions ont la réputation d'être passablement infinies... et on n'a peut-être fait que reculer pour mieux sauter. Ce serait par exemple le cas si les isométries partielles utilisées pour représenter une fonction f avaient un quelconque rapport avec la fonction f en tant que graphe : toute cette construction ne serait alors qu'une pédante escroquerie. En fait nous n'utilisons que p, q, t que nous combinons au moyen des opérations $+, \cdot, \otimes, (-)^*$ de façon finie. Si on faisait opérer les opérateurs ainsi obtenus sur un Hilbert $\mathcal{H}$, on verrait que les fonctions induites sont très élémentaires et ne peuvent pas servir à cacher une dynamique.

6.1.2 L'équation de rétroaction

Mon retour à la GdI [32] après l'intermède ludique (*infra*, p. 21), étudie l'*équation de rétroaction* en toute généralité, i. e., hors de tout cadre logique.
L'équation de rétroaction suppose la donnée de $(\mathcal{H}, \mathsf{h}, \sigma)$ où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert, h est un hermitien de norme au plus 1, et la rétroaction σ est une symétrie partielle. Comme σ^2 est le projecteur orthogonal d'un espace $\mathcal{S}$, il induit une décomposition de l'espace en somme directe $\mathcal{R} \oplus \mathcal{S}$. L'équation, qui reformule (1) s'énonce

$$\mathsf{h}(x \oplus y) = x' \oplus \sigma(y)$$

Etant donné x, on cherche x' (et accessoirement y), et l'opérateur $\sigma[\![\mathsf{h}]\!]$ sur $\mathcal{R}$ qui exprime sous la forme $x' = \sigma[\![\mathsf{h}]\!](x)$ est la *forme normale.*
L'équation de rétroaction n'est pas forcément soluble *stricto sensu.* C'est pourquoi la forme normale est construite en trois étapes.

1. Le cas inversible est celui où l'équation est soluble par inversion d'un opérateur. On peut démontrer que la solution est croissante en h, et même commute aux sups et infs filtrants.
2. Par imitation de l'intégrale de Lebesgue, le cas inversible est étendu au cas semi-inversible inférieurement (s.i.i. : suprémum d'une famille filtrante d'inversibles). Par contre, contrairement à ce qui se passe avec l'intégrale, cette extension ne commute pas aux infs et là s'arrête l'analogie.
3. Le cas général consiste à découper la rétroaction σ en différence $\sigma = \pi - \nu$ de deux projecteurs, et à se ramener au cas où σ est un projecteur. Dans ce cas particulier, le cas précédent (s.i.i.) suffit. De plus, on peut utiliser des racines carrées d'hermitiens positifs

et obtenir une formule explicite ; on peut faire la même chose dans le cas de l'opposé d'un projecteur. On conclut en « recollant les deux cas », i.e., en définissant

$$\sigma[\![\mathsf{h}]\!] := \pi[\![(-\nu)[\![\mathsf{h}]\!]]\!] = (-\nu)[\![\pi[\![\mathsf{h}]\!]]\!]$$

.

Il est à remarquer que l'équation d'associativité

$$(\sigma + \tau)[\![\mathsf{h}]\!] = \sigma[\![\tau[\![\mathsf{h}]\!]]\!]$$

essentielle dans la dernière partie de la construction, n'est rien d'autre que la version GdI de la propriété de Church-Rosser des logiciens, i.e., la compositionalité de la GdI. Mais le découpage de σ en différence de deux projecteurs n'a pas de sens logique, il s'agit donc d'une technique logique revisitée dans un cadre non-commutatif.

6.1.3 GdI dans le facteur hyperfini

L'équation de rétroaction est donc « résolue » en toute généralité. La solution utilise les opérations de l'algèbre ainsi que des limites en topologie faible (ou forte), en d'autres termes elle est valide dans toute algèbre de von Neumann. J'ai alors cherché à poursuivre la GdI dans le *facteur hyperfini* de type II_1.
Le facteur hyperfini est doublement fini :

- La *finitude* (existence d'une trace, i. e., d'une « dimension »), empêche de créer des copies fraîches d'objets déjà existants.
- L'*hyperfinitude* (approximabilité par des algèbres de matrices) empêche de créer de nouvelles « qualités », i.e., des opérateurs commutant avec ce que l'on a déjà.

Il s'agit d'impossibilités *internes* ; du point de vue externe, le facteur hyperfini dispose d'une quantité impressionnante d'automorphismes. Ce qui permet de renouveler l'idée de *finitisme* : contrairement à sa version ancienne, basée sur la combinatoire prétendument innocente des entiers, on a ici un finitisme non ensembliste, basé sur la distinction entre automorphisme interne et automorphisme externe.
La GdI dans le facteur hyperfini [33] utilise l'idée de *dialecte*, introduite dans [31]. Au lieu d'interpréter π dans une algèbre de référence $\mathcal{A}$, on se place dans un produit tensoriel $\mathcal{A} \otimes \mathcal{D}$, où l'algèbre auxiliaire $\mathcal{D}$ (le dialecte) est privée, non communicable. L'interprétation du produit tensoriel $\pi \otimes \nu$ de dialectes respectifs $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ suppose la création d'un dialecte commun : en tensorisant, au sens algébrique, π avec $\mathcal{E}$, ν avec $\mathcal{D}$ on obtient π', ν' de même dialecte $\mathcal{D} \otimes \mathcal{E}$. Cette opération de tensorisation des dialectes est appelée *communication sans compréhension* : en effet, π n'a pas vraiment accès à $\mathcal{E}$ qu'il traite génériquement [4].
Le dialecte peut être vu comme la véritable ressource : sans compréhension, on ne peut pas le dupliquer. Autrement dit, la *pérennité* devient l'absence de dialecte, et la pérennisation, un isomorphisme faisant passer la partie spirituelle (le dialecte) dans le pot commun locatif.
Le facteur hyperfini produit effectivement un allègement de l'exponentielle. Mais la possible relation avec les logiques allégées LLL,ELL n'a guère été étudiée.

6.1.4 Normativité et LOGSPACE

Dans la continuité de ces travaux, mentionnons [34]. Les entiers naturels ne sont uniques qu'à isomorphisme près, car ils ont une composante *dialectale* correspondant aux instructions de

4. C'est un peu ce qui se passe avec le langage courant : nous communiquons avec des mots qui ont pourtant un sens absolument personnel, dialectal donc. Et pourtant, nous arrivons, grace aux références partagées, à créer une illusion de compréhension, à l'illusion que, disons, « bleu » veut dire la même chose pour moi que pour vous.

duplication. Du point de vue de la GdI où les entiers sont « observés » au moyen de l'équation de rétroaction par interaction avec des « anti-entiers », il se pourrait très bien que le résultat $\ll \Phi \mid N \gg$ de l'« observation » de l'entier représenté par N au moyen de l'opérateur Φ dépende de la représentation N. Il faut donc trouver un moyen d'assurer l'*objectivité* de l'observation ; le plus simple est de demander que Φ et N évoluent dans certaines sous-algèbres spécifiques du facteur hyperfini (ce que j'appelle une *paire normative* $(\mathcal{I}, \mathcal{O})$). La paire normative la plus naturelle est basée sur un produit en couronne. On s'aperçoit alors que la restriction à cette paire normative correspond à une restriction algorithmique bien connue : si la matrice 6×6 de Φ est à coefficients dans $\mathcal{O}$ et celle de la représentation N des entiers binaires à coefficients dans $\mathcal{I}$, alors le le calcul de $\ll \Phi \mid N \gg$ se fait en espace logarithmique. Réciproquement, la complexité LOGSPACE peut être caractérisée par ce choix de sous-algèbres.

6.2 La ludique

Interrompant provisoirement le programme de GdI, la ludique propose une autre relecture existentialiste de la logique. Le point de départ est la découverte par Jean-Marc Andreoli, de la *focalisation* : les primitives logiques se divisent en négatives (passives) et positives (actives). La propriété essentielle étant que les primitives de même pôle peuvent être regroupées pour être effectuées simultanément. La ludique se place donc dans un univers *polarisé* où les opérations logiques (groupées selon leur polarité) deviennent des *actions*.

6.2.1 Desseins et comportements

Les résultats de [35] peuvent se résumer ainsi : d'abord on définit des

Lieux : Il s'agit d'adresses $\xi, \xi', \ldots$ (correspondant aux emplacements des sous-formules d'une formule donnée), que l'on peut donc placer sur un arbre de suites finies.

Desseins : Il s'agit — modulo focalisation — de ce qu'il reste d'une démonstration formelle quand on a oublié la syntaxe (formules) et qu'on ne se rappelle plus que les lieux. Un dessein $\mathfrak{D}$ a une base, formée d'un lieu et d'une polarité, soit $\vdash \xi$ pour un dessein positif de base ξ, $\xi \vdash$ pour un dessein négatif de base ξ.

Orthogonalité : Deux desseins $\mathfrak{D}, \mathfrak{E}$ de bases opposées forment un *réseau*, lequel a une forme normale $\ll \mathfrak{D} \mid \mathfrak{E} \gg$, qui ne peut prendre que deux valeurs, $\mathfrak{Dai}$ (convergence) et Ω (divergence). L'orthogonalité $\mathfrak{D} \perp \mathfrak{E}$ correspond à la convergence.

Comportements : Un comportement est un ensemble de desseins d'une base donnée égal à son biorthogonal. C'est la notion abstraite, hors syntaxe, de formule logique.

A chaque formule logique A on peut associer un comportement $\mathbf{A}$, et à chaque démonstration π de A, on peut associer un dessein $\boldsymbol{\pi} \in \mathbf{A}$. On démontre deux théorèmes (pour la logique propositionnelle $\mathbf{MALL}_2$ (certains termes sont expliqués plus bas).

THÉORÈME 12 (CORRECTION)
Le dessein $\boldsymbol{\pi} \in \mathbf{A}$ est gagnant ; il est de plus incarné quand A est de classe Π^1.

THÉORÈME 13 (COMPLÉTUDE PLEINE)
Si A est de classe Π^1 et $\mathfrak{D} \in \boldsymbol{A}$ est gagnant et incarné, alors $\mathfrak{D} = \boldsymbol{\pi}$ pour une certaine démonstration π de A.

La notion d'incarnation ne joue qu'un rôle mineur dans ces théorèmes, aussi je me contenterai d'expliquer les autres termes :

Classe Π^1 : Les formules étant quantifiées au second ordre, « de classe Π^1 » signifie que la quantification est universelle. La restriction à cette classe est rendue strictement nécessaire par les résultats de complétude et d'incomplétude de Gödel. Intuitivement Π^1 correspond à la classe arithmétique Σ^0_1.

Gagnant : Tout repose sur la notion d'orthogonalité. Il est donc nécessaire — par horreur du vide — d'avoir suffisamment de desseins, ce qui n'est possible que si l'on admet des « règles incorrectes » ou *paralogismes* dont le prototype est le *démon.* Grâce au démon, il y a un dessein de base donnée $\mathfrak{Dai}$ orthogonal à tout le monde... Mais l'usage du démon a un coût : il est perdant. La restriction aux desseins gagnants — i. e., sans démon — permet d'éliminer ces desseins « illogiques » qui sont pourtant essentiels dans la construction.

6.2.2 Syntaxe contre sémantique

Ces résultats sont formulés en termes relativement classiques, puisque complétude et correction renvoient à l'adéquation entre syntaxe et sémantique. Or il se trouve que cette distinction devient obsolète. En effet, quand deux desseins $\mathfrak{D}, \mathfrak{E}$ sont orthogonaux, on peut décider d'en voir un comme « preuve », l'autre comme « modèle », l'orthogonalité voulant précisément dire qu'ils se correspondent. Si $\mathbf{E}$ est un ensemble de desseins de base donnée — par exemple l'ensemble des desseins correspondant aux démonstrations d'une formule donnée —, son orthogonal est donc l'ensemble des « modèles » et le bi-orthogonal l'ensemble de ce qui est « validé » par tous les modèles. Il en résulte que la complétude peut s'énoncer de façon purement interne, à savoir $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\perp\perp}$. De fait le théorème de complétude pleine est démontré comme corollaire de résultats de complétude *interne*, par exemple le suivant :

Théorème 14 (Propriété de disjonction)
Si $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ sont des comportements positifs disjoints, i.e., si $\mathbf{G} \cap \mathbf{H} = \{\mathfrak{Dai}\}$,
alors $(\mathbf{G} \cup \mathbf{H})^{\perp\perp} = \mathbf{G} \cup \mathbf{H}$.

À la fin, l'espace *ludique* entre syntaxe et sémantique n'est rien de plus qu'une syntaxe étendue (par les paralogismes) et épurée, ce que j'ai résumé dans la phrase :

Au fond la syntaxe ne réfère qu'à elle-même

qui prend à contre-pied la tradition logique du XX$^{\text{ème}}$siècle, en particulier le tarskisme, cette lapalissade logique [5], voir p. 29. Ce slogan pourrait facilement prêter flanc à des interprétations excessives : en réalité la syntaxe n'est qu'apparemment interprétée par elle-même, puisque la synthèse la reconstruit sans la présupposer (les desseins ne font en aucune façon référence à la logique). On peut donner une deuxième version, moins provoquante, de la même chose :

La signification des règles logiques est cachée dans la structure géométrique des règles elles-mêmes.

6.2.3 Phénomènes locatifs

La ludique nous permet de comprendre l'opposition spirituel/locatif. Par exemple, considérons la notion de somme disjointe d'ensembles, $X + Y = X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$. Elle permet de socialiser X, Y à isomorphisme près, et induit des propriétés remarquables comme l'égalité cardinale

$$\sharp(X + Y) = \sharp X + \sharp Y$$

5. La vérité est la qualité de ce qui est vrai ; tout comme l'opium fait dormir de par sa vertu dormitive.

mais cette notion n'est ni associative, ni commutative et n'admet pas d'élément neutre, à moins que l'on ne redéfinisse ces concepts à isomorphisme près, ce qui fut en son temps un acquis non-trivial de la théorie des catégories. Mais si on définit les « délocalisations » $\phi(X) = X \times \{0\}$, $\psi(X) = X \times \{1\}$, on voit que $X + Y = \phi(X) \cup \psi(Y)$, i.e. que la somme se réduit, modulo délocalisation à l'union... laquelle union est vraiment associative, commutative etc., mais par contre socialise de façon hasardeuse : ainsi elle ne vérifie que l'inégalité

$$\sharp(X \cup Y) \leq \sharp X + \sharp Y$$

La somme est spirituelle, alors que l'union est locative ; on doit constater que si la somme est plus utile dans la plupart des constructions, l'union est plus primitive, plus essentielle.
Il se passe la même chose avec la notion de produit d'ensembles ; la notion usuelle qui vérifie l'égalité cardinale

$$\sharp(X \times Y) = \sharp X \cdot \sharp Y$$

n'est associative, etc. qu'à isomorphisme canonique près. Il existe pourtant un « produit locatif », i.e. $X \bullet Y = \{x \cup y\ ;\ x \in X,\ y \in Y\}$, qui est vraiment associatif, commutatif, d'élément neutre $\{\emptyset\}$, mais qui ne vérifie que l'inégalité

$$\sharp(X \bullet Y) \leq \sharp X \cdot \sharp Y$$

On peut définir le produit usuel (ou plutôt *un* produit, mais on s'en moque, le spirituel est à isomorphisme près) au moyen de $\phi(X) \bullet \psi(Y)$.
Passons maintenant à la ludique, et plus précisément aux connecteurs additifs duaux $\oplus$ et $\&$. En sémantique cohérente (p. 11), les additifs sont interprétés comme des sommes disjointes de graphes, ce qui suppose une délocalisation. En ludique, la délocalisation fait toujours sens, et on peut définir des délocalisations (toujours notées ϕ, ψ) telles que, si $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}', \mathfrak{E}$ sont des desseins respectivement positif, positif et négatif, on ait

1. $\mathfrak{D} \perp \phi(\mathfrak{E}) \Leftrightarrow \exists \mathfrak{D}' \perp \mathfrak{E} \quad \mathfrak{D} = \phi(\mathfrak{D}')$
2. $\mathfrak{D} \perp \psi(\mathfrak{E}) \Leftrightarrow \exists \mathfrak{D}' \perp \mathfrak{E} \quad \mathfrak{D} = \psi(\mathfrak{D}')$
3. $\phi(\mathfrak{D}) = \psi(\mathfrak{D}') \Leftrightarrow \mathfrak{D} = \mathfrak{D}' = \mathfrak{Dai}$

L'item 3 exprime que « ϕ, ψ sont (presque) disjoints » : en effet, comme $\phi(\mathfrak{Dai}) = \psi(\mathfrak{Dai}) = \mathfrak{Dai}$, on ne peut pas faire mieux. Rappelons que $\mathfrak{Dai}$ est le démon, ce dessein orthogonal à tout le monde, qui n'est là que pour remplir l'espace logique.
Examinons maintenant la disjonction de comportements positifs, i.e. formés de desseins positifs. La notion la plus naturelle c'est bien sûr $\mathbf{G} \cup \mathbf{H}$, qu'il faut biorthogonaliser pour obtenir un comportement. Evidemment $(\mathbf{G} \cup \mathbf{H})^{\perp\perp}$ est à peu près n'importe quoi : on ne peut rien dire sans hypothèse sur les localisations. Par contre ce connecteur locatif est vraiment associatif, commutatif, etc. Une opération moins belle, mais plus contrôlable est $\mathbf{G} \oplus \mathbf{H} = (\phi(\mathbf{G}) \cup \psi(\mathbf{H}))^{\perp\perp}$. Rappelons que $\mathbf{G} \oplus \mathbf{H} = \phi(\mathbf{G})^{\perp\perp} \cup \psi(\mathbf{H})^{\perp\perp} = \phi(\mathbf{G}) \cup \psi(\mathbf{H})$: c'est un de nos théorèmes de complétude interne.
Dualement, la conjonction de comportements négatifs peut s'exprimer par l'intersection, un connecteur locatif pas si nouveau que ça, puisqu'il correspond à la théorie du « typage intersection » développée essentiellement à Turin (mais qu'on n'a jamais su intégrer dans un cadre logique). Pour obtenir un connecteur spirituel (la conjonction additive $\&$), il faut délocaliser. Ici une chose essentielle se passe, à savoir qu'une intersection délocalisée, vue de la bonne façon, est un produit cartésien. Rentrons dans les détails, ça en vaut la peine...

Le théorème de *séparation* énonce qu'un dessein est déterminé par son orthogonal, comme il se doit. Cela dit, quand un dessein $\mathfrak{D}$ est vu à l'intérieur d'un comportement $\mathbf{G}$, il n'y a plus qu'une partie de ce dessein qui importe, on la note $|\mathfrak{D}|_{\mathbf{G}}$, c'est l'*incarnation* de $\mathfrak{D}$ dans $\mathbf{G}$ dont l'existence est assurée par un autre théorème fondamental de la ludique, le théorème de *stabilité*. Dans le cas d'une intersection délocalisée, que se passe-t-il au niveau des incarnations ? C'est très simple, comme $\mathbf{G} \,\&\, \mathbf{H}$ est l'orthogonal de l'union $\phi(\mathbf{G}^{\perp}) \cup \psi(\mathbf{H}^{\perp})$, « tout se passe » dans l'image de ϕ ou dans l'image de ψ : l'incarnation de $\mathfrak{D}$ dans $\mathbf{G} \& \mathbf{H}$ est l'union de ses incarnations respectives dans $\phi(\mathbf{G})$ et $\psi(\mathbf{H})$, soit $|\mathbf{G} \,\&\, \mathbf{H}| = |\psi(\mathbf{G})| \bullet |\psi(\mathbf{H})|$; on retrouve ici le « produit cartésien locatif ». La formule précédente s'écrit encore, de façon plus spectaculaire

Théorème 15
$|\mathbf{G} \,\&\, \mathbf{H}| \simeq |\mathbf{G}| \times |\mathbf{H}|$

c'est ce que nous avons appelé le *mystère de l'incarnation*. Les deux intuitions fondamentales quant à la conjonction additive (intersection et produit cartésien) coïncident !
Si l'on définit la *vérité* d'un comportement par la présence d'un dessein gagnant (et la fausseté par la vérité de l'orthogonal), on voit facilement que la conjonction locative viole les tables de vérité classique dans un sens : $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ peuvent être vrais alors que $\mathbf{G} \cap \mathbf{H}$ est faux. Mais ça ne peut pas aller plus loin. On a une interférence plus ouverte dans le cas de la version locative de la conjonction multiplicative : $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ peuvent être vrais alors que $\mathbf{G} \odot \mathbf{H}$ est faux, et $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ peuvent être faux alors que $\mathbf{G} \odot \mathbf{H}$ est vrai [6]
L'opposition locatif/spirituel se comprend bien en termes d'*usine/usage* (p. 27). En effet, l'usine qui fait passer des tests limités, contingents, essaye de les rendre indépendants du lieu. Mais une usine mal conçue produirait des tests non reproductibles — i. e., non délocalisables. Ce serait le cas si, par exemple, les tests dépendaient du nom des lieux : on teste comme-ci dans les lieux pairs, comme ça dans les lieux impairs. L'adéquation à l'usage nous amène à refuser ces tests à la tête du client.

6.2.4 Ludique et jeux

L'expression « ludique » suggère un jeu. La ludique est, en effet, une approche interactive qui peut se comprendre comme un jeu dont les desseins seraient les stratégies. Mais, contrairement aux jeux usuels, il n'y a pas vraiment de règle. En effet, une des particularités de la ludique est que la règle apparaît comme le résultat de l'interaction.
Cela n'est pas si surprenant, prenons un jeu bien connu, les échecs. Il y a toute une littérature consacrée aux diverses ouvertures et leurs varaiantes, tout cela dans le cadre d'une règle du jeu immuable, essentialiste donc. Pourtant, si j'ai affaire à un débutant, je ne vais pas lui sortir une complexe partie est-indienne, mais plutôt lui infliger un sommaire « coup du berger », un mauvais coup tout à fait adapté à la situation. Si l'on identifie la règle avec les stratégies possibles, tout se passe comme si mon adversaire débutant était handicapé par une règle plus stricte — il a moins de possibilités, puisqu'il ne les imagine même pas. *A contrario*, c'est comme si j'avais une règle plus laxiste, celle où le coup du berger est une bonne ouverture.
Vue comme jeu, la ludique est très laxiste. Au point que le premier à jouer dispose d'une arme atomique qui gagne dès le premier coup. Pour exprimer le côté existentialiste, interactif, de la règle, il me suffit d'expliquer comment il est possible d'*interdire* ce coup. Le second joueur a le choix entre jouer le démon ⫛ (auquel cas le premier gagne) ou s'embarquer dans une boucle qui va finalement conclure — sur le papier seulement — à la divergence Ω. Le message implicite du second joueur est « Si tu dégaines l'arme atomique, alors le match sera nul »; pour éviter la nullité, le premier joueur doit donc jouer des coups non censurés par son opposant. Et *vice versa* : chacun contrôle l'autre, c'est le sens ultime, hégelien, de la négation linéaire — qui, en termes de jeux, n'est autre que l'échange des joueurs.

6. À ne pas confondre avec les déviations (tableau (8), p. 30) qui concernent des opérations *spirituelles*.

7 La logique 2.0

7.1 La syntaxe transcendantale

7.1.1 Limites de l'existentialisme

GdI et ludique sont une victoire de l'existentialisme ; victoire à la Pirrhus car aussi illustration de ses limites. Prenons, par exemple, la ludique. Elle est basée sur un principe existentialiste digne de l'Évangile, style « Les juges seront jugés ». Je m'explique : un dessein $\mathfrak{D}$ fait partie d'un comportement $\mathbf{G}$ quand il passe les tests définis par les éléments de $\mathbf{G}^{\perp}$, qui sont donc des sortes de juges. Mais qui teste $\mathbf{G}^{\perp}$? Les éléments de $\mathbf{G}$. Autrement dit, si $\mathfrak{D} \not\perp \mathfrak{E}$, il n'est pas possible qu'ils soient, l'un dans $\mathbf{G}$, l'autre dans $\mathbf{G}^{\perp}$. On a ici récusation mutuelle et l'un des deux doit s'effacer, mais savoir lequel est une entreprise complexe et vouée à l'échec. La ludique trouve ainsi ses limites dans l'impossibilité d'obtenir la moindre certitude.
On ajoutera deux facteurs aggravants :

- Les desseins sont *a priori* infinis.
- Il y a *a priori* une infinité de tests à passer.

Dans les années 2000–2010, ce demi-échec de l'existentialisme logique m'a préoccupé. Il n'était pas pour autant question de revenir au vieilles lunes essentialistes de Frege, Russell et consorts. Malgré ses limites, l'existentialisme réussit à faire interagir l'objet et son format. Ce que ne savent pas faire les approches essentialistes, parfois estimables, comme les catégories. Un morphisme est *a priori* de la bonne forme, et cette adéquation est complètement externe, métaphysique. Donc, ne jetons pas le bébé avec l'eau du bain.

7.2 Conditions de possibilité

L'acquis le plus durable du groupe pluridisciplinaire LIGC [7] (2001–2012) est d'avoir réconcilié technique et philosophie en logique. Fondamentalement, en retrouvant, au-delà de la philosophie scientiste — *grosso modo*, le Wittgenstein du *Tractatus*, Russell, Quine — le contact avec l'idéalisme allemand, Hegel et, surtout, Kant. Il n'y a rien d'étonnant d'ailleurs, que la logique, tentative de compréhension du monde basée sur la *raison pure*, soit plus proche de l'idéalisme que du réalisme.
Comme je l'ai déjà expliqué p. 16, la négation de la logique linéaire, qui sert à définir le cadre, le format, est naturellement hégelienne. Mais cette filiation n'apporte rien de neuf, vu que la négation linéaire est issue de considérations techniques, en aucune façon d'une réflexion philosophique. Il en va tout autrement du contact avec Kant : l'expression magique *conditions de possibilité*, si l'on préfère *transcendantalisme*, est la clef qui ouvre les serrures obstruées par un bon siècle de décervelage scientiste.
C'est dans mon ouvrage [45], écrit dans les années 2014–2016, que j'ai développé le trancendantalisme logique. J'ai été aidé en cela par les réticences de mon éditeur, Gérard Berreby, quant au pédantisme universitaire, qui s'accordait à mon refus personnel de toute vulgarisation — point de vue en surplomb mal adapté à ma quête de sens. J'ai été amené à traduire mes interrogations logique en termes quotidiens — c'est ainsi qu'il y est beaucoup question de lecteurs de DVD — et à ne lâcher prise qu'en présence de solutions débarrassées de tout préjugé. Cela a pris du temps et deux rédactions successives.
L'idée de condition de possibilité m'a permis de verbaliser une interrogation récurrente :

Comment est-il possible d'énoncer la moindre propriété de l'infini ?

7. *Logique et Interaction : pour une Géométrie de la Cognition.*

En effet, l'infini étant, littéralement, ce qui ne se termine pas, on ne voit pas comment le langage, fini car humain, pourrait en venir à bout. L'« explication » sémantique ne fait que reculer pour mieux sauter, puisqu'elle suppose une miraculeuse adéquation entre le langage et son interprétation infinie — pourtant à jamais hors d'atteinte.
Le transcendantalisme a soudainement légitimé cette question que le scientisme avait scotomisée. En commençant par comprendre que les termes-mêmes en sont biaisés : en effet, qu'est-ce que l'infini ? On nous explique l'incomplétude par l'impossibilité d'approcher l'infini de façon totale, mais l'infini n'est-il pas, au contraire, une réification de l'incomplétude ?
La méthodologie transcendantale consiste donc à ne rien présupposer, à tout mettre sur la table, une table finie qui est celle de nos possibilités et à faire le tri entre nos certitudes... ou, dualement, nos doutes. Nous allons distinguer deux formes de certitude, la certitude absolue ou *légitime* et la certitude *raisonnable*. La certitude *légitime* ne laisse pas de place au doute, alors que la certitude raisonnable laisse planer un doute légitime, par exemple quant au lever du Soleil demain matin ou encore quant à la consistance des mathématiques.
Tout ceci nous amène à une construction basée sur deux structurations analytique/synthétique et explicite/implicite : ce qui donne quatre « points cardinaux » :

	EXPLICITE	IMPLICITE
ANALYTIQUE	Constat	Performance
SYNTHÉTIQUE	Usine	Usage

7.3 Analytique *vs.* synthétique

7.3.1 L'analytique ou non-typé

Chercher une forme de connaissance soumise à la certitude absolue semble une gageure. Disons que, du temps de Kant, les exemples n'abondaient pas. Tout a changé avec l'informatique qui ne produit que cela, à condition de savoir bien en lire les résultats : il ne s'agit pas du contenu externe — souvent mensonger — de ce que nous lisons, mais de ce que la machine a réellement fait. Par exemple, l'ordinateur nous dit que $27 \times 37 = 999$; cela ne nous assure pas *vraiment* que le produit de 27 par 37 soit bien 999, seulement que le résultat du programme « $\times$ » appliqué aux arguments 27 et 37 est 999.
Si par erreur ou fantaisie, j'avais nommé « $\times$ » le programme de l'addition, j'aurais obtenu, de façon tout aussi irréfragable, $27 \times 37 = 64$. Ce qui montre que cette certitude s'effectue au dépens de la signification : l'analytique ne s'engage pas.
En regardant de plus près, on découvre une subdivision de l'analytique, entre des *constats* explicites — statiques, par exemple les données ou les résultats — et des *performances* implicites — dynamiques, e. g., les programmes et leur exécution. Une distinction très bien rendue par les deux usages de la touche « retour chariot » : quand elle emmène à la ligne, elle constate (accumule), quand elle lance un programme, elle performe (détruit pour reconstruire).
La littérature logique nous propose des approximations à l'analyticité dont la plus intéressante est le λ-calcul pur. Les constats sont les termes normaux et les performances correspondent aux termes généraux et leur exécution par normalisation. Mais ce n'est pas tout à fait ça : l'analytique se veut comme une table où l'on a tout déposé, d'où aucun fil externe, sémantique, ne pend. La normalisation externe du λ-calcul est un tel fil.
Il a donc fallu trouver un espace analytique se performant lui-même. Ce travail a été mené à bien dans la série d'articles techniques [36, 37, 38, 39] : des *constellations* finies faites d'*étoiles*

forment les objets analytiques. Les étoiles $[\![t_1, \ldots, t_n]\!]$ sont formées de plusieurs *rayons* qui sont des expressions formelles $t_i[x_1, \ldots, x_k]$ utilisant *exactement* les mêmes variables. Ces rayons sont soit incolores, « noirs », soit colorés. Les constats s'identifient aux constellations noires alors que les constellations admettant des rayons colorés correspondent aux performances. La performance s'effectue en branchant deux étoiles au moyen de rayons de couleurs complémentaires t, u et en appliquant l'unification d'Herbrand pour égaliser, si possible t et u : par exemple $t := f(x, 1)$ et $u := f(y, y)$ s'unifient au moyen de $x = y = 1$. Les valeurs obtenues pour les variables se propagent alors aux rayons restants.

7.3.2 Le synthétique ou typé

Si l'analytique est neutre, le synthétique s'engage : il donne ainsi le *sens*, qui apparaît typiquement avec les formules logiques et, en particulier, les réseaux de démonstration. Il y a, ici encore, une ligne de fracture entre explicite et implicite.
L'explicite ou *usine* correspond au critère de correction d'un réseaux : il est soumis à une batterie finie de tests qui nous donne une certain type de garantie. Réseaux et tests relèvent du performatif, pourtant on n'est plus vraiment dans l'analytique, car on s'est engagé : ces tests-ci et pas ceux-là.
L'*usine*, nouveauté absolue de mes travaux récents, recoupe, *grosso modo* le synthétique *a posteriori* kantien. Elle permet de répondre à mon interrogation quant à la possibilité de parler de l'infini. Par exemple, comment peut-on assurer que $A \multimap A$, alors que A est « infini ». Tout simplement parce que la constellation associée à une démonstration de l'implication — une simple étoile $[\![t, u]\!]$ — est soumise à un nombre fini de tests. On voit qu'il ne peut s'agir que d'une certitude *raisonnable*, basée sur la confiance que nous avons en nos tests.
Ceci est bien rendu par une image industrielle : la même appelation *Fiat 500* réfère aussi bien aux tests d'usine passés par le véhicule qu'aux tests grandeur nature que l'acheteur lui fera subir en l'utilisant, i. e., à l'usage.
L'*usage* correspond au synthétique *a priori* kantien. Autant l'usine est finie dans tous ses aspects, autant l'usage est infini : il correspond au monde déductif. En termes automobiles, à tous les usages possibles de la foutue *Fiat 500*. C'est ici qu'intervient le monde déductif — celui de la prédiction raisonnable — et où l'on voit émerger l'ombre d'un doute. La distinction usine/usage permet de comprendre l'erreur commise lors de la polémique BHK (p. 10) : on voudrait une voiture qui soit absolument certaine de faire 100000 km. Il n'y a pas d'autre moyen que de les lui faire faire ; mais on est en droit de se demander qui pourrait bien acheter une voiture aussi usagée !

7.3.3 Le déréalisme

Les approches existentialistes (GdI, ludique) étaient basées sur l'usage, dont la forme stable est l'orthogonalité, avec une perte au niveau de la certitude. L'usine nous tire de cette aporie.
Au lieu de $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ tels que $\mathbf{G} = \mathbf{H}^\perp, \mathbf{H} = \mathbf{G}^\perp$, on va se donner des préorthogonaux *finis* $\mathbf{g} \subset \mathbf{G}$ et $\mathbf{h} \subset \mathbf{H}$. $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ seront définis comme $\mathbf{G} = \mathbf{h}^\perp, \mathbf{H} = \mathbf{g}^\perp$. $\mathbf{g}, \mathbf{h}$ vus comme des batteries de tests, sont supposées vérifier $\mathbf{g} \perp \mathbf{h}$, ce qui fait que l'on a bien $\mathbf{g} \subset \mathbf{G}, \mathbf{h} \subset \mathbf{H}$. Le passage à l'usage, qui n'est rien d'autre que $\mathbf{G}^\perp = \mathbf{H}$ (i. e., $\mathbf{H}^\perp = \mathbf{G}$) reste conjectural, mais de l'ordre de la certitude *raisonnable*.
Certitude raisonnable et donc doute légitime, mais à quel endroit se positionne-t-il ? Précisément quand on fait entrer en lice les entiers naturels. Sans se positionner quant à l'infini, on se rend compte qu'il y a ici un déficit de tests : on ne peut pas produire de batterie complète — c'est à dire détectant toutes les erreurs : une batterie complète, fatalement infinie, nous replongerait dans (une variante de) l'aporie existentialiste. Pour éviter ce problème, on va *raisonner* par

récurrence sur les tests ; en fait, une récurrence particulière va nous servir d'auxiliaire de testage. Mais comme il n'est pas question de la deviner, il va falloir se la donner.

On a changé de paradigme : essentialisme et existentialisme se posent dans une opposition Objet/Sujet, ou encore Analytique/Synthétique, Réponse/Question. En se donnant une méthode de testage auxiliaire, la réponse devient un composé hybride, mi-objectif, mi-subjectif, puisqu'elle incorpore un élément de nature synthétique. C'est cette nouvelle approche que j'ai appelée *déréalisme*. La composante auxiliaire — ou *moule* — est le véritable infini. Techniquement parlant, le déréalisme se traduit par une distinction entre rayons *objectifs* et *subjectifs* (ceux à l'œuvre dans les moules). Ainsi, un élément « animiste », un mélange Objet/Sujet est à la base-même de la connaissance.

L'opposition Analytique/Synthétique est un jeu entre voleur et gendarme : l'analytique est contrôlé par le synthétique. Dans le mode déréaliste, qui est celui des mathématiques, un gendarme — le moule — est devenu voleur et il y a conflit d'intérêt. Comme gendarme, il devrait être strict, alors que, comme voleur, il a intérêt au laxisme. L'actualité nous a d'ailleurs montré un tel exemple de conflit déréaliste avec le scandale `Volkswagen` : le logiciel truqué fait partie du véhicule testé.

Concrètement, tout cela se ramène à une question d'équilibre, entre les parties $\mathbf{g}, \mathbf{h}$ d'un moule : sont-elles suffisamment énergiques pour garantir l'équilibre entre droits et devoirs, i. e., que $\mathbf{G}^{\perp} = \mathbf{H}$? On sait, par exemple, depuis le paradoxe de Richard, que certaines récurrences sont « mal formées » : celà correspond à des moules défectueux. Mais, alors que l'orthogonalité entre tests $\mathbf{g} \perp \mathbf{h}$ est facile à vérifier, l'équilibre droits/devoirs correspond à l'orthogonalité entre testés $\mathbf{g}^{\perp} \perp \mathbf{h}^{\perp}$ est hors d'atteinte. Elle correspond à l'aporie existentialiste ; mais moins brutale, puisque nous avons quand même accès à une certitude raisonnable. Les doutes légitimes, qui ne concernent que l'orthogonalité des testés restent présents, mais relégués sur une étagère. C'est le cas, par exemple, des doutes quant aux fondements des mathématiques.

7.4 Percées techniques

Parallèlement à la réflexion philosophique, j'ai lancé le programme de *syntaxe transcendantale*, ou encore *logique 2.0*. Les articles [36, 37, 38, 39] répondent à des questions aussi fondamentales que négligées.

7.4.1 L'égalité

L'égalité, qui occupe la plus grande partie des formulaires mathématiques, a été dédaignée par la logique : il ne s'agirait pas d'une primitive, la plus basique de toutes, mais d'une construction axiomatique, d'un *prédicat* parmi d'autres. Cette désinvolture se justifie par l'impossibilité de rendre compte de cette opération dans le cadre du *calcul des prédicats* : il va falloir remettre en cause ce bricolage axiomatique qui contient même des erreurs comme $\forall \Rightarrow \exists$, voir p. 16.

L'approche axiomatique courante se base sur une définition du second ordre, l'*égalité de Leibniz* : $a = b$ voudrait dire que toute propriété de a est propriété de b. Mais alors *quid* de $a = a$? La propriété « être à gauche de « = » » différencie bien les deux « a » ! Comme on sait bien qu'ils sont égaux, on va dire que ma remarque est signe d'une rare inculture : j'ai osé évoquer une propriété déplacée. Mais que reproche-t-on, au juste, à ce témoin gênant ? De n'être pas sémantique, i. e., de ne pas prendre compte le fait que les deux « a » réfèrent au *même* objet. Il faudrait donc nous restreindre à des propriétés compatibles avec... l'égalité !

Après avoir longtemps médité sur cette aporie, j'ai compris que l'erreur réside dans la notion-même d'individu $(a, b, c, \ldots)$. On ne peut pas honnêtement parler des propriétés de ces bidules. La solution, simplissime, consiste à considérer que les individus sont en fait des propositions, certes d'un genre limité, mais tout à fait intégrées au monde déductif. On passe ainsi d'Avoir

(des propriétés) à Être (une propriété). L'égalité se définit alors comme l'équivalence linéaire $a \equiv b$ (i. e., $a \multimap b \,\&\, b \multimap a$).
Cette définition était impensable au XIX$^{\text{ème}}$siècle : en effet, dans le cadre de la logique classique, la seule connue à l'époque, l'équivalence $\Leftrightarrow$ n'autorise que deux individus distincts. Le *tiers exclu* peut, en effet, s'écrire $a \Leftrightarrow b \vee b \Leftrightarrow c \vee c \Leftrightarrow a$. C'est pour cela que le calcul des prédicats a instauré une ségrégation des individus, auquel le statut de proposition a été dénigré. D'où cette construction axiomatique de l'égalité, aussi tarabiscotée que les épicycles de Claude Ptolémée — dont Frege, inventeur du calcul des prédicats, se révèle le digne continuateur.

7.4.2 Les nombres entiers

Les nombres entiers, bien que fondamentaux, ne peuvent être traités de façon complètement élémentaire : c'est une des leçons de l'incomplétude. Il serait donc vain de vouloir trop simplifier le principe de récurrence. La formulation logique de l'arithmétique contient, cependant, un multitude de petits axiomes qui, eux aussi, relèvent de l'esthétique de l'épicycle.
Comme l'égalité est sortie de l'axiomatique, il ne reste, fondamentalement, que les axiomes 3 et 4 de Peano : $Sx \neq 0$ et $Sx = Sy \Rightarrow x = y$ qui expriment — Sx désignant le *successeur* $x + 1$ — le caractère infini des entiers. Le problème est donc de trouver des propositions vérifiant ces deux principes.
Pour cela, on va invoquer les *constantes* logiques. Alors que la logique traditionnelle n'en avait jamais trouvé d'authentiques, la logique 2.0 en a individualisé deux, フ et ヲ (ces *katakana* se lisent `fu` et `wo`). Elles remettent en cause beaucoup d'idées reçues : on comprend pourquoi, même après l'émergence de la logique linéaire, il a fallu trente ans pour les détecter. Les deux constantes correspondent à une étoile à un rayon ; mais, alors que フ est objective, ヲ est subjective — du genre *moule* déréaliste. Ces constantes sont auto-duales, i. e., égales à leur négation, ce qui, en mode linéaire n'est pas contradictoire, mais bouleverse bien des habitudes.
Les entiers n ($n \in \mathbb{Z}$) se définissent comme les combinaisons multiplicatives de フ et ヲ comportant au moins un ヲ. Ainsi, $0 := $ ヲ, $1 :=$ フ $\otimes$ ヲ, $\text{n+m} := \text{n} \otimes \text{m}$, $\text{-n} = \text{n}^{\perp}$.

7.4.3 La vérité

La « définition » de la vérité, due à Tarski, est un pléonasme tellement sidérant qu'il devait susciter une admiration digne des *Habits neufs de l'Empereur* dans les troupes scientistes :
- $A \wedge B$ est vrai quand A est vrai **et** B est vrai.
- $A \vee B$ est vrai quand A et vrai **ou** B est vrai.
- $\neg A$ est vrai quand A **n'est pas** vrai, etc.

Définition à laquelle j'ai ajouté un cas, celui du connecteur imaginaire ♣ (*broccoli*) : $A \clubsuit B$ est vrai quand A est vrai **broccoli** B est vrai. Les axiomes de ce connecteur sont ce qu'il vous passe par la tête ; et sa sémantique — le **broccolo** libre — n'est rien d'autre que la syntaxe — en caractères gras, réalisme oblige !
Comme $\wedge$, $\vee$, $\neg$, etc. se lisent **et**, **ou**, **non**, etc., A est vrai quand $\mathbf{A}$ (la même chose, mais en caractères gras) est vrai. Ce qui a pour effet d'éluder toute discussion quant à la nature de la vérité. On pense ici au *Malade imaginaire* et à l'opium qui ferait dormir de par sa vertu dormitive.
Ceci satisfait les essentialistes qui carburent au *méta* : $\mathbf{A}$ n'est-il pas une sorte de « méta-A » ? On voit tout de suite poindre le *Kyrie eleison* des méta itérés : la vérité de $\mathbf{A}$ serait, à son tour, celle de $\mathbb{A}$ (méta-méta-A), etc. L'analogie religieuse est bienvenue, car la vérité tarskienne n'est qu'un monstrueux préjugé.

Pour reproduire les axiomes 3 et 4 de Peano, j'ai dû me repencher sur la vérité. En fait, il est possible d'associer un « invariant d'Euler-Poincaré [8] » à une constellation :

$$\sharp[\![\, t_1, \ldots, t_n \,]\!] \quad := \quad 2 - n \tag{5}$$

$$\sharp[\![\, t_1, \ldots, t_n \,]\!] \quad := \quad -m \tag{6}$$

$$\sharp(\mathcal{S}_1 + \ldots + \mathcal{S}_k) \quad := \quad \sharp\mathcal{S}_1 + \ldots + \sharp\mathcal{S}_k \tag{7}$$

Le cas (5) correspond à une étoile objective, le cas (6) à une étoile contenant au moins un rayon subjectif ; m $(< n)$ est alors le nombre de rayons objectifs. Une constellation $\mathcal{C}$ est *vraie* quand $\sharp(\mathcal{C}) \geq 0$. ⁊ et Ǝ, étoiles unaires, sont vraies ; mais $\sharp$⁊ $= 1$ alors que $\sharp$Ǝ $= 0$. Les étoiles animistes, mélangeant rayons objectifs et subjectifs, vérifient $\sharp\mathcal{S} < 0$: en l'absence de ⁊, une constellation contenant une telle étoile est donc fausse.
La vérité permet d'établir les axiomes 3 et 4 : ils sortent ainsi de l'arbitraire axiomatique. On produit ainsi une infinité de propositions deux à deux contradictoires $\mathrm{n} \neq \mathrm{m}$ pour $m \neq n$. Il y a donc contradiction avec les tables de vérité classiques [9].Le tableau suivant :

A	B	$A \otimes B$	$A \parr B$	$A^\perp$
v	**v**		**f**	**v**
f	**v**	**v**	**f**	

(8)

inventorie les déviations possibles par rapport à la vérité tarskiste ; les zones vides correspondent à un comportement « normal ». Le fait que $\parr$ soit plus déviant que son dual $\otimes$ vient de ce que la négation n'échange pas vrai et faux : A et $A^\perp$ peuvent être vrais (exemple, $A :=$ ⁊).
C'est sur ce rafraîchissant *jailbreak* du tarskisme que se clôt cette notice.

Bibliographie sélective

[1] **Le champ du signe**. In *Le théorème de Gödel*, pages 141–171, Paris, 1989. *Le Seuil.* repris sous le titre *Il sogno del segno* dans La prova di Gödel, *Boringhieri* 1992.

[2] **La logique au milieu du gué : logique naturelle et intelligence artificielle**. In *La machine de Turing*, Paris, 1995. *Le Seuil.*

[3] **Mustard watches : an integrated approach to time and food**. *Prépublication*, Université Paris VII, Paris, 1988. Alias *Yann-Joachim Ringard.*

[4] **Les fondements des mathématiques**. In Yves Michaud, editor, *Qu'est-ce que l'univers ?*, pages 42 – 52, Paris, 2000. Odile Jacob.

[5] **Du pourquoi au comment : la théorie de la démonstration de 1950 à nos jours**. In Jean-Paul PIER, editor, *Developments of mathematics 1950-2000.* Birkhauser, 2000.

[6] **Typed Lambda-Calculi and Applications**. LNCS 1581. *Springer*, Heidelberg, 1999. En tant qu'« éditeur » de la conférence TLCA '99.

[7] **Une extension de l'interprétation fonctionnelle de Gödel à l'analyse et son application à l'élimination des coupures dans l'analyse et la théorie des types**. In Fenstad, editor, *Proceedings of the* 2^{nd} *Scandinavian Logic Symposium*, pages 63–92, Amsterdam, 1971. *North-Holland.*

8. Relié à l'acyclicité qui gouverne la variante « Danos–Regnier » de l'orthogonalité, p. 16.

9. L'essentialisme prétend que les connecteurs intuitionnistes, linéaires, ne sont que des versions subjectives des opérations classiques correspondantes : elles obéiraient aux tables de vérité… dans un paradis sémantique hors d'atteinte.

[8] **Interprétation fonctionnelle et élimination des coupures de l'arithmétique d'ordre supérieur**. *Thèse de Doctorat d'Etat*, Université Paris VII, Paris, juin 1972.

[9] **Le λ-calcul du second ordre**. *Astérisque*, 152-153 :173–186, 1987. Séminaire Bourbaki.

[10] **Π^1_2-logic, part I : dilators**. *Annals of Mathematical Logic*, 21 :75–219, 1981.

[11] **A survey of Π^1_2-logic**. In *Logic, Methodology and Philosophy of Science VI*, pages 89–107, Amsterdam, 1982. *North-Holland.*

[12] **Functors and ordinal notations I : A functorial construction of the Veblen hierarchy**. *Journal of Symbolic Logic*, 49 :713–729, 1984. Avec *J. Vauzeilles.*

[13] **Functors and ordinal notations II : A functorial construction of the Bachmann hierarchy**. *Journal of Symbolic Logic*, 49 :1079–1114, 1984. Avec *J. Vauzeilles.*

[14] **The Ω-rule**. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, pages 307–321, Warszawa, 1984. *PWN.*

[15] **Introduction to Π^1_2-logic**. *Synthèse*, 62 :191–216, 1985.

[16] **The skeleton of a dilator**. In Abrusci and Casari, editors, *Logica e filosofia della scienza oggi*, pages 35–49, Bologna, 1986. *CLUEB.*

[17] **Une théorie géométrique des ordinaux**. *Pour la Science*, juillet 1985. repris dans *Les mathématiques aujourd'hui*, *Belin* 1986, pp. 97-108.

[18] **Three-valued logic and cut-elimination : the actual meaning of Takeuti's conjecture**. *Dissertationes Mathematicæ*, 136 :1–49, 1976.

[19] **Normal functors, power series and λ-calculus**. *Annals of Pure and Applied logic*, 37 :129–177, 1988.

[20] **The system $\mathbb{F}$ of variable types, fifteen years later**. *Theoretical Computer Science*, 45 :159–192, 1986. repris dans *Logical Foundations of Functional Programming*, *Addison-Wesley* 1990.

[21] **Linear logic**. *Theoretical Computer Science*, 50 :1–102, 1987.

[22] **Linear logic : a survey**. In Bauer, Brauer, and Schwichtenberg, editors, *Logic and Algebra of Specification*, pages 63–112, Heidelberg, 1993. *Springer Verlag.* NATO series F94.

[23] **Linear logic, its syntax and semantics**. In Girard, Lafont, and Regnier, editors, *Advances in Linear Logic. Cambridge University Press*, 1995.

[24] **Coherent Banach Spaces : a continuous denotational semantics**. *Theoretical Computer Science*, 227 :275–297, 1999.

[25] **Between logic and quantic : a tract**. In Ruet, Ehrhard, Girard, and Scott, editors, *Linear Logic in Computer Science*, pages 346 – 381. Cambridge University Press, 2004.

[26] **La logique linéaire**. *Pour la Science*, 150 :74–85, avril 1990.

[27] **Light linear logic**. *Information and Computation*, 143 :175–204, 1998.

[28] **Multiplicatives**. In Lolli, editor, *Logic and computer science : new trends and applications*, pages 11–34, Torino, 1988. Università di Torino. Rendiconti del seminario matematico dell'università e politecnico di Torino, special issue 1987.

[29] **Towards a geometry of interaction**. In *Categories in Computer Science and Logic*, pages 69–108, Providence, 1989. *AMS.* Proceedings of Symposia in Pure Mathematics n°92.

[30] **Geometry of interaction I : interpretation of system F**. In Ferro, Bonotto, Valentini, and Zanardo, editors, *Logic Colloquium '88*, Amsterdam, 1989. North-Holland.

[31] **Geometry of interaction III : accommodating the additives**. In Girard, Lafont, and Regnier, editors, *Advances in Linear Logic. Cambridge University Press*, 1995.

[32] **Geometry of interaction IV : the feedback equation**. In Stoltenberg-Hansen and Väänänen, editors, *Logic Colloquium '03*, pages 76 – 117. ASL, 2006.

[33] **Geometry of interaction V : logic in the hyperfinite factor**. *Theoretical Computer Science*, 412 :1860 – 1883, 2011. *Girard's Festschrift, eds. Ehrhard, Faggian and Laurent.*

[34] **Normativity in logic**. In *Epistemology vs. Ontology*, 2012. Springer.

[35] **Locus Solum**. *Mathematical Structures in Computer Science*, 11 :301 – 506, 2001.

[36] **Transcendental syntax 1 : deterministic case**. *Mathematical Structures in Computer Science*, pages 1–23, 2015. *Computing with lambda-terms. A special issue dedicated to Corrado Böhm for his 90th birthday.*

[37] **Transcendental syntax 2 : non deterministic case**. *Logical Methods in Computer Science*, 2016. *Special issue dedicated to Pierre-Louis Curien for his 60th birthday.*

[38] **Transcendental syntax 3 : equality**. *Logical Methods in Computer Science*, 2016. *Special issue dedicated to Pierre-Louis Curien for his 60th birthday.*

[39] **La Logique 2.0**. 2017. *brouillon détaillé à l'*URL `http://girard.disque.math.cnrs.fr`.

[40] **Proof-theory and logical complexity I**. *Bibliopolis*, Napoli, 1987. ISBN 88-7088-123-7.

[41] **Proofs and types**, volume 7 of *Cambridge tracts in theoretical computer science. Cambridge University Press*, Cambridge, 1990. Traduit par Y. Lafont et P.Taylor.

[42] **Le point aveugle, tome 1 : vers la perfection**. Visions des Sciences. Hermann, Paris, 2006. 296 pp.

[43] **Le point aveugle, tome 2 : vers l'imperfection**. Visions des Sciences. Hermann, Paris, 2007. 300 pp.

[44] **The Blind Spot : lectures on logic**. European Mathematical Society, Zürich, 2011. (550 pp.).

[45] **Le Fantôme de la transparence**. Allia, Paris, Septembre 2016. 248 pp.