TORINO, 15 Septembre 2004

LUDIQUE
DANS
L'ALGEBRE
CAR

Jean-Yves Girard

I-LES TROIS NIVEAUX

I. 1-LES FONDEMENTS

- À l'ancienne : méta, métaméta,. . . Turtles all the way down.
- Nouveau régime sur trois sous-sols :

Niveau -1 : vrai/faux, prouvable/réfutable, cohérent/contradictoire ; théorème de Gödel.

I. 1-LES FONDEMENTS

- À l'ancienne : méta, métaméta,. . . Turtles all the way down.
- Nouveau régime sur trois sous-sols :

Niveau -1 : vrai/faux, prouvable/réfutable, cohérent/contradictoire ; théorème de Gödel.

Niveau -2 : fonctions, morphismes, catégories ; théorème de Church-Rosser, isomorphisme de Curry-Howard.

Niveau -3 : opérationalité, dynamique, exécution : ludique, géométrie de l'interaction.

- Le troisième sous-sol explique les autres niveaux :

Niveau -1 : à partir de la notion de gain.

Niveau -2 : à partir de l'associativité.

I. 2-La GoI

- **Interprétation à prétention universelle : logique du second ordre, λ-calcul pur.**

Preuve : opérateur hermitien $\mathbf{h}$ sur un Hilbert $\mathcal{H}$: $\mathbf{h}^* = \mathbf{h}$, de norme au plus $\mathbf{1}$: $\|\mathbf{h}\| \leq \mathbf{1}$.

Coupure : rétroaction $\boldsymbol{\sigma}$. Une symétrie partielle : $\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{3}} = \boldsymbol{\sigma}$. $\boldsymbol{\sigma}$ induit une décomposition en somme directe $\mathcal{H} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{S}$ où $\mathcal{S}$ correspond au projecteur $\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{2}}$.

Exécution : solution de l'équation de rétroaction :

$$\mathbf{h}(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) = \mathbf{x}' \oplus \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y})$$

entrée : $\mathbf{x}$ **sortie** : $\mathbf{x}'$ **calcul** : $\mathbf{y}$

- **La forme normale est par définition $\boldsymbol{\sigma}[\![\mathbf{h}]\!](\mathbf{x}) = \mathbf{x}'$.**

I. 3-L'INVERSIBILITÉ

- $\boldsymbol{\sigma}[\![\mathbf{h}]\!]$ **est un hermitien de** $\mathcal{R}$ **de norme au plus** $\mathbf{1}$.
  $\|\mathbf{x}'\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}'\|^2 + \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y})\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$. **Unicité de la partie visible** $\mathbf{x}'$.
- **Si** $\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^* \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$, **alors** $\boldsymbol{\sigma}[\![\mathbf{h}]\!] = \mathbf{A} + \mathbf{B}^* \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{C})^{-1} \cdot \mathbf{B} \quad \ldots$
- **. . . Pourvu que** $\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{C}$ **soit inversible.**
- **L'injectivité ne coûte rien : l'espace** $\mathcal{Z} = \mathbf{ker}(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{C})$ **des cycles reste inaccessible. On remplace** $\mathbf{C}$ **par** $\mathbf{C} - \mathcal{Z}$.
- **On ne peut pas aller plus loin, sauf hypothèses logiques ad hoc (essentialistes) :** $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{C}$ **est nilpotent, d'où l'inversibilité.**

$$(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{C})^{-1} = \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma} + \ldots$$

I. 4-La Solution Générale

- Ne peut pas être littérale.
- Se base sur le cas inversible.
- Étendue par sup et inf au cas semi-inversible.
- Étendue par associativité au cas général.
  $(\sigma + \tau)[\![\mathbf{h}]\!] = \sigma[\![\tau[\![\mathbf{h}]\!]]\!]$.
- Mais associativité quantique, correspond à une décomposition $\sigma + \tau$ logiquement impossible.
- « Solution » valable dans toute algèbre de von Neumann.
- Revoir la GoI dans certaines algèbres (par exemple le facteur hyperfini de type $\mathbf{II_1}$).
- Nouvelle approche à $\mathbf{LLL}$?

TORINO, 15 Septembre 2004

II-L'ALGEBRE CAR

II. 1-Canonical Anticommutation Relations

- $\mathcal{H}$ espace de Hilbert séparable. Pour $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ on introduit le **créateur** $\mathbf{C_x}$ dépendant linéairement de $\mathbf{x}$, et l'**anihilateur**$\mathbf{A_x} := \mathbf{C_x^*}$, liés par les équations :
  $\mathbf{A_x C_x + C_x A_x = \|x\|^2 \cdot I}$
  $\mathbf{C_x^2 = 0}$
- Par polarisation, ça se réécrit :
  $\mathbf{A_x C_y + C_y A_x = \langle x \mid y \rangle \cdot I}$
  $\mathbf{C_x C_y + C_y C_x = 0}$
- Par rapport à une base orthonormale, on obtient :
  $\mathbf{A_p C_p + C_p A_p = I}$
  $\mathbf{A_p C_q + C_q A_p = 0 \quad (p \neq q)}$
  $\mathbf{C_p C_q + C_q C_p = 0}$

II. 2-L'algèbre CAR comme algèbre de matrices

- Une façon de présenter l'algèbre $\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \otimes \ldots \otimes \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \otimes \ldots$
- Posons $\mathbf{Z} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- Alors on peut faire $\mathbf{C_p} := \mathbf{Z} \otimes \ldots \otimes \mathbf{Z} \otimes \mathbf{T} \otimes \mathbf{I} \ldots \otimes \mathbf{I} \otimes \ldots$.
- Comme les algèbres de matrices sont simples, une seule norme stellaire, i.e., telle que $\|\mathbf{uu}^*\| = \|\mathbf{u}\|^2$.
- L'algèbre CAR est l'algèbre stellaire complétée.
- Toute représentation sur une Hilbert permet de plonger l'algèbre CAR dans une von Neumann hyperfinie (clôture faible d'une algèbre stellaire AF).
- Par exemple, la technique GNS appliquée à la trace normalisée donne le facteur hyperfini de type $\mathbf{II_1}$.

TORINO, 15 Septembre 2004

III-UN PEU DE LUDIQUE

III. 1-GÉNÉRALITÉS

- Interprétations dans l'algèbre CAR avant complétion.
- Assure le finitisme des calculs, la terminaison.
- Excellent pour la logique perfective (sans exponentielles).
- On ne traitera pas les desseins infinis.
- Problème avec le fax : changer d'algèbre.

III. 2-Loci

- Couples $\xi = (a, b)$ de deux sous-sembles disjoints de $\mathbb{N}$.
- $(a, b) \sqsubset (a', b')$ ssi $a' \subset a, b' \subset b$.
- Existence de suprema, en particulier $(\emptyset, \emptyset)$, plus grand lieu, dit impropre.
- Cohérence : existence de l'inf, i.e., $a \cap b' = a' \cap b = \emptyset$. Toute clique admet un infimum.
- Involution : $(a, b) := (b, a)$.
- (a, b) définit (au signe près) une isométrie partielle de l'agèbre CAR : le produit des C_p $(p \in a)$ et des A_q $(q \in b)$.

III. 3-Fourches

- $\xi \vdash \Sigma$, des lieux cohérents. Seul le manche ξ peut être impropre (on note alors $\vdash \Sigma$).