ヲ, clef de voûte logique

Jean-Yves Girard

19 juin 2024

In memoriam Philip Scott.

La Logique est l'affirmation prométhéenne de la possibilité d'une connaissance, limitée peut-être, mais absolument irréfragable... sauf pour les sophistes bien entendu. Elle ne peut donc renvoyer qu'à elle-même, à ses propres procédures. C'était déjà l'approche d'Aristote : c'est *Barbara* qui permet de conclure « Tout A est C » à partir de « Tout A est B » et « Tout B est C » ; et nullement sa vérité. Il ne s'agit pas d'un déni solipsiste, seulement d'une défiance par rapport à une référence suspecte ; car la frontière entre réalité et préjugé est mince.

D'où le projet de ma vie : l'explication, purement combinatoire, de la Logique sans référence externe, sans filet si l'on préfère. Programme réalisé dans une succession d'articles, mais *à peu près* seulement. Manquait une clef de voûte à cette architecture : elle est fournie par la constante ヲ (wo) et son acolyte フ (fu). Reste à opérer la synthèse rendue nécessaire par les petites disparités entre les divers états de mon travail ; seul à même de resserrer les boulons, j'ai d'ailleurs découvert que la tâche n'est pas si aisée.

J'ai exclu les développements sur l'égalité et l'arithmétique [4] qui ne demandaient pas de révision particulière, ainsi que la tentative de lien avec le quantique [5, 6, 7] encore trop expérimentale à mon goût.

1 La rupture épistémologique

1.1 Réseaux de démonstration

Censément justifiées par un ailleurs sémantique – susceptible de varier selon les systèmes – les règles logiques allaient de soi, il n'y avait qu'à les écrire, par exemple en *déduction naturelle*. La découverte de la linéarité et de l'*envers* $\sim A$ qui échange hypothèses et conclusions se réduisait donc au départ à un défi syntaxique : comment mettre un arbre démonstratif sens dessus dessous ? Et que faire face à plusieurs conclusions qui ne peuvent toutes être « la dernière règle appliquée » ? D'où le critère de correction (1986) : le *réseau* doit passer des tests qui permettent, en cas de réussite, de reconstituer une temporalité déductive, en particulier de trouver la (ou plutôt une) dernière règle : c'est la *séquentialisation*.

Digression : l'envers Je propose de remplacer *négation linéaire* par *envers* pour parler de $\sim A$. L'envers de l'envers étant l'endroit, cette terminologie reflète l'involutivité et, plus généralement, la contravariance de « $\sim$ ».

S'il a bien les mêmes règles que « $\neg$ », l'absence de règles structurelles dote « $\sim$ » de propriétés surprenantes, en premier lieu l'involutivité $\sim\sim A = A$ qui exprime la possibilité d'intervertir librement les statuts d'hypothèse et de conclusion, à condition de tenir compte de la parité du nombre de changements. Ce qui n'est pas le cas dans la version intuitionniste où les hypothèses peuvent être réutilisées (règle de contraction), pas les conclusions, d'où la différence entre $\neg\neg A$ et A. Pire, certaines propositions sont auto-duales, e.g., $ꟻ = \sim ꟻ$; bien qu'il ne s'agisse en aucune façon d'une antinomie, l'analogie avec le hautement toxique $A = \neg A$ induit une réticence, voire un rejet. Ces réflexes conditionnés m'ont poussé à abandonner la terminologie « négation linéaire », trop chargée.

Incidemment, observons une divergence d'opinion quant aux règles logiques. Certains y voient la transcription de principes tombés du Ciel, ainsi ceux de la négation à laquelle ils pourraient refuser – par principe ! – l'involutivité. Je préfère voir les règles comme des opérations primitives, antérieures à la Logique : la négation – ou plutôt l'envers – interprète alors l'échange entre hypothèses et conclusions et le symbole « $\sim$ » la traversée du miroir.

1.2 Tests et envers

Un retournement fondateur s'est opéré quand j'ai remarqué que les tests pour A peuvent être vus comme des sortes de *démonstrations de l'envers*, i.e., de l'envers $\sim A$. La séquentialisation passe alors au second plan puisqu'on se libère de l'alternative dualiste classsique

$$\text{Démonstration de } A/\text{Modèle de } \neg A$$

et ses laborieux succédanés (modèles de Kripke, etc.) pour une dualité moniste

$$\text{Démonstration de } A/\text{Démonstration de } \sim A$$

ce qui pose plusieurs problèmes, le principal étant que tout ne saurait être démontrable. Mais emporte l'adhésion instantanée du seul fait de l'expulsion de la Sainte Réalité sémantique. Mieux, l'exécution du test peut être vue comme l'élimination d'une coupure entre la démonstration de A (celle dont on teste la correction) et celle de $\sim A$ induite par le test.

Si les tests définissent les propositions, i.e., leurs preuves, il est temps de retirer l'échelle pour oublier toute référence logique préalable au test. Les formules qui apparaissent dans un réseau deviennent alors des marqueurs *locatifs*, des sortes de places de parking qu'on reconnaît sans leur attribuer un sens spécial. La précédure de normalisation (= élimination des coupures) doit être définie sur ces structures délogicalisées ; critère de succès des tests, elle doit converger.

Digression : la normalisation Les cas de normalisation en déduction naturelle peuvent tous être formulés de la même façon : le raccordement d'un A conclusion avec un A prémisse, i.e., A et $\sim A$ situés dans le même lieu ; branchement récursif, puisqu'il concerne aussi les sous-lieux (sous-formules) de A et $\sim A$. À l'exception d'une seconde série de « réductions commutatives » qui sont en fait des permutations de règles, typiquement l'élimination ($\vee E$) de la disjonction (section 4.4.1) ; et qu'il faut exclure car elles ne peuvent se formuler dans un contexte purement locatif, i.e., sans tenir compte de leur sens logique.

1.3 Locativité et sous-typage

L'accent mis sur les lieux neutres est le signe d'une strate *analytique*, i.e., dénuée de sens, à partir de laquelle s'élaborera le *synthétique*, i.e., la Logique proprement dite. Dans quelle mesure dépend-elle du lieu ? Ici s'opposent les points de vue *spirituel* et *locatif*. Du point de vue spirituel (synthétique), la Logique est indépendante de l'endroit où on l'écrit alors que locativement parlant, elle est enracinée dans un endroit bien précis. Le point de vue spirituel est le plus noble – il exprime une forme d'abstraction – mais la situation n'est pas aussi simple : on ne doit pas faire de distinction de « race », de classe sociale, de pays... et pourtant on est bien né quelque part ! Autrement dit, l'abstraction spirituelle vient dans une seconde étape et on ne peut pas ignorer le locatif, même s'il n'est pas toujours fréquentable.

La Théorie des Catégories est purement spirituelle car ses objets sont à isomorphisme près, ce qui rend leur égalité impossible. Ainsi, pour dire que $A = B$, on réclame un isomorphisme assorti de conditions de canonicité assurant que cet isomorphisme n'est pas le fait du hasard ; exemple avec le produit tensoriel et son héroïque diagramme pentagonal.

Le produit tensoriel logique peut être défini locativement en combinant les critères de A et B déjà positionnés dans de lieux disjoints : c'est donc une opération partielle. On voit que $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$, pire que $A \otimes B = B \otimes A$. La version catégorique, qui utilise de nécessaires délocalisations, n'obtient que des isomorphismes ; on peut éviter la fastidieuse démonstration de canonicité en invoquant les égalités sous-jacentes.

Qui peut le plus peut le moins : si A, B, C sont situés dans des lieux disjoints, tout test pour $(A \otimes B) \parr C$ en est aussi un pour $A \otimes (B \parr C)$ ce qui fait qu'une démonstration de $A \otimes (B \parr C)$ en est aussi une de $(A \otimes B) \parr C$. Ce qui s'exprime par le *sous-typage* :

$$A \otimes (B \parr C) \subset (A \otimes B) \parr C$$

Ce sous-typage, qui n'a jamais trouvé sa place en Logique – et encore moins dans les Catégories –, est une authentique conquête de la locativité.

Tant qu'à faire, mentionnons les jeux logiques. Une approche essentialiste propose une « sémantique des jeux » selon laquelle les démonstrations sont les stratégies gagnantes d'un jeu dont la règle est tombée du Ciel. Il y a quelque chose de cela dans la dualité logique, sinon que la règle est le résultat d'un dialogue normatif. Une règle « interactive » dont on peut donner une idée en imaginant un joueur d'échecs débutant qui manipulerait sa Reine comme une Tour, ce qu'on peut voir comme un cas de sous-typage : son opposant a nettement plus de stratégies gagnantes à sa disposition ! Il faut pousser cette intuition jusqu'au bout au moyen d'un jeu sans règle dont la finalité première serait, avant de déterminer un gagnant, la définition d'une règle par consensus.

2 Le monde de $\parr$

2.1 Syntaxe Transcendantale

Ce qui suit est, fondamentalement, un rappel des définitions de la *Syntaxe Transcendantale* (ST) de [1]. Les étoiles rappellent les *clauses* de la feue programmation logique, ce sont des sortes de séquents délogicalisés ; la notion de constellation est la version purement locative des *réseaux.*

2.1.1 Étoiles et constellations

On fixe un langage fonctionnel fini dont le choix importe peu dès qu'il contient une constante et une fonction d'arité ≥ 2, dont une, notée « $\cdot$ », qui servira aux duplications, e.g., $t \cdot \mathtt{k}, t \cdot \mathtt{l}$. Les termes de ce langage sont appelés *rayons.* L'opération fondamentale entre rayons est l'*unification* : étant donnés t et u, trouver une substitution θ telle que $t\theta = u\theta$. Un résultat fondamental de Herbrand assure que si t et u sont unifiables, il existe un unificateur *principal* (ou plus grand commun unificateur, PGCU) θ_0, tel que tout unificateur θ pour t, u s'écrive $\theta_0\theta'$, et ce de façon unique.

On considère aussi une variante de l'unification, le *filtrage*, solution de $t\theta = u\theta'$; laquelle se ramène au cas précédent en modifiant les variables pour que t et u n'en aient aucune en commun. Ainsi, x et $f(x)$ ne sont-t-ils pas unifiables alors qu'ils sont filtrables. Deux rayons sont dits *disjoints* quand ils ne sont pas filtrables.

Définition 1 (Étoiles)
On appelle étoile *un ensemble fini et non vide* $\sigma = [\![t_1, \ldots, t_n]\!]$ *de rayons deux à deux disjoints utilisant exactement les mêmes variables.*

$[\![p(x), q(x, y)]\!]$ ou encore $[\![x, p(x)]\!]$ sont donc exclus. Les variables d'une étoile sont supposées muettes : il n'y a pas lieu de distinguer entre $[\![p(x), q(x)]\!]$ et $[\![p(y), q(y)]\!]$ et pas davantage $[\![q(x), p(x)]\!]$.

Digression : l'étoile vide L'étoile vide $[\![\ ]\!]$ a été exclue car on ne peut la lier à rien. Il y a pourtant des arguments très forts en faveur de ce cas zéroaire qui permettrait de formuler la dualité au moyen d'une normalisation dont le résultat serait $[\![\ ]\!]$. Mais comment combiner les critères pour A et B en un critère pour $A \otimes B$, i.e., comment fondre deux $[\![\ ]\!]$ en un seul ? Toutes les tentatives se terminent en eau de boudin.

Définition 2 (Constellations)
Une constellation *est un ensemble fini* $\mathcal{C} = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ *d'étoiles dont les rayons sont deux à deux disjoints.*

Les variables de deux étoiles de $\mathcal{C}$, muettes, doivent être choisies distinctes, une contrainte difficile à respecter sous peine d'illisibilité et donc souvent ignorée. Ce qui fait que l'unification utilisée lors de la normalisation est en pratique un filtrage.

2.1.2 Normalisation

La *normalisation* d'une constellation $\mathcal{C}$, ou élimination des coupures, est basée sur le raccord d'étoiles via un rayon commun :

$$[\![t_1, \ldots, t_m, t]\!] + [\![t, u_1, \ldots, u_n]\!] \leadsto [\![t_1, \ldots, t_m, u_1, \ldots, u_n]\!] \tag{1}$$

Ce rayon commun pouvant être obtenu par unification :

$$[\![t_1, \ldots, t_m, t]\!] + [\![u, u_1, \ldots, u_n]\!] \leadsto [\![t_1\theta, \ldots, t_m\theta, u_1\theta, \ldots, u_n\theta]\!] \tag{2}$$

où θ est le PGCU de t, u.

Problème, les rayons de $\mathcal{C}$, deux à deux disjoints, n'ont pas vocation à s'unifier ! Il faut donc trouver une façon de contourner cette impossibilité. D'où l'introduction de *couleurs*, sous la forme de paires complémentaires, typiquement `magenta`/`vert`, `jaune`/`bleu` et `cyan`/`rouge` ; ces couleurs ne peuvent apparaître que comme premier symbole d'un rayon, e.g., t et u. (2) prend alors un sens quand t et u ont été coloriés : devenus disjoints, ils peuvent appartenir à la même constellation. Si θ est le PGCU de t et u (non coloriés), la normalisation s'écrit :

$$[\![t_1, \ldots, t_m, t]\!] + [\![u, u_1, \ldots, u_n]\!] \leadsto [\![t_1\theta, \ldots, t_m\theta, u_1\theta, \ldots, u_n\theta]\!] \tag{3}$$

Nous n'y sommes pas tout à fait car cette réécriture ferait disparaître $[\![t_1, \ldots, t_m, t]\!]$ dont seule la portion θ a été utilisée. On est ainsi amené a introduire des itérations de (3). Un *diagramme* est un arbre (i.e., un graphe connexe et acyclique) dont les sommets sont des étoiles σ_i (avec de possibles répétitions, les variables étant modifiées pour rester distinctes) et les arêtes entre σ_i et σ_j des équations formelles $t = u$ reliant un rayon t de σ_i à un rayon u de σ_j. L'invariant d'Euler-Poincaré nous assure que, s'il y a $N+1$ sommets, il y a N arêtes ; (3) correspond au cas de base $N = 1$.

L'*actualisation* d'un diagramme consiste à remplacer les arêtes $t = u$, par des équations $t\theta = u\theta$ et à chercher l'unificateur principal de l'ensemble. Si cette unification est impossible, le diagramme est dit *incorrect*. Sinon, soit θ son unificateur principal et $[\![v_1\theta, \ldots, v_n\theta]\!]$ (étoile résiduelle) l'ensemble des rayons (actualisés) non utilisés pour former des arêtes. On demande deux conditions, dont seule la première – dite de *normalisation forte* – importe vraiment.

1. Il n'y a qu'un nombre fini de diagrammes corrects. Autrement dit, il existe un entier N tel que tous les diagrammes de taille $N+1$ (et donc ceux de taille plus grande) soient incorrects.

2. Les étoiles résiduelles sont non vides.

J'ai parlé d'étoile résiduelle $[\![v_1\theta, \ldots, v_n\theta]\!]$, ce qui repose sur le fait que les v_i sont deux à deux disjoints. De plus, les étoiles résiduelles *incolores*, forment une constellation, la *forme normale* de la constellation de départ. Détails dans [1].

2.1.3 Church-Rosser

La normalisation selon Gentzen consistait à remplacer un coupure par d'autres, puis par d'autres jusqu'à obtenir des coupures entre atomes. Une coupure entre, disons, $A \otimes B$ et $\sim A \parr \sim B$ est ainsi remplacée par deux coupures, une entre A et $\sim A$ et une entre B et $\sim B$; ces deux coupures nécessitent deux jeux de couleurs, disons `magenta`/`vert` et `jaune`/`bleu`. Dans quel ordre les éliminer ?

1. D'un coup, en utilisant des arêtes `magenta`/`vert` et `jaune`/`bleu` ?

2. En considérant `jaune` et `bleu` comme incolores pour éliminer `magenta` et `vert` ; puis éliminer `jaune` et `bleu` dans la forme normale obtenue ?

3. La solution opposée, `jaune`/`bleu`, puis `magenta`/`vert` ?

La propriété de Church-Rosser énonce que ces trois protocoles sont strictement équivalents. Ce qui ne pose pas de problème au niveau de la forme normale, mais ne fonctionne pas en termes de normalisation forte, du moins en présence d'étoiles d'arité > 2. L'exemple typique est la constellation formée de l'unique étoile $[\![\, x, x, x \,]\!]$, laquelle se normalise en $\emptyset$ selon le protocole 2. mais diverge selon le protocole 3.

Une solution Ce qui suit remplace le bricolage peu satisfaisant de [1]. On modifie la notion de constellation pour admettre des étoiles *invisibles*, notées $\cdot[\![\, t_1, \ldots, t_n \,]\!]$ où $n \geq 2$, le cas $\cdot[\![\, t \,]\!]$ ayant été exclu car il n'apporte rien. Avec la contrainte suivante : si t et u apparaissent dans des étoiles distinctes $(\cdot)[\![\, t_1, \ldots, t_m, t \,]\!]$ et $(\cdot)[\![\, u_1, \ldots, u_n, u \,]\!]$ de $\mathcal{C}$ et ne sont pas disjoints, alors l'un des deux, disons u, est *strictement* moins général que l'autre, i.e., s'écrit $t\theta$; l'étoile contenant t est alors invisible, i.e., s'écrit $\cdot[\![\, t_1, \ldots, t_m, t \,]\!]$. De plus $(\cdot)[\![\, u_1, \ldots, u_n, u \,]\!]$ s'écrit $(\cdot)[\![\, v_1, \ldots, v_{n+1} \,]\!]$ avec $(\cdot)[\![\, v_1, \ldots, v_{m+1} \,]\!] = (\cdot)[\![\, t_1\theta, \ldots, t_m\theta, t\theta \,]\!]$: si l'on veut $(\cdot)[\![\, u_1, \ldots, u_n, u \,]\!]$ est moins générale, mais plus longue que $(\cdot)[\![\, t_1, \ldots, t_m, t \,]\!]$.

Au niveau de la normalisation, les diagrammes vont désormais combiner étoiles visibles et invisibles. On suppose comme auparavant la normalisation forte, reste à écrire la forme normale. Pour cela, on considère les étoiles résiduelles des divers diagrammes corrects, dont certains contiennent encore les couleurs à éliminer ; si le diagramme utilise des étoiles invisibles, alors son étoile résiduelle est aussi invisible. On continue en enlevant les rayons colorés, avec un résultat invisible ; c'est ainsi que $(\cdot)[\![\, t, u, v \,]\!]$ est remplacé par $\cdot[\![\, t, u \,]\!]$. Finalement, on ne retient que les étoiles (visibles ou non) maximales au niveau de l'inclusion.

La forme normale d'une constellation reste une constellation : la démonstration donnée en [1], section 2.3., peut être adaptée, *mutatis, mutandi*, à la nouvelle notion mais je n'ai pas vérifié les détails. Cette modification est exactement ce qu'il manquait pour obtenir Church-Rosser. Incidemment la normalisation `magenta`/`vert` de la constellation $\{[\![\, x, x, x \,]\!]\}$ donne la forme normale $\{\cdot[\![\, x, x \,]\!]\}$.

Basée sur des étoiles invisibles, la nouvelle notion est tout aussi invisible dans cet article que je n'ai pas cru devoir saturer de « visibles » répétitifs et allant de soi.

2.2 $\invamp$, le pivot

2.2.1 Le séquent vide

La LL (Logique Linéaire) s'est construite autour de la dualité

$$\frac{\vdash A \qquad \vdash {\sim}A}{\vdash} \tag{4}$$

dont le pivot serait le séquent vide « $\vdash$ ». Drôle de séquent dont Gentzen et ses épigones n'ont cessé d'établir l'inutilité dans des « démonstrations » de cohérence : à quoi sert-il donc si l'on ne peut jamais le prouver ? Dans cette tradition, le séquent vide prend le sens de l'absurdité – notée $\mathbf{0}$ –, celle de l'*ex nihilo quod libet*.

Ce n'est pas de l'absurdité dont il est question ici, mais de l'élément neutre multiplicatif $\perp$. La nuance entre les deux correspondant à la différence entre négation $A \Rightarrow \mathbf{0}$ ($= ?{\sim}A \invamp \mathbf{0}$) et envers $A \multimap \perp$ ($= {\sim}A \invamp \perp$). En fait le vide est tellement vide qu'il y aurait deux façons d'en parler, $\mathbf{0}$ et $\perp$; ça sent le roussi ! En passant sur les détails d'un problème qui m'a énormément occupé, j'ai été amené à conclure que les *conditions de possibilité* de « $\vdash$ » ne sont pas remplies. La seule façon de produire ce séquent étant la coupure

$$\frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash {\sim} A, \Delta}{\vdash \Gamma, \Delta} \tag{5}$$

on doit donc la restreindre au cas où Γ, Δ est non vide. Ce qui correspond par ailleurs à un interdit de la ST : l'impossibilité de l'étoile vide $[\![\ ]\!]$ qui « fout tout en l'air ».

La constante $\perp$, dont la règle logique serait l'*affaiblissement*

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \perp} \tag{6}$$

est tout aussi impossible que le séquent vide. Malgré un incroyable acharnement thérapeutique (auquel j'ai moi-même pris part), personne n'est jamais venu à bout de la disconnection des réseaux comportant $\perp$; et d'ailleurs, comment départager $\perp$ de son envers $\mathbf{1}$? Cet acharnement résulte d'un *a priori* utile qu'il ne faut pas transformer en précepte religieux – toute opération, ici « $\parr$ », devrait un avoir un élément neutre – et du réalisme axiomatique qui donne un corps sémantique à toute élucubration formelle : on pense au Lt. Kije, créé par erreur par une bureaucratie infaillible et qui fait quand même carrière. Quand je disais que la frontière entre réalité et préjugé est ténue...

Il nous faut trouver un *ersatz* de $\perp$ (ou $\vdash$) i.e., quelque chose qui puisse servir de pivot à la Logique : ce sera ヲ.

2.2.2 La constante ヲ

En termes de ST, ヲ (le katakana wo) est une abréviation pour le rayon を(x) qui utilise une fonction unaire (le hiragana [1] wo) fixée une fois pour toutes. Il est pour l'instant complétement dépourvu de statut logique et n'aura d'ailleurs jamais la moindre sémantique : à l'écart du débat aléthique (section 3.1.5), il n'a même pas droit à un strapontin du côté des logiques « philosophiques » – pourtant peu regardantes. Pied-de-nez à l'essentialisme, l'irrécupérable ヲ se doit d'être totalement neutre et donc *antérieur* à toute considération sur la vérité.

Bien que cela ne soit nullement nécessaire à cette étape, il est utile de mentionner que ヲ donnera lieu à une proposition. Ses multiples occurences devront alors être délocalisées pour devenir des を$_i(x)$ deux à deux disjoints, e.g., を$_{\mathtt{k}}(x) :=$ を$(x) \cdot \mathtt{k}$. La constante logique ヲ est gérée par l'« axiome » :

1. Rappelons que le japonais utilise deux syllabaires isomorphes, ce qui fait qu'on a deux wo mais aussi deux fu, フ et ふ.

$$\frac{}{\vdash ヲ, \ldots, ヲ} \tag{7}$$

et la règle de coupure :

$$\frac{\vdash \Gamma, ヲ \qquad \vdash ヲ, \Delta}{\vdash \Gamma, \Delta} \tag{8}$$

L'« axiome » s'écrit $[\![\, を_{\mathtt{k}_1}(x), \ldots, を_{\mathtt{k}_n}(x) \,]\!]$ en ST ; il faut donc au moins un ヲ puisque l'étoile $[\![\;]\!]$ ne fonctionne pas davantage que le séquent vide « $\vdash$ ». La coupure, où Γ, Δ doit être non vide, s'exprime au moyen de couleurs complémentaires. Elle se normalise facilement, par exemple en remplaçant $[\![\, t_1, \ldots, t_k, を_{\mathtt{k}}(x) \,]\!] + [\![\, を_{\mathtt{k}}(x), u_1, \ldots, u_l \,]\!]$ par $[\![\, t_1, \ldots, t_k, u_1, \ldots, u_l \,]\!]$.

ヲ $= \sim$ヲ : ヲ est auto-duale mais en aucune façon antinomique.

2.2.3 Base et support

Les propositions logiques sont *localisées*. En effet, les démonstrations reposent sur le tracé de liens entre atomes et ces liens doivent bien être « écrits » quelque part. Les lieux sont donc à la fois nécessaires et contingents, tout comme les variables qu'on peut changer globalement mais pas localement. Une situation familière en mathématiques : $\int f(x)dx \sim \int f(y)dy$ alors que $\int f(x, y, y)dxdy \not\sim \int f(x, x, y)dxdy$.

Une proposition (et ses divers niveaux, comportements et surmois, *infra*) est donc localisée dans un *support* $s = s[x]$ dépendant d'une unique variable x, de plus non répétée : exemple $s = x \cdot a$, $s = (a \cdot a) \cdot f(x)$ mais ni $s = a$ ni $s = x \cdot x$ ne sont admis. Restriction supplémentaire, s doit être disjoint de $を(x)$: effet, ヲ n'est pas traité comme une proposition mais comme une sorte de point d'ancrage extraterritorial : c'est l'endroit ou s'opèrent les jugements finaux, la clef de voûte de l'architecture logique. Sur le support, voir l'annexe A.1.

Les artefacts logiques pourront être localisées en s ou en $s + を(x)$ (noté $s + を$, plus lisible).

Définition 3 (Desseins et gardiens)
On appelle dessein *de support* $s = s[x]$ *une constellation* $\mathcal{D}$ *dont les rayons sont moins généraux que* s*, i.e., de la forme* $s[t], s[t'], s[t''], \ldots$ *Et* gardien *de support* s *une constellation* $\mathcal{G}$ *dont tous les rayons sont moins généraux que* s *à l'exception d'une occurence de* $を(x)$*.* $\mathcal{G}$ *contient donc une unique étoile de la forme* $[\![\, t_1, \ldots, t_n, を(x) \,]\!]$*, son* pétiole*. Ce pétiole est* régulier *si* $n \neq 0$*,* singulier *sinon ; on parle alors de gardien régulier ou singulier.*

L'introduction de *séquents* de comportements amènera à considérer des supports multiples $\mathbf{s} = s_1, \ldots, s_k$ $(k \neq 0)$, les s_i étant des supports « simples » deux à deux disjoints. Les notions sont adaptées *mutatis mutandis* : « moins général que s » devenant « moins général qu'un des s_i ».

La Logique a horreur du vide et ne peut tolérer une proposition sans contrainte. C'est pourquoi il faut aussi choisir une *base*. Elle est formée d'un gardien régulier $\mathcal{B}$ qui fera nécessairement partie des gardiens (en fait des chiens) d'un comportement, voir *infra*. Petit détail technique, utilisé en section 4.1.3 : les rayons d'une base peuvent être supposés non clos, i.e., avec au moins une variable : une étoile close ne peut pas en effet contribuer au succès d'un test.

2.2.4 Orthogonalité

Les gardiens correspondent aux critères de correction des réseaux de démonstration ; ils se divisent en *chiens* et *cerbères*, sans différence morphologique profonde, sinon qu'un chien doit être régulier. Voyons donc comment ces deux catégories « gardent » les desseins.

Un gardien $\mathcal{G}$ de support s peut servir à tester un dessein $\mathcal{D}$ de même support, au moyen d'une coupure qu'on pourrait noter :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \vdots\\ \vdash s[x]\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{G}\\ \vdots\\ \vdash s[x], \text{を}(x)\end{array}}{\vdash \text{を}(x)} \tag{9}$$

On a colorié $s[x]$ en `cyan` ou `rouge`, d'où $\mathcal{D}$ et $\mathcal{G}$, puis formé $\mathcal{D} + \mathcal{G}$.

Définition 4 (Orthogonalité simple)
$\mathcal{D}$ et $\mathcal{G}$ de même support s sont orthogonaux, *notation $\mathcal{D} \perp \mathcal{G}$ quand $\mathcal{D} + \mathcal{G}$ se normalise en $[\![\, \text{を}(x) \,]\!]$.*

L'orthogonalité simple est la transposition en ST de la correction des réseaux multiplicatifs : $\mathcal{D}$ correspond aux liens « axiomes », $\mathcal{G}$ aux positionnements d'interrupteurs avec $\text{を}(x)$ dans le rôle de la conclusion.

Définition 5 (Exponentiation)
Si $\mathcal{D}$ est un dessein de support $s = s[x]$, on note $!\mathcal{D}$ le résultat du remplacement de toute étoile $[\![\, s[t_1], \ldots, s[t_n] \,]\!]$ de $\mathcal{D}$ par $[\![\, s[t_1 \cdot Z], \ldots, s[t_n \cdot Z] \,]\!]$ où Z est une variable fraîche.

Définition 6 (Orthogonalité exponentiée)
$\mathcal{D}$ et $\mathcal{G}$ de même support s sont orthogonaux, *notation $!\mathcal{D} \perp \mathcal{G}$ quand $!\mathcal{D} + \mathcal{G}$ se normalise en $[\![\, \text{を}(x) \,]\!]$.*

L'orthogonalité exponentiée permet de formuler correctement – i.e., logiquement – certaines contraintes non accessibles à l'orthogonalité simple. Ainsi, comment interdire aux étoiles de $\mathcal{D}$ de contenir à la fois un $s[u]$ et un $t[v]$ (j'ai pris le cas d'un support multiple, plus lisible) ? On considère le gardien (singulier) $s \smile t := [\![\, s[y\cdot(y\cdot z)], t[z\cdot(y\cdot z)] \,]\!] + [\![\, \text{を}(x) \,]\!]$. Une étoile $[\![\, s[u], t[v], \ldots]\!]$ de $\mathcal{D}$, devient $[\![\, s[u\cdot Z], t[v\cdot Z], \ldots]\!]$ dans $!\,\mathcal{D}$. Qui entre en conflit avec notre gardien à travers son cas particulier $[\![\, s[u\cdot(u\cdot v)], t[v\cdot(u\cdot v)] \,]\!]$.

2.2.5 Chiens et cerbères

L'orthogonalité (définitions 4 et 6) est une relation objet/sujet, le sujet étant celui qui contient le pétiole : il « juge » l'objet. Mais, quand tu regardes l'abîme, l'abîme regarde en toi, autrement dit, les juges seront jugés. Peut-on intervertir les rôles ?

Il n'est pas possible de faire d'un dessein un gardien, sauf à lui adjoindre un pétiole singulier sans intérêt. On peut par contre « élaguer » un pétiole (*infra*), ce qui permet de faire juger un gardien par un gardien. Mais il faut introduire une distinction à l'intérieur des gardiens que l'on divise en deux classes, *chiens* et *cerbères*.

Chiens : toujours réguliers, ils jugent à travers l'orthogonalité simple.

Cerbères : ils jugent à travers l'orthogonalité exponentiée ; la possibilité de répétition en fait des chiens à plusieurs têtes. Incidemment, les cerbères singuliers permettent de donner un statut aux objets « partiels » qui n'ont jamais trouvé leur place en Logique.

Les cerbères n'occupent qu'une position sujet, personne ne les juge. Les chiens sont par contre, à la fois sujet et objet *modulo* élagage et éventuellement exponentiation.

Définition 7 (Élagage)
Si $\mathcal{G}$ est un chien, $\mathcal{G}^-$ est le dessein obtenu en rentrant son pétiole, i.e., en remplaçant $[\![\, t_1, \ldots, t_n, \text{を}(x) \,]\!]$ par $[\![\, t_1, \ldots, t_n \,]\!]$; $n \neq 0$ puisqu'un chien n'est jamais singulier.

Définition 8 (Orthogonalité des gardiens)
Deux gardiens $\mathcal{G}$ et $\mathcal{J}$ de même support sont dit orthogonaux *quand :*

$\mathcal{G}$ et $\mathcal{J}$ chiens : $\mathcal{G}^- \perp \mathcal{J}$ *et* $\mathcal{J}^- \perp \mathcal{G}$.

$\mathcal{G}$ chien et $\mathcal{J}$ cerbère : $!\,\mathcal{G}^- \perp \mathcal{J}$.

$\mathcal{G}$ cerbère et $\mathcal{J}$ chien : $!\,\mathcal{J}^- \perp \mathcal{G}$.

$\mathcal{G}$ et $\mathcal{J}$ cerbères : *deux cerbères sont toujours orthogonaux.*

2.2.6 Comportements et surmois

D'abord un problème de notation. On est amené à parler de propositions qui se présentent sous une forme duale, droits et devoirs, desseins et gardiens, ces derniers relevant moralement de l'envers (*infra)*.

On va réserver les caractères gras aux *comportements*, e.g., $\mathbf{C}$, ensemble de desseins de même support. Les *surmois* qui les contrôlent seront notés $[\mathbf{C}] \vdash \text{ヲ}$ avec deux sous-ensembles $\mathbf{C} \vdash \text{ヲ}$ (chiens) et $\underline{\mathbf{C}} \vdash \text{ヲ}$ (cerbères).

Définition 9 (Surmois)
Soit $\mathcal{B}$ une base de support s. On appelle surmoi *(de base $\mathcal{B}$) un ensemble $[\mathbf{C}] \vdash \text{ヲ}$ de gardiens de support s qui sont donc des constellations de support $s[x] + \text{を}(x)$ formé de chiens – parmi eux, la base $\mathcal{B}$ – et de cerbères. Le* comportement *induit par $[\mathbf{C}] \vdash \text{ヲ}$ est l'orthogonal :*

$$\mathbf{C} := (\mathbf{C} \vdash \text{ヲ})^{\perp}$$

$\mathbf{C}$ *est donc formé des $\mathcal{D}$ de support s tels que $\mathcal{D} \perp \mathcal{G}$ (resp. $!\mathcal{D} \perp \mathcal{G}$) pour tout $\mathcal{G} \in \mathbf{C} \vdash \text{ヲ}$ (resp. $\mathcal{G} \in \underline{\mathbf{C}} \vdash \text{ヲ}$.*

Pandant que nous y sommes, introduisons $\vdash [\mathbf{C}], \text{ヲ}$, formé des gardiens orthogonaux à $[\mathbf{C}] \vdash \text{ヲ}$ (au sens de la définition 8) : il est donc formé de chiens, ceux de $\vdash \mathbf{C}, \text{ヲ}$, et de cerbères, ceux de $\vdash \underline{\mathbf{C}}, \text{ヲ}$.

Mentionnons une inclusion remarquable :

$$(\vdash \mathbf{C}, \text{ヲ})^{-} \subset \mathbf{C} \tag{10}$$

2.2.7 L'envers

L'identification entre envers et orthogonal s'exprime informellement au moyen des deux inclusions :

$\sim A \subset A^{\perp}$: équivalent à $A \subset (\sim A)^{\perp}$, elle correspond à l'axiome d'identité du calcul des séquents : c'est l'aspect *droits* de la dualité logique qui permet de construire suffisamment de preuves.

$A^{\perp} \subset \sim A$: équivalent à $(\sim A)^{\perp} \subset A$, elle correspond à la règle de coupure du calcul des séquents : c'est l'aspect *devoirs* de la dualité logique qui s'oppose à la prolifération des preuves.

Sur le support s considérons un surmoi $[\mathbf{C}] \vdash \text{ヲ}$ de base $\mathcal{B}$ et un surmoi $[\mathbf{D}] \vdash \text{ヲ}$ de base $\widetilde{\mathcal{B}}$. Nous voulons exprimer la dualité entre les deux ; la condition qui tombe sous le sens est l'orthogonalité des bases respectives :

$$\mathcal{B} \perp \widetilde{\mathcal{B}}$$

Il serait possible de demander que $[\mathbf{C}] \vdash \maltese = ([\mathbf{D}] \vdash \maltese)^{\perp}$, ce qui par dualité ferait de nos surmois des bi-orthogonaux : $[\mathbf{C}] \vdash \maltese = ([\mathbf{C}] \vdash \maltese)^{\perp\perp}$. Solution trop simpliste car elle écraserait l'usine (section 2.3) qui repose sur des surmois *finis*. Il faut donc accepter que $[\mathbf{C}] \vdash \maltese$ ne soit déterminé par $[\mathbf{D}] \vdash \maltese$ qu'au niveau de son biorthogonal.

Ce qui suit anticipe le traitement des *séquents* (section 2.4).

Axiome Cet axiome, i.e., règle sans prémisse, s'exprime $\vdash \mathbf{C}, \mathbf{D}$ ou, pour être pédant, $\vdash \mathbf{C}, \mathbf{D}'$ où $\mathbf{D}$ a été délocalisé en s' disjoint de s. On vérifie sa correction au moyen de deux coupures, une sur $\mathbf{C}$ et une sur $\mathbf{D}$.

Définition 10 (Droits)
$\mathcal{G} \perp \mathcal{J}$ (cf. définition 8) pour tous $\mathcal{G} \in [\mathbf{C}] \vdash \maltese$ et $\mathcal{J} \in [\mathbf{D}] \vdash \maltese$.

La définition exprime l'inclusion $([\mathbf{C}] \vdash \maltese) \subset (\vdash [\mathbf{D}], \maltese)$ (de façon équivalente, $([\mathbf{D}] \vdash \maltese) \subset (\vdash [\mathbf{C}], \maltese)$). En particulier, $(\mathbf{D} \vdash \maltese)^{-} \subset \mathbf{C}$, ce qui est la façon rigoureuse de formuler la proximité entre gardiens de $\mathbf{C}$ et démonstrations de $\mathbf{D}$. La condition est facile à vérifier puisqu'elle relie des surmois.

Coupure La coupure

$$\frac{\vdash \underline{\Pi}, \Gamma, \mathbf{C} \qquad \vdash \mathbf{D}, \underline{\Lambda}, \Delta}{\vdash \underline{\Pi}, \underline{\Lambda}, \Gamma, \Delta} \tag{11}$$

et sa variante exponentiée

$$\frac{\vdash \underline{\Pi}, \mathbf{C} \qquad \vdash \underline{\mathbf{D}}, \underline{\Lambda}, \Delta}{\vdash \underline{\Pi}, \underline{\Lambda}, \Delta} \tag{12}$$

peuvent être ramenées au cas où $\underline{\Pi}, \underline{\Lambda}, \Gamma, \Delta$ (ou $\underline{\Pi}, \underline{\Lambda}, \Delta$) se réduit à $\maltese$.

Définition 11 (Devoirs)
On demande l'orthogonalité (cf. définitions 4 et 6) dans les cas suivants :

$\mathcal{C} \in \mathbf{C}$ **et** $\mathcal{J} \in\ \vdash \mathbf{D}, \maltese$ **:** $\mathcal{C} \perp \mathcal{J}$.

$\mathcal{G} \in\ \vdash \mathbf{C}, \maltese$ **et** $\mathcal{D} \in \mathbf{D}$ **:** $\mathcal{D} \perp \mathcal{G}$.

$\mathcal{C} \in \mathbf{C}$ **et** $\mathcal{J} \in\ \vdash \underline{\mathbf{D}}, \maltese$ **:** $!\mathcal{C} \perp \mathcal{J}$.

$\mathcal{G} \in\ \vdash \underline{\mathbf{C}}, \maltese$ **et** $\mathcal{D} \in \mathbf{D}$ **:** $!\mathcal{D} \perp \mathcal{G}$.

Si le volet « droits » se réduit à un calcul, le volet « devoirs » n'est pas directement vérifiable. Il nécessite un raisonnement, i.e., un théorème d'élimination des coupures. Toute la littérature sur les fondements consiste à montrer que tel ou tel couple de comportements remplit bien ses devoirs.

Cette signification fondamentale est oblitérée par la formulation en termes de systèmes, sortes de chapelles opaques.

2.3 L'usine

L'orthogonalité est la forme stable de BHK, en particulier de son cas le plus spectaculaire :

Définition 12 (Implication)
Une démonstration de $A \Rightarrow B$ est une fonction π associant à toute démonstration σ de A une démonstration $\pi(\sigma)$ de B.

$A \Rightarrow B$ est défini comme l'orthogonal de $!A \otimes \sim B$, mais seulement *grosso modo*. Le but de cet article est d'éliminer tout flou artistique et de faire en sorte que la définition 12 se ramène *vraiment* à l'orthogonalité. Avec une difficulté, celle de savoir si oui ou non la « fonction » fait bien ce qu'elle dit, autrement dit si elle est bien orthogonale à $!A \otimes \sim B$. En effet, en admettant avoir défini nos notions de façon rigoureuse – ce qui n'était pas le cas dans les années 1930 –, comment en être sûr ?

Certains ont proposé une démonstration auxiliaire qui ne peut mener qu'à une pyramide de Ponzi intellectuelle, un empilement de « méta-démonstrations » gigognes. D'autres de se placer dans un système donné à l'avance, ce qui revient à abdiquer toute ambition en réduisant BHK à une sorte de « réalisabilité », i.e., une sémantique de plus. Ce qui est un contresens puisque la définition 12 ne réfère à aucun système : elle parle de démonstrations *tout court*.

D'où l'*usine* qui est une sorte de système ouvert, i.e., sans sectarisme. Pour savoir que $\pi \perp (!A \otimes \sim B)$, on va le tester, non contre la totalité – infinie et globalement inaccessible – de $!A \otimes \sim B$ mais contre un échantillon réprésentatif, le fameux *surmoi* qui doit donc être fini – bien que ça ne fasse pas partie des conditions – pour qu'il s'agisse bien d'une vérification.

Mais comment savons-nous que ce surmoi est représentatif ? Il faut faire une démonstration – d'élimination des coupures – et se pose alors la question : sommes-nous en train de reculer pour mieux sauter ? Oui et non.

Oui, car l'élimination des coupures a pour conséquence la foutue « consistance » logique dont on sait depuis Gödel qu'on ne saurait l'établir de façon simple et définitive. Non, car nous ne proposons pas un système mais un traitement proposition par proposition, ce qui évite le prison des chapelles.

Car le véritable enjeu n'est pas fondationnel mais normatif : qu'est-ce que la Logique, qu'est-ce qu'une démonstration, de quoi sommes-nous sûrs ? Développée dans le cadre de la Théorie des Ensembles, notre combinatoire est tout aussi sûre que n'importe quel autre travail de mathématiques ; il est de plus facile de voir l'extrême généralité et l'absence de préjugés de l'approche. Un seul regret : il n'y a pas moyen d'intégrer la Logique Classique, i.e., le raisonnement par l'absurde autrement que via un bricolage ancien et moyennement satisfaisant, la traduction $\neg\neg$ de Gödel.

2.4 Séquents de comportements

Nous allons combiner les propositions pour en faire des *séquents*, notion fondamentale de la Logique. Et découvrir que l'élimination des coupures au niveau des séquents se justifie par celle de leurs constituants. Ce qui est essentiel pour se libérer des calamiteux systèmes.

2.4.1 Le surmoi

Les comportements communiquent au moyen de l'implication logique (linéaire ou pas), ce qui se traduit par des *séquents*. Quand nous aurons introduit les connecteurs logiques, $\vdash \mathbf{C}, \mathbf{D}$ se lira $\mathbf{C} \parr \mathbf{D}$, i.e., aussi bien $\sim\mathbf{C} \multimap \mathbf{D}$ que $\sim\mathbf{D} \multimap \mathbf{C}$; quant à $\vdash \underline{\mathbf{C}}, \mathbf{D}$, il se lira $?\mathbf{C} \parr \mathbf{D}$, i.e., $\sim\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{D}$.

Un *séquent* $\vdash \underline{\mathbf{C}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{C}}_m, \mathbf{D}_1, \ldots, \mathbf{D}_n$ $(n \neq 0)$ combine divers comportements dont les supports $s_1, \ldots, s_m, t_1, \ldots, t_n$ sont deux à deux disjoints.

Le surmoi du séquent est formé des :

Chiens : $!\mathcal{G}_1^- + \ldots + !\mathcal{G}_m^- + \mathcal{J}_1^- + \ldots + \mathcal{J}_k + \ldots + \mathcal{J}_n^-$ avec $\mathcal{G}_i \in \mathbf{C}_i \vdash \text{ꟻ}$ $(1 \leq i \leq m)$ et $\mathcal{J}_j \in \mathbf{D}_j \vdash \text{ꟻ}$ $(1 \leq j \leq n)$. L'idée est de prendre un chien dans chaque surmoi et de l'élaguer, sauf un $\mathcal{J}_k$ qui fournira le pétiole.

Cerbères : $!!\mathcal{G}_1^- + \ldots + !!\mathcal{G}_m^- + !\mathcal{J}_1^- + \ldots + \mathcal{J}_k + \ldots + !\mathcal{J}_n^-$ avec $\mathcal{G}_i \in \mathbf{C}_i \vdash \text{ꟻ}$ $(1 \leq i \leq m)$ et $\mathcal{J}_j \in \underline{\mathbf{D}}_j \vdash \text{ꟻ}$ $(1 \leq j \leq n)$. Il s'agit fondamentalement de l'exponentiation du cas précédent, d'où un double « ! » au niveau des $\mathcal{G}_i^-$.

Facile de trouver une base, il suffit de combiner celles des $\mathbf{C}_i$ et $\mathbf{D}_j$. Problème, l'entier k puisqu'on a l'embarras du choix. Cet arbitraire est à rapprocher de la non-unicité de l'usine.

2.4.2 Droits

Considérons le séquent $\vdash \sim\mathbf{C}, \mathbf{C}$, où $\sim\mathbf{C}$ est « l'envers » de $\mathbf{C}$. Double abus, de langage puisque cet envers n'est unique qu'au niveau de l'usage, et de notation puisqu'il faut délocaliser $\sim\mathbf{C}$ en $t[x]$ pour rendre les supports disjoints. Ce péché admis, considérons la constellation réduite à la seule étoile $[\![\, t[x], s[x] \,]\!]$ et montrons qu'elle appartient bien à $\vdash \sim\mathbf{C}, \mathbf{C}$. Il faut considérer les quatre types de gardiens, par exemple $!\mathcal{J}^- + \mathcal{K}$ avec $\mathcal{J} \in \sim\mathbf{C} \vdash \text{ꟻ}$ et $\mathcal{K} \in \underline{\mathbf{C}} \vdash \text{ꟻ}$. Le passage du test se ramène à l'orthogonalité (définition 8) de $\mathcal{J}$ et $\mathcal{K}$ qui résulte de la notion-même d'envers (définition 10).

2.4.3 Devoirs, cas intuitionniste

Prenons le cas d'un séquent $\vdash \underline{\mathbf{C}}, \underline{\mathbf{\Pi}}, \mathbf{\Gamma}$. Et décomposons un de ses gardiens en $!\mathcal{G}^- + \mathcal{K}$ avec $\mathcal{G} \in \mathbf{C} \vdash \maltese$. Le test d'un dessein $\mathcal{D}$ peut se faire en deux étapes : une sorte d'évaluation partielle de $\mathcal{D}$ par rapport à $\mathcal{K}$, résultat $\mathcal{K}(\mathcal{D})$ suivi du test de $\mathcal{K}(\mathcal{D})$ par $\mathcal{G}$: on voit ainsi que $\mathcal{K}(\mathcal{D}) \in \underline{\mathbf{C}} \vdash \maltese$. La définition 11 permet de remplacer $\mathcal{G}$ par un élément de $\sim\mathbf{C}$. Autrement dit,

$\mathcal{D} \in\ \vdash \underline{\mathbf{C}}, \underline{\mathbf{\Pi}}, \mathbf{\Gamma}$ ssi pour tout $\mathcal{E} \in \sim\mathbf{C}$ le résultat de la coupure exponentiée (12) entre les deux appartient à $\vdash \underline{\mathbf{\Pi}}, \mathbf{\Gamma}$.

En particulier, $\mathcal{D} \in\ \vdash \underline{\mathbf{C}}, \mathbf{D}$ s'il « envoie » $!\sim\mathbf{C}$ dans $\mathbf{D}$. C'est la version rigoureuse de la célèbre clause de BHK (définition 12).

Pendant que j'y suis, les règles structurelles.

Affaiblissement : si $\mathcal{D} \in\ \vdash \underline{\mathbf{\Pi}}, \mathbf{\Gamma}$, alors $\mathcal{D} \in\ \vdash \underline{\mathbf{C}}, \underline{\mathbf{\Pi}}, \mathbf{\Gamma}$: effet l'« application » de la « fonction » $\mathcal{D}$ à un quelconque argument de $\sim\mathbf{C}$ a pour « résultat » $\mathcal{D}$.

Contraction : si $\mathcal{D} \in\ \vdash \underline{\mathbf{C}}, \underline{\mathbf{C}}, \underline{\mathbf{\Pi}}, \mathbf{\Gamma}$, abus de notation car un des deux $\mathbf{C}$, disons celui de droite, doit être délocalisé en t, on les superpose au moyen des transformations $s[u \cdot v] \rightsquigarrow s[u \cdot (v \cdot \mathtt{g})]$ ($\mathbf{C}$ gauche, localisé en s) et $t[u \cdot v] \rightsquigarrow s[u \cdot (v \cdot \mathtt{d})]$ ($\mathbf{C}$ droit, localisé en s) où $\mathtt{g}$ et $\mathtt{d}$ sont des constantes distinctes.

2.4.4 Devoirs, cas linéaire

Exactement comme le cas intuitionniste, sinon qu'il y a ici une symétrie qui permet d'échanger source et but des fonctions, tout comme l'adjonction de l'algèbre linéaire. Par exemple, dans le cas d'un séquent $\vdash \mathbf{C}, \mathbf{D}$:

$\mathcal{D} \in\ \vdash \mathbf{C}, \mathbf{D}$ ssi pour tout $\mathcal{E} \in \sim\mathbf{C}$ (resp. tout $\mathcal{E} \in \sim\mathbf{D}$) le résultat de la coupure (11) entre les deux appartient à $\mathbf{D}$ (resp. $\mathbf{C}$).

Pendant que j'y suis, justifions la dernière règle structurelle :

Déréliction : $\mathcal{D} \in\ \vdash \mathbf{C}, \underline{\mathbf{\Pi}}, \mathbf{\Gamma}$ ($\mathbf{C}$ localisé en s) remplaçons systématiquemnt dans $\mathcal{D}$ les $s[u]$ par des $s[u \cdot \mathtt{k}]$ où $\mathtt{k}$ est une constante. Le résultat $\mathcal{E}$ de ce remplacement appartient visiblement à $\vdash \underline{\mathbf{C}}, \underline{\mathbf{\Pi}}, \mathbf{\Gamma}$.

Digression : une erreur de jeunesse. La découverte de la linéarité en 1985 a été pour moi un tel choc que j'ai linéarisé l'intégralité de la Logique, en réduisant l'implication intuitionniste au cas linéaire au moyen de $A \Rightarrow B := !A \multimap B$. $A \Rightarrow B$ envoyait donc les démonstrations de $\sim B$ dans celles de $\sim !A = ?\sim A$. Mais si cette traduction est bien correcte, les exponentielles « ! » et « ? » ne définissent pas de propositions : elles ne fonctionnent qu'à l'état de combinaison $! \otimes$ ou $? \parr$, un peu comme l'ion NH^4 de la Chimie. Défaut collatéral, les éléments neutres $\mathbf{1}$ et $\mathbf{\perp}$ qui, malgré leur apparente simplicité, faisaient la nique aux réseaux. Moralité, sans cette erreur de jeunesse, il n'y aurait peut-être jamais eu de LL. Mais il n'est que trop temps de la réparer.

3 Le monde de ⁊

Nous avons pris soin, notamment au moyen des *bases* (section 2.2.3) d'éviter les comportements vides. Mais, en première approximation, le non-vide est marqueur de vérité : tous vrais ?

3.1 La vérité

3.1.1 La Vérité tarskiste

Le but du raisonnement est, on ne peut en douter, d'établir des vérités ; cet acte purement langagier doit, de plus correspondre à quelque chose, d'où l'idée « tarskienne » d'une Vérité essentialisée qui en constituerait la contrepartie « sémantique ». Exemple syllogistique : « Tout A est B » ayant pour sémantique l'inclusion $|A| \subset |B|$ entre les *dénotations* respectives de A et B, *Barbara* se justifierait par la transitivité de l'inclusion :

$$|A| \subset |B| \wedge |B| \subset |C| \;\Rightarrow\; |A| \subset |C|$$

D'où une condescendante réhabilitation d'Aristote, lequel – je l'ai entendu ! – n'aurait donc pas été si nul que ça. Du moins selon cette approche qui ne manque pas d'air : en effet, comment expliquer la transitivité de l'inclusion – essayez-donc –, sinon par un *Barbara* ? Une circularité balayée par le réalisme qui invoque un méta-*Barbara* – le même mais décalé d'un cran –, ce qui présage un inévitable méta-méta, *Turtles all the way down.* Aucun doute n'est permis, la justification externe, sémantique, de la Logique est une pure escroquerie pyramidale, la rencontre de La Palice et Ponzi.

3.1.2 Le formalisme hilbertien

Après tout, la Logique est un jugement sur la forme qui exclut toute référence externe, perçue comme un préjugé à éviter comme la peste. D'où le *formalisme* hilbertien et l'idée géniale, mais fautive, de réduire la *vérité* (non essentialisée, sans majuscule) d'une proposition arithmétique A à sa *prouvabilité* dans l'arithmétique de Peano **PA**. Ce qui suppose qu'entre A et sa négation $\neg A$, un et un seul soit démontrable. La vérité de A est alors équivalente à sa *consistance*[2], i.e., au fait que $\neg A$ ne soit pas démontrable. Le théorème d'incomplétude de Gödel (1931) fournit un A – tiré par les cheveux, mais de quel droit l'exclure ? – qui n'est ni démontrable, ni réfutable, autrement dit ni vrai ni faux au sens précédent. Mais Vrai au sens externe, tarskien, ce qui suggère une possible amélioration du système, qui pourrait

2. Anglicisme pour « cohérence », expression noble à ne pas gâcher sur ce machin.

devenir **PA**$+A$. Las, la même incomplétude s'applique à la version « gonflée » et fournit une nouvelle proposition indécidable : départ d'une nouvelle pyramide de Ponzi, une itération de théories dont on n'a pas hésité à proposer de laborieuses versions transfinies ! Résultat des courses : si Hilbert avait bien raison de se concentrer sur la forme, il n'en a trouvé qu'une mesquine enveloppe. Ce qui est en cause, c'est la notion-même de *système* fermé, coercitif. Il faut penser le raisonnement de façon *ouverte*.

3.1.3 BHK

Cette approche ouverte est celle de BHK ($\sim$ 1930) dont la principale caractéristique est l'expulsion de tout système préexistant. Avec pour vedette le cas de l'implication (intuitionniste) que je rappelle :

Définition 12 (Implication)
Une démonstration de $A \Rightarrow B$ est une fonction π associant à toute démonstration σ de A une démonstration $\pi(\sigma)$ de B.

L'*intuitionnisme* de Brouwer – le B de BHK – s'oppose au formalisme hilbertien, surtout à sa vision étriquée de la forme, la pénible consistance. Tout en refusant lui aussi toute référence externe, sémantique ; au-delà des querelles de chapelle, il faut y voir un authentique formalisme. D'ailleurs, la plus grande réussite de l'approche hilbertienne, le *calcul des séquents* de Gentzen (1934), est le véritable soubassement de BHK. Il suffit en effet d'éliminer le *Modus Ponens* – i.e., la coupure – entre A (de démonstration σ) et $A \Rightarrow B$ (de démonstration π) pour obtenir une démonstration $\pi(\sigma)$ de B.

Cette définition géniale souffre d'un flou artistique lié à la notion de « fonction ». Nous venons (section 2.4.3) de lui donner un sens rigoureux.

3.1.4 Horror vacui

BHK recèle par contre une erreur stratégique, le cas de l'absurdité qui a donné lieu à une définition totalement... absurde :

Définition 13 (Absurdité)
Il n'y a pas de démonstration de $\mathbf{0}$.

Conflit ouvert avec l'implication ; en effet, si $\neg A := A \Rightarrow \mathbf{0}$:

Définition 14 (Négation)
Une démonstration de $\neg A$ est une fonction π associant à toute démonstration σ de A une démonstration $\pi(\sigma)$ de $\mathbf{0}$, i.e., un élément de l'ensemble vide.

Ça ne tient pas debout et c'est pourtant ce qu'il faut lire. Cette idiotie se ramifie en deux sous-cas : soit A est prouvable et aucune fonction ne pouvant prendre de valeurs dans l'ensemble vide, $\neg A$ n'est pas prouvable. Soit A n'est pas prouvable et la fonction de graphe vide envoie bien les preuves de A – il n'y en a guère – dans $\emptyset$. Résultat des courses : en tant qu'ensemble de ses démonstrations, une proposition niée est soit $\emptyset$ (fausse), soit $\{\emptyset\}$ (vraie). Coup de pied de l'âne tarskiste, BHK retombe dans l'ornière de la Vérité essentialiste dans le cas des propositions « classiques » – i.e., équivalentes à leur double négation.

Digression : la méthode Al Capone. Bizarrement, ces logiciens qui s'accommodaient de propositions vides interdisaient le modèle vide. Il n'offre certes pas un intérêt palpitant – les $\forall$ y sont vrais et les $\exists$ faux – mais de là à le bannir... quel est donc son péché ? Il a le malheur de réfuter $\forall \Rightarrow \exists$, lointain descendant en calcul des prédicats du syllogisme foireux *Barbari* ; ce principe est dû à la présence de variables non déclarées, sortes de passagers clandestins des démonstrations. Mais, plutôt que rectifier cette (petite) erreur, les pères fondateurs de la Logique ont préféré faire disparaître le témoin génant : avec des semelles en béton au fond du lac Michigan ?

3.1.5 Normatif vs. aléthique

Cette régression est due à un mélange des genres : le cas de l'implication est *normatif*, celui de l'absurdité *aléthique* : le premier s'intéresse à la forme d'une démonstration – ici une fonction –, le second à son contenu « vériste », c'est pourquoi il n'y en pas pour $\mathbf{0}$. Il faut en fait distinguer deux types de preuve :

Normative : une notion générale de démonstration telle que toute proposition soit prouvable dans ce sens-là.

Aléthique : la petite minorité de celles déclarées *visibles*, aucune dans le cas de $\mathbf{0}$.

Une analogie informatique va nous aider. Les répertoires qui nous apparaissent comme vides ne le sont pas pour la machine ; la commande `ls -a` fait apparaître des fichiers cachés dont le nom commence par un point, e.g., `.DS_Store` et qui n'ont strictement aucun sens pour l'utilisateur. Cette absence de « sémantique » n'autorise cependant pas un administrateur zélé à vider totalement le répertoire : arracher ces « mauvaises herbes » pourrait causer un désastre écologique genre plantage de la machine.

La définition 14 semble due à cet administrateur fou ; admettons donc la présence de « démonstrations invisibles ». Reste à les identifier, ce qui revient à comprendre leur utilité qui ne se réduit pas à « éviter d'être 13 à table ». Elles correspondent au passage entre le formalisme hilbertien et sa version inspirée de BHK. Hilbert voit la forme à travers un système axiomatique dont les interdits se combinent de façon totalement opaque : c'est son côté prussien. Aucun système chez BHK, ce qui ne veut pas dire que tout y soit permis ; les démonstrations invisibles jouent le rôle de chiens de garde de la normativité. Par exemple, dans le cas de $A \Rightarrow B$, la fonction π devra aussi s'appliquer aux démonstrations invisibles de A, ce qui implique des contraintes.

Exemples de démonstrations invisibles, les tests. Tester une démonstation π de A revient à faire une coupure avec certaines démonstrations de $\neg A$ – ou plutôt l'*envers* $\sim A$. Et donc, comme il nous faut des tests pour A, il faut des démonstrations pour $\sim A$. Et comme toutes les propositions, niées ou non, doivent être logées à la même enseigne, il nous faut des tests pour $\sim A$ qui seront donc des démonstrations, le plus souvent invisibles, de $\sim\sim A = A$.

3.1.6 La rupture épistémologique, encore

La distinction entre aléthique et normatif consacre l'échec de la version essentialiste de la Logique. Pour Tarski et ses séides, elle tombait du Ciel au moyen de clauses du genre

Définition 15 (Vérité tarskiste)
$A * B$ est Vrai quand (A est Vrai) $*$ (B est Vrai).

où $* = \wedge, \vee, \Rightarrow$ [3], elle se place dans un monde balisé, i.e., une religion révélée où le raisonnement s'apparente à la réponse à un QCM.

L'irruption de la normativité rend visible, manifeste, ce préformatage. Du point de vue normatif, les démonstrations n'ont que faire de la vérité, elles s'intéressent uniquement à la *forme* du raisonnement. C'est seulement dans une seconde étape qu'on attribuera une valeur de vérité à ces démonstrations dont la plupart seront déclarées *invisibles*, i.e., aléthiquement irrecevables. Une valeur de vérité qui ne permet d'ailleurs pas de justifier les lapalissades tarskistes, puisque ce sont les démonstrations et non les propositions démontrées qui reçoivent une valeur.

Le monde logique est avant tout normatif. Cette normativité s'établit à travers un discussion – les tests de l'usine – qu'on peut *grosso modo* résumer par un dialogue entre A et son envers $\sim A$. Le but de l'interaction est de définir la forme de la table ; pour prendre une analogie judiciaire, pensons aux affrontements d'avocats dans les films américains : « – Objection your Honor. – Objection sustained/overruled. » dont l'enjeu est de déterminer si la question sera ou non posée. Et nullement de savoir lequel des deux a raison car un format n'est ni vrai ni faux, on l'accepte ou le refuse. Un troisième

3. Auxquels on pourrait ajouter « broccoli », histoire de s'amuser.

larron, le juge, a un pouvoir discrétionnaire, tarskiste si l'on veut, sur cette normativité. Mais on ne trouvera aucun juge ici : l'interaction entre A et $\sim A$ n'est soumise qu'à une seule contrainte, celle d'être consensuelle, un consensus qui s'exprime par un résultat stéréotypé, $[\![\, \text{を}(x) \,]\!]$, qui signifie à peu près « nous sommes tombés d'accord sur le format ».

Si le normatif s'attache à *récuser*, l'aléthique s'attache à *réfuter*. Au sein du format co-déterminé, un des deux participants, le protagoniste A ou le deutéragoniste $\sim A$ peut « gagner ».

Nous sommes très loin des approches « dialogiques » (Lorenzen & al.) qui se plaçaient dans un monde réduit à sa dimension aléthique où la normativité était externe. Brosses à reluire d'une Logique révélée, ces *sémantiques de jeu* se concentraient sur les stratégies gagnantes, sans jamais s'inquiéter des perdantes, qui devaient bien exister pourtant, sinon contre qui aurait-on gagné ? Reléguées à un contre-univers, un Enfer sémantique, elles auraient mérité une légalisation comme démonstrations invisibles.

3.2 La vérité si je mens !

3.2.1 Une distinction analytique

On divise les lieux de la ST en deux classes : les ordinaires ou *aléthiques* et les *normatifs*. La distinction (autrefois objectif/subjectif) provient de la nécessité de construire des desseins intégrant en leur sein des critères de correction – exemple typique, l'*ex nihilo quod libet*, section 4.1.3 –, lequels, n'étant ni vrais ni faux sont réputés normatifs, i.e., sans aucun sens vériste. Seule contrainte : un sous-lieu d'un normatif doit rester normatif. Ce qu'on peut réaliser au moyen d'une constante ν : tout lieu utilisant ν est réputé normatif. Si je veux rendre t normatif, il me suffit de le délocaliser en, disons, $t \cdot \nu$. Une étoile est dite *aléthique* (resp. *normative*) quand tous ses rayons le sont, *mixte* sinon.

Nous allons définir une sorte de mesure de vérité, le *poids*, à valeur dans $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ des étoiles et constellations de la ST.

Définition 16 (Poids)
Le poids *d'une étoile* $\sigma = [\![\, t_1, \ldots, t_n \,]\!]$ *est défini par :*

$$\begin{array}{lcll} \varpi(\sigma) & := & 2-n & (\sigma \text{ aléthique}) \\ \varpi(\sigma) & := & 0 & (\sigma \text{ normatif}) \\ \varpi(\sigma) & := & -\infty & (\sigma \text{ mixte}) \end{array}$$

Et celui d'une constellation $\mathcal{C}$ *par*

$$\varpi([\![\, \sigma_1, \ldots, \sigma_k \,]\!]) \;:=\; \varpi(\sigma_1) + \ldots + \varpi(\sigma_k)$$

Une constellation contenant une étoile mixte reçoit ainsi le poids $-\infty$. Sinon son poids est égal à $2N-n$ où N est le nombre de ses étoiles aléthiques et n le nombre de leurs rayons. Cette définition améliore la précédente qui donnait des poids finis aux étoiles mixtes : des complications sans véritable nécessité.

3.2.2 フ

フ (fu) est pratiquement identique à ヲ. Seule différence, ヲ est normatif alors que フ est aléthique. En termes de réseaux, フ s'écrit au moyen de ふ(x) (le hiragana fu), un rayon aléthique, contrairement à を(x), normatif.

3.2.3 Le gain

La strate normative nous a permis, en quelque sorte, de définir une règle du jeu par consensus. Reste à jouer : un dessein $\mathcal{D} \in \mathbf{C}$ est opposé à un *contre-dessein* $\mathcal{E} \in \vdash [\sim \mathbf{C}]$, ヲ d'où une coupure entre $\mathcal{D}$ (ou $!\mathcal{D}$) et $\mathcal{E}$ (définitions 4 et 6). Le contre-dessein $\mathcal{E}$ se prend alors pour un croupier et attribue un gain à $\mathcal{D}$: ce gain est la partie aléthique de l'interaction.

Définition 17
Le gain $\gamma_{\mathcal{E}}(\mathcal{D})$ *est par définition* $-\infty$ *si* $\mathcal{D}$ *comporte une étoile mixte. Sinon, considérons le* diagramme Δ *(section 2.1.2) de la normalisation de la coupure entre* $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{D}$ *(ou* $!\mathcal{D}$*) et dont le résultat est* $[\![$ を(x) $]\!]$. *Et soit* $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ *la constellation formée des sommets coloriés en* `rouge` *dans* Δ *; elle est donc constituée d'étoiles instanciées de* $\mathcal{D}$. *On définit* $\gamma_{\mathcal{E}}(\mathcal{D}) := \varpi(\mathcal{D}_{\mathcal{E}})$.

Le gain est une variation sur l'invariant d'Euler-Poincaré. Pour le comprendre, plaçons-nous dans le cas où $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ est purement aléthique et considérons $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$, la constellation formée des sommets coloriés en `cyan`, que l'on élague pour former $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}{}^{-}$, elle aussi aléthique. Il est facile de voir que $\varpi(\mathcal{D}_{\mathcal{E}})+\varpi(\mathcal{E}_{\mathcal{D}}{}^{-}) = 2$, soit le double de l'invariant d'Euler-Poincaré du graphe : les sommets (étoiles) `rouges` sont comptés deux fois dans $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}$, les `cyans` deux fois dans $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}{}^{-}$) et les arêtes deux fois, comme `rouge` et comme `cyan`. Le doublement de l'invariant sert à éviter des valeurs demi-entières.

3.2.4 La vérité

Définition 18 (Vérité)
$\mathcal{D}$*, dessein d'un comportement* $\mathbf{C}$*, est* vrai *(ou visible) quand son gain* $\gamma_{\mathcal{E}}(\mathcal{D})$ *est* ≥ 0 *quelque soit le contre-dessein* $\mathcal{E} \in \vdash [\sim \mathbf{C}]$, ヲ*.*

Un comportement $\mathbf{C}$ *est* vrai *quand il contient un dessein vrai.*

Rien ne s'oppose à ce que $\mathbf{C}$ et son envers soient tous deux vrais, c'est par exemple le cas des auto-duaux **ヲ** et **フ** ; mais l'envers n'est pas la négation.

3.2.5 Une question ouverte

Ma définition de la vérité peut être vue comme une sémantique des jeux où la règle, définie par consensus – i.e., orthogonalité – ne tomberait pas du Ciel. Avec le défaut des sémantiques, elle appartient au monde, synthétique *a priori*, de l'usage. Et reste donc inaccessible. Comment passer outre à cette limitation car on n'a pas fait tout ce chemin pour obtenir une sémantique de plus !

L'idée est de faire intervenir l'*usine*, autrement dit de remplacer $\vdash [\sim \mathbf{C}], \maltese$ par le surmoi $[\mathbf{C}] \vdash \maltese$. Mais il y a quelque chose à démontrer, à savoir qu'on peut choisir un surmoi fini représentatif. J'avoue n'avoir eu ni le temps ni l'énergie pour me pencher sérieusement sur cette question.

3.2.6 La cohérence

La vérité est cohérente, autrement dit :

Tout n'est pas vrai En effet, certains comportements comme $\mathbf{0}$ (*infra*, section 4.1.3) n'abritent aucun dessein vrai.

La vérité est stable par conséquence Autrement dit, si $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C} \multimap \mathbf{D}$ (ou $\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{D}$) sont vrais, alors $\mathbf{D}$ est vrai. Prenons, par exemple, une coupure non exponentiée. La fonction $\mathcal{F} \in \mathbf{C} \multimap \mathbf{D}$ appliquée à l'argument $\mathcal{A} \in \mathbf{C}$ produit le résultat $\mathcal{F}(\mathcal{A}) \in \mathbf{D}$; si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{A}$ sont vrais, il doit en être de même de $\mathcal{F}(\mathcal{A})$. Soit donc $\mathcal{B}$ un contre-dessein de $\vdash \sim \mathbf{D}, \maltese$.

On considère les desseins (définition 18) $\mathcal{F}_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}$ et $\mathcal{A}_{\mathcal{F}^*(\mathcal{B})}$ où $\mathcal{F}^*(\mathcal{B})$ dénote le contre-dessein de $\vdash \sim \mathbf{C}, \maltese$ obtenu par coupure entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{B}$. Il est immédiat que $\mathcal{F}(\mathcal{A})_{\mathcal{B}}$ est égal au résultat de la coupure entre les desseins $\mathcal{F}_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}$ et $\mathcal{A}_{\mathcal{F}^*(\mathcal{B})}$ susmentionnés. Ces deux desseins étant de poids nul, la somme $\mathcal{F}_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}} + \mathcal{A}_{\mathcal{F}^*(\mathcal{B})}$ a elle aussi un poids nul. Il suffit donc de démontrer que la normalisation de cette somme ne fait pas diminuer le poids. Les unifications ayant déjà été effectuées, elle utilise des réécritures sans unification

$$[\![t_1, \ldots, t_m, t]\!] + [\![u, u_1, \ldots, u_n]\!] \leadsto [\![t_1\theta, \ldots, t_m\theta, u_1\theta, \ldots, u_n\theta]\!]$$

Les cas normatif et aléthique se ramènent respectivement à $0 + 0 = 0$ et $2 - (m + n) = (2 - (m + 1)) + (2 - (n + 1))$.

4 Connecteurs logiques

Il est temps d'aborder la construction de comportements spécifiques, ce qui se ramène, pour l'essentiel à une liste de connecteurs. Il est facile de trouver des bases, donc je les omets.

4.1 Atomes

4.1.1 **ヲ** et **フ**

En tant que comportement, **ヲ** doit être délocalisée pour devenir **ヲ**$_{\mathtt{k}}$. Il admet un surmoi constitué de la seule constellation $[\![$ を$_{\mathtt{k}}(x)$, を(x) $]\!]$.

Idem pour **フ**, sinon qu'aucune délocalisation n'est nécessaire. Son surmoi est formé de la seule $[\![$ ふ(x), を(x) $]\!]$.

La constellation réduite à l'étoile $[\![$ を$_{\mathtt{k}}(x)$, ふ(x) $]\!]$ établit l'équivalence entre **フ** et **ヲ**. Mais il s'agit d'une équivalence normative qui reste invisible puisque $\varpi([\![$ を$_{\mathtt{k}}(x)$, ふ(x) $]\!]) = -\infty$.

Digression : le pivot J'ai dit que le pivot était ヲ mais il pourrait tout aussi bien être フ. Exterritorial, il ignore la distinction aléthique/normatif ; et n'apparaissant que dans les gardiens qui ne sont soumis à aucun impératif de vérité, la distinction avec フ n'a aucun intérêt ici. Faute d'avoir introduit un symbole spécifique pour le pivot, le choix évident est ヲ, plus neutre que フ du fait de l'absence de dimension normative.

4.1.2 1 et $\bot$

Ils ne donnent pas lieu à des comportements car ils n'ont aucune condition de possibilité. Mentionnons les *ersatz* $\forall \mathbf{X}\,(\mathbf{X} \multimap \mathbf{X})$ et $\exists \mathbf{X}\,(\mathbf{X} \otimes \sim\!\mathbf{X})$ qui peuvent pallier leur absence... dans les limites bien connues du second ordre.

4.1.3 0 et $\top$

On peut les définir au second ordre comme $\forall \mathbf{X}\,\mathbf{X}$ et $\exists \mathbf{X}\,\mathbf{X}$ mais il y a bien mieux :

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{0} & := & !(\text{フ} \parr \text{ヲ}) \otimes \text{ヲ} \\ \top & := & (\text{フ} \parr \text{ヲ}) \Rightarrow \text{ヲ} \end{array}$$

0 n'admet que des démonstrations invisibles : la composante $!($**フ** $\parr$ **ヲ**$)$ recoit en effet le poids $-\infty$.

Le principe important est le *ex nihilo quod libet*, autrement dit le séquent $\vdash \mathbf{C}, \top$ où $\mathbf{C}$ est un comportement arbitraire (*quod libet*). J'ai déjà traité ce principe dans d'autres articles mais c'est difficile à comprendre et je n'améliorerais pas mon cas avec une version rigoureuse plombée par l'illisibilité du formalisme. Je vais donc *expliquer* ce qu'il se passe de façon détaillée, avec la rigueur informelle chère à mon maître Kreisel ; seule concession au pédantisme, l'écriture $\mathsf{T} = (\text{フ} \parr \text{ヲ}') \Rightarrow \text{ヲ}''$ nécessaire pour distinguer les deux occurrences de ヲ : on cherche donc à prouver $\vdash \mathbf{C}, \underline{\text{フ} \otimes \text{ヲ}'}, \text{ヲ}''$.

Dans une première étape, remarquons que la base $\mathcal{B}$ de $\sim\mathbf{C}$ produit effectivement (en remplaçant ヲ par ヲ") un dessein $\mathcal{B}''$ de $\vdash \mathbf{C}, \text{ヲ}''$. Mais ce dessein a toutes chances d'être invisible, sauf si $\mathbf{C}$ est purement normatif, cas sans grand intérêt. Si $t_1, \ldots, t_k$ sont les rayons aléthiques de $\mathcal{B}''$, remplaçons-les par $\text{を}''(x) \cdot t_1, \ldots, \text{を}''(x) \cdot t_k$, ce qui donne une constellation $\mathcal{B}'$ purement normative, donc de poids nul. Reste à bâtir une tuyauterie permettant de retransformer, via coupure, $\mathcal{B}'$ en $\mathcal{B}''$. Elle se divise en deux parties, un raccord fourni par le gardien de service, $[\![\, \text{ふ}(x) \cdot y, \text{を}''(x) \cdot y \,]\!]$, et des durites $[\![\, t_i, \text{ふ}(x) \cdot t_i \,]\!]$, binaires et aléthiques, donc de poids nul. La solution est donc la somme $\mathcal{B}' + [\![\, t_1, \text{ふ}(x) \cdot t_1 \,]\!] + \ldots + [\![\, t_k, \text{ふ}(x) \cdot t_k \,]\!]$ elle aussi de poids nul. Je n'ai pas précisé la relation entre x et les t_i dans $\text{を}''(x) \cdot t_i$ ou $\text{ふ}(x) \cdot t_i$: x est tout simplement une des variables de t_i (cf. section 2.2.3).

4.1.4 Autres constantes

Les manuels mentionnent des « constantes propositionnelles » P, Q, R parfaitement interchangeables et auxquelles il serait vain d'associer de quelconques comportements. P, Q, R sont en fait des variables du second ordre implicitement quantifiées universellement. Par exemple, $P \Rightarrow P$ signifie en réalité $\forall X\, (X \Rightarrow X)$; et si l'on ne peut pas prouver $P \Rightarrow Q$ c'est qu'il a le sens de $\forall X\, \forall Y\, (X \Rightarrow Y)$. En d'autres termes, ces constantes sont une façon d'utiliser un second ordre limité, restreint à sa partie universelle ; en évitant donc $\exists X$, délicat à manier. Ces constantes – ou plutôt leurs cousines, du calcul des prédicats $P(\cdot), Q(\cdot), R(\cdot)$ apparaissent dans la pratique lors de l'axiomatisation de l'algèbre, activité éminemment louable mais totalement étrangère à la Logique proprement dite.

4.2 Connecteurs multiplicatifs

D'abord un pinaillage bureaucratique : quel est le support d'une combinaison $\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}$ ou $\mathbf{C} \parr \mathbf{D}$? Deux solutions possibles, avec chacune ses avantages et ses limites :

— Soit on campe sur la position du support unique $s[x]$. Auquel cas on procède du plus complexe vers le plus simple : $\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}$ est localisé en $s[x]$, et ses sous-formules $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ dans les sous-lieux respectifs $s[x \cdot \mathtt{g}]$ et $s[x \cdot \mathtt{d}]$ où $\mathtt{g}, \mathtt{d}$ (gauche, droite) servent à distinguer des sous-lieux disjoints. C'est une approche plutôt spirituelle.

— Soit $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ ont des supports $\mathbf{s} = \{s_1, \ldots, s_m\}$ et $\mathtt{t} = \{t_1, \ldots, t_n\}$ disjoints et l'on place $\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}$ sur le support multiple $\mathbf{s} \cup \mathbf{t}$. Il s'agit d'une approche locative, de loin la meilleure si l'on veut remplacer les fastidieux diagrammes catégoriques par des égalités.

Tout ça ne changeant rien à l'essentiel, i.e., le contenu spirituel, choisissons donc la seconde option, moins pénible à écrire. Soient donc $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ des comportements localisés en $s[x]$ et $t[x]$, simples et disjoints.

4.2.1 $\mathbf{C} \parr \mathbf{D}$

$\mathbf{C} \parr \mathbf{D}$ n'est autre que le séquent $\vdash \mathbf{C}, \mathbf{D}$. Son surmoi $[\mathbf{C} \parr \mathbf{D}] \vdash \text{ヲ}$ est donc formé des :

gauche : $\mathcal{G} + \mathcal{J}^-$ pour $\mathcal{G} \in \mathbf{C} \vdash \text{ヲ}$ et $\mathcal{J} \in \mathbf{D} \vdash \text{ヲ}$.

droite : $\mathcal{G}^- + \mathcal{J}$ pour $\mathcal{G} \in \mathbf{C} \vdash \text{ヲ}$ et $\mathcal{J} \in \mathbf{D} \vdash \text{ヲ}$.

Gauche : $\mathcal{G} + !\mathcal{J}^-$ pour $\mathcal{G} \in \underline{\mathbf{C}} \vdash \text{ヲ}$ et $\mathcal{J} \in \mathbf{D} \vdash \text{ヲ}$.

Droite : $!\mathcal{G}^- + \mathcal{J}$ pour $\mathcal{G} \in \mathbf{C} \vdash \text{ヲ}$ et $\mathcal{J} \in \underline{\mathbf{D}} \vdash \text{ヲ}$.

La dichotomie gauche/droite (ou Gauche/Droite) correspond aux positions éponymes des interrupteurs des réseaux multiplicatifs : $\mathcal{J}^-$ correspond à une prémisse droite dont on « ferme » la conclusion.

4.2.2 $\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}$

Le surmoi $[\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}] \vdash \text{ヲ}$ est formé de deux types de gardiens.

D'une part, ceux obtenus à partir des surmois respectifs $[\mathbf{C}] \vdash \text{ヲ}$ et $[\mathbf{D}] \vdash \text{ヲ}$ par *fusion* de pétioles. Ce qui se justifie (informellement, il faudrait délocaliser les ヲ) par

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{G}\\ \vdots\\ \mathbf{C} \vdash \text{ヲ}\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{J}\\ \vdots\\ \mathbf{D} \vdash \text{ヲ}\end{array} \quad \dfrac{}{\text{ヲ}, \text{ヲ} \vdash \text{ヲ}}}{\mathbf{D}, \text{ヲ} \vdash \text{ヲ}}}{\mathbf{C}, \mathbf{D} \vdash \text{ヲ}}}{\mathbf{C} \otimes \mathbf{D} \vdash \text{ヲ}}
$$

Concrètement on fusionne deux chiens (ou deux cerbères) en formant leur union ; problème on a deux pétioles, $[\![\, a_1, \ldots, a_m, \text{を}(x) \,]\!]$ et $[\![\, b_1, \ldots, b_n, \text{を}(x) \,]\!]$ (j'ai choisi le même x) que l'on remplace par $[\![\, a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n, \text{を}(x) \,]\!]$.

D'autre part, $s \smile t := [\![\, s[y \cdot (y \cdot z)], t[z \cdot (y \cdot z)] \,]\!] + [\![\, \text{を}(x) \,]\!]$, le cerbère singulier introduit section 2.2.4.

Reste à montrer que $\otimes$ est l'envers de $\parr$, i.e., que si $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ sont les envers respectifs de $\mathbf{E}, \mathbf{F}$, $\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}$ est l'envers de $\mathbf{E} \parr \mathbf{F}$. Tout se ramène au cas des séquents (section 2.4) au moyen de propriétés du genre :

Proposition 1
Un dessein $\mathcal{A} \in \mathbf{C} \otimes \mathbf{D}$ *s'écrit* $\mathcal{C} + \mathcal{D}$ *où* $\mathcal{G} \in \mathbf{C}$ *et* $\mathcal{J} \in \mathbf{D}$.

Démonstration : La présence de $s \smile t$ dans le surmoi $\underline{\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}} \vdash \text{ヲ}$ assure qu'aucune étoile de $\mathcal{A}$ ne combine des sous-lieux de $s[x]$ et $t[x]$; d'où la décomposition $\mathcal{A} = \mathcal{C} + \mathcal{D}$ comme somme de deux desseins de support respectifs $s[x]$ et $t[x]$. Il est alors facile de voir que $\mathcal{C} \in \mathbf{C}$ et $\mathcal{D} \in \mathbf{D}$. $\square$

4.3 Exponentielles

Les exponentielles n'existent que sous forme combinée : ce sont des « ions logiques ». Cette particularité tient à la difficulté de leur attacher un pétiole. Dans $!\,\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}$ et $?\,\mathbf{C} \parr \mathbf{D}$, c'est $\mathbf{D}$ qui s'occupe du pétiole.

4.3.1 $?\,\mathbf{C} \parr \mathbf{D}$

Le surmoi reprend, *mutatis mutandis*, les positions « droite » et « Droite » du cas $\mathbf{C} \parr \mathbf{D}$:

droite : $!\,\mathcal{G}^- + \mathcal{J}$ pour $\mathcal{G} \in \mathbf{C} \vdash \text{ヲ}$ et $\mathcal{J} \in \mathbf{D} \vdash \text{ヲ}$.

Droite : $!\,!\,\mathcal{G}^- + \mathcal{J}$ pour $\mathcal{G} \in \mathbf{C} \vdash \text{ヲ}$ et $\mathcal{J} \in \underline{\mathbf{D}} \vdash \text{ヲ}$.

4.3.2 $!\,\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}$

Le surmoi est formé de $s \smile t$ et des fusions entre gardiens $\mathcal{G} \in [\mathbf{C}] \vdash \text{ヲ}$ et $\mathcal{J} \in [\mathbf{D}] \vdash \text{ヲ}$ de même type (tous deux chiens ou tous deux cerbères). $\mathcal{G}$ doit auparavant être exponentié : problème, nous n'avons pas prévu (définition 5) la présence d'un pétiole. Qu'importe, admettons le remplacement (temporaire) de $[\![\, s[t_1], \ldots, s[t_m], \text{を}(x) \,]\!]$ par $[\![\, s[t_1 \cdot Z], \ldots, s[t_m \cdot Z], \text{を}(x \cdot Z) \,]\!]$, impossible à raccorder directement avec $[\![\, b_1, \ldots, b_n, \text{を}(x) \,]\!]$. On choisit donc deux valeurs de Z, la variable x et une constante quelconque $\mathtt{k}$:

$Z = x$ **:** la fusion produit $[\![\, s[t_1 \cdot x], \ldots, s[t_m \cdot x], b_1, \ldots, b_n, \text{を}(x) \,]\!]$.

$Z = \mathtt{k}$ **:** la fusion produit $[\![\, s[t_1 \cdot \mathtt{k}], \ldots, s[t_m \cdot \mathtt{k}], b_1, \ldots, b_n, \text{を}(x) \,]\!]$.

L'analogue de la proposition 1 s'énonce ainsi

Proposition 2
Un dessein incarné *(voir démonstration)* $\mathcal{A} \in !\,\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}$ *s'écrit* $!\,\mathcal{C} + \mathcal{D}$ *où* $\mathcal{C} \in \mathbf{C}$ *et* $\mathcal{D} \in \mathbf{D}$.

Démonstration : On n'a pas vraiment le droit d'écrire $を(x \cdot Z)$ mais on se le donne dans ce contexte limité. Une fois la décomposition $\mathcal{A} = \mathcal{C}' + \mathcal{D}$ actée, on est ramené à tester $\mathcal{C}'$ par un gardien $!\mathcal{G}$ qui contient un pétiole hétérodoxe utilisant $を(x \cdot Z)$. On sait que, pour les valeurs x et $\mathtt{k}$ le test réussit et produit la forme normale $[\![\, を(x \cdot x\,]\!])$ ou $[\![\, を(x \cdot \mathtt{k})\,]\!]$; ces deux formes normales ont un cas particulier commun $[\![\, を(\mathtt{k} \cdot \mathtt{k})\,]\!]$, ce qui permet de conclure que le test originel (avec Z) donne la forme normale $[\![\, を(x \cdot Z)\,]\!]$. Autrement dit, $\mathcal{C}'$ contient un sous-dessein de la forme $!\mathcal{C}$. À vrai dire, il pourrait contenir des étoiles complètement ignorées par les tests, d'où la restriction « incarné » qui signifie que toutes les étoiles de $\mathcal{A}$ sont utilisées par les tests, une hypothèse utile qui ne coûte pas grand-chose. $\square$

4.3.3 Une divine surprise

J'ai tardivement découvert le rôle néfaste des systèmes, sectes protectrices et étouffantes. Aucun système (sérieux) n'acceptera l'implication intuitionniste $A \otimes B \Rightarrow A$ (et donc $!(A \otimes B) \multimap\, !A \otimes\, !B$ qu'on n'a pas le droit d'écrire). Et pourtant ce principe est accepté par la ST, i.e., par les réseaux de démonstration. Depuis une petite dizaine d'années, j'ai tenté de trouver un critère refusant ce principe : en vain. Pour découvrir, y compris dans ma méthodologie, la prégnance de l'essentialisme : les systèmes, l'axiomatique, la sémantique, approches pourtant nullement indignes, outrepassent leurs droits sur la Logique.

Je vais aller plus loin et critiquer le sacro-saint calcul des séquents, découverte absolument géniale de Gentzen dont il faut cependant relativiser l'universalité. Le format $\vdash \underline{\Gamma},\ \Delta$, avec Δ non vide fonctionne très bien. De plus les étoiles de la ST sont des séquents délogicalisés donc où est le problème ?

Tout simplement que $A \otimes B \Rightarrow A$ pose la question d'une modification du calcul – sa gestion des « règles structurelles » – pour accepter ce principe. Pas mal de transpiration en perspective mais dans quel but ? Gentzen rompait avec les systèmes « à la Hilbert » pour en produire un avec des propriétés étonnantes, cette élimination des coupures tant vantée. Que l'on a en fait nul besoin d'effectuer *dans* le système : elle pourrait être le fait d'une machine à laquelle on a fourni les séquents, lesquels, devenus étoiles et constellations, se normalisent. On peut donc se contenter d'enchaîner des « axiomes » genre $A \otimes B \Rightarrow A$ pourvu qu'on les ait préalablement justifiés en termes de ST L'approche ringardisée « Axiomes + *Modus Ponens* » garde finalement son intérêt, pourvu qu'on l'utilise de façon *ouverte*, i.e., dans une optique de « système expert », de collection de recettes de cuisine permettant d'accéder à un substrat rigoureux mais souvent illisible.

4.4 Additifs

4.4.1 Synchrone et asynchrone

Nous proposons un traitement *synchrone* des additifs. Ce qui veut dire que l'élimination des coupures peut être retardée dans l'attente d'une donnée, i.e., d'une autre coupure. Le cas typique est fourni, en déduction naturelle, par la règle $(\vee E)$ d'élimination de la disjonction :

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ C\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A\vee B\end{matrix}\quad \begin{matrix}[A]\\ \vdots\\ C\Rightarrow D\end{matrix}\quad \begin{matrix}[B]\\ \vdots\\ C\Rightarrow D\end{matrix}}{C\Rightarrow D}\,(\vee E)}{D}\,(\Rightarrow E) \tag{13}$$

qui retarde de fait la normalisation d'une possible coupure avec la règle $(\Rightarrow E)$. La version *asynchrone* consiste à anticiper cette situation au moyen d'une permutation de règles : on remplace (13) par (14) :

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A\vee B\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ C\end{matrix}\quad \begin{matrix}[A]\\ \vdots\\ C\Rightarrow D\end{matrix}}{D}\,(\Rightarrow E) \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ C\end{matrix}\quad \begin{matrix}[B]\\ \vdots\\ C\Rightarrow D\end{matrix}}{D}\,(\Rightarrow E)}{D}\,(\vee E) \tag{14}$$

Cette transformation est une *réduction commutative* au sens de Prawitz ; mais elle ne réduit rien du tout car on ne peut pas lui donner de sens analytique. Mon article [7] est une tentative de solution asynchrone au problème ; je dis *tentative* car basée sur une profonde modification de la ST dont j'avoue n'avoir pas exploré toutes les implications techniques. Il s'agit d'une piste ouverte à la machette qui pourrait réserver des surprises lors de sa véritable mise en service. Et qui n'a donc pas sa place dans cet article dont l'ambition est de présenter une approche cohérente et rigoureuse à des travaux pour la plupart anciens que le miraculeux $\exists$ permet d'assembler.

Je vais donc présenter une version synchrone, autrement dit avec des coupures retardées (ou cachées si l'on préfère). De façon étonnante, ce qui n'était au départ qu'un pis-aller se comporte remarquablement bien.

Digression : les automatismes Dans ma jeunesse où le téléphone était un luxe, les abonnés le faisaient installer dans leur entrée dépourvue de siège. On ne pouvait pas, en cas d'urgence (décès, naissance), refuser son usage à un voisin tout en le confinant dans un sas inconfortable. Cette habitude a persisté dans les années 1970 alors que la pénurie de téléphones avait cessé.

De même, l'idée d'un système de règles – celles des séquents – qu'on interprète en ST est une survivance pavlovienne du réalisme axiomatique : la ST dépasse la distinction obsolète signifiant/signifié au moyen d'une approche qui réconcilie langage et interprétation. Et donc nul besoin de dire, par exemple, comment j'interprète les règles des connecteurs additifs. Admettons que cela puisse aider à comprendre, mais cette question ne répond à aucune exigence logique.

4.4.2 C & D

La différence entre « $\otimes$ » et « & » étant traditionnellement expliquée par la gestion du contexte – juxtaposition ou superposition – on peut être curieux de voir comment on va s'en tirer dans le cas additif ! En effet, le contexte a été théoriquement réduit au seul $\maltese$.

Localisé en $s[x]$, $\mathbf{C}$ & $\mathbf{D}$ utilise cinq sous-supports $C[x], c[x], e[x], d[x], D[x]$, par exemple $C[x] := s[x \cdot \mathtt{C}], c[x] := s[x \cdot \mathtt{c}]$. L'idée est qu'un dessein de $\mathbf{C}$ & $\mathbf{D}$ est moralement de la forme $\mathcal{C} + \mathcal{D}$ avec $\mathcal{C} \in \mathbf{C}$ et $\mathcal{D} \in \mathbf{D}$, mais dans un futur indéfini car ces deux desseins sont présentés sous une forme schizophrène : deux morceaux qu'il faudra réunir (par coupure).

En fait, $e[x]$ contient une *clef* commune, qui peut servir, au choix, à reconstituer $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{D}$. La partie principale de $\mathcal{C}$ est répartie entre les supports $C[x]$ et $c[x]$; on peut donc utiliser la clef pour relier $e[x]$ et $c[x]$ (délocalisation et coupure). Mais aussi pour relier $e[x]$ et $d[x]$ afin d'activer l'autre morceau de $\mathcal{D}$, réparti entre les supports $D[x]$ et $d[x]$.

Un cas extrême est celui où les supports $c[x], e[x], d[x]$ ne sont pas du tout utilisés, auquel cas $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont déjà sous leur forme définitive.

Mais on ne peut pas recoller $e[x]$ à $c[x]$ et $d[x]$ « en même temps », du moins de manière interne ; ce recollage impossible est un analogue de la fameuse réduction commutative.

Le surmoi se divise en deux parties.

D'une part, les $C \smile e, C \smile d, C \smile D, c \smile e, c \smile d, c \smile D, e \smile d, e \smile D$: ils garantissent que la clef (partie de support $e[x]$) est isolée, tout comme les groupes $C[x], c[x]$ et $d[x], D[x]$.

D'autre part des gardiens hérités de ceux de $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$.

gauche : $\mathcal{G} + [\![c[x], e[x]]\!]$ pour $\mathcal{G} \in \mathbf{C} \vdash \maltese$.

droite : $\mathcal{J} + [\![e[x], d[x]]\!]$ pour $\mathcal{J} \in \mathbf{D} \vdash \maltese$.

Gauche : $\mathcal{G} + ![\![c[x], e[x]]\!]$ pour $\mathcal{G} \in \underline{\mathbf{C}} \vdash \maltese$.

Droite : $\mathcal{J} + ![\![e[x], d[x]]\!]$ pour $\mathcal{J} \in \underline{\mathbf{D}} \vdash \maltese$.

Le critère de correction « gauche » revient à raccorder les deux morceaux du potentiel $\mathcal{C}$ pour en faire un dessein de base $C[x]$ qu'on teste au moyen de $\mathcal{G}$.

Digression : une vieille objection Le principal argument contre la version synchrone est qu'une $(\vee E)$ peut cacher une coupure « vicieuse », i.e., dont l'élimination divergera plus tard ; d'où la réduction commutative qui résoud le problème en explicitant les coupures cachées. Ici, la réduction commutative est effectuée en quelque sorte par le critère de correction : la juxtaposition des cas « gauche/droite » (ou « Gauche/Droite ») est une sorte de réduction commutative virtuelle. La ST additive s'inspire largement des « boîtes » de la LL, avec une différence au niveau du critère de correction : ici on ouvre la boîte pour la remplacer par sa partie, disons gauche. La version originelle n'établissait aucun contact entre intérieur et extérieur de la boîte ; mais il faut faut dire qu'elle ne se souciait que de *séquentialisation*, une thématique désormais dépassée.

Je n'ai pas donné l'interprétation de la règle :

$$\frac{\begin{array}{c}\mathcal{C}\\ \vdots\\ \vdash \mathbf{C}, \underline{\mathbf{\Pi}}, \mathbf{\Gamma}\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \vdots\\ \vdash \mathbf{D}, \underline{\mathbf{\Pi}}, \mathbf{\Gamma}\end{array}}{\vdash \mathbf{C} \,\&\, \mathbf{D}, \underline{\mathbf{\Pi}}, \mathbf{\Gamma}} \tag{15}$$

Car, comme je l'ai expliqué plus haut, le connecteur vit sans qu'on ait besoin de débuter par ce principe. Ceci dit, nous avons tous été élevés dans l'idéologie signifiant/signifié, i.e., dans le réalisme axiomatique, et cette règle est un point de départ : quand on monte a vélo, on débute avec de petites roulettes, donc revissons les roulettes. Le contexte apparaît trois fois, deux comme hypothèse, une comme conclusion. Il est donc délocalisé trois fois, en $c[x]$, $d[x]$ (hypothèses) et $e[x]$ (conclusion) ; ainsi les localisations $\pi_i(x)$ et $\gamma_j(x)$ de $\underline{\Pi}, \Gamma$ deviennent-elles des $e[\pi'_i(x)]$ et $e[\gamma'_j(x)]$. Soient $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{D}'$ les versions délocalisées de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$; le dessein construit par la règle n'est autre que

$$\mathcal{C}' + \mathcal{D}' + \ldots [\![\, e[\pi'_i(x)], \pi_i(x) \,]\!] + \ldots + [\![\, e[\gamma'_j(x)], \gamma_j(x) \,]\!] + \ldots$$

4.4.3 $\mathbf{C} \oplus \mathbf{D}$

Les cinq sous-supports (hérités par dualité du cas du « & ») sont utilisés ainsi : une étoile $[\![\, c[x], e[x] \,]\!]$ ou $[\![\, e[x], d[x] \,]\!]$ permet de choisir entre « gauche » et « droite ». Et selon le cas, un dessein de $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{D}$ est positionné en $C[x]$ ou $D[x]$. Voilà l'idée, qui donne lieu au test suivant, où $\mathcal{C} \in [\mathbf{C}] \vdash$ ヲ et $\mathcal{D} \in [\mathbf{D}] \vdash$ ヲ on été délocalisés, $を(x)$ étant remplacé, selon le cas, par $c[x]$ ou $d[x]$; soient donc $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{D}'$ ces versions délocalisés. Le test est défini comme :

$$\mathcal{C}' + \mathcal{D}' + [\![\, e[x], を(x) \,]\!] \tag{16}$$

On voit que son action consiste, si le dessein $\mathcal{E}$ à « gardienner » contient bien un $[\![\, c[x], e[x] \,]\!]$ ou un $[\![\, e[x], d[x] \,]\!]$, à tester sa partie de support $C[x]$ (resp. $D[x]$) par $\mathcal{C}$ (ou $\mathcal{D}$). Tout le reste relève de la routine, mais il reste un point de nature morphologique à clarifier : comment s'assurer que le dessein testé est bien de la forme attendue ? Nous sommes amenés à utiliser des cerbères pour garantir qu'aucune étoile de $\mathcal{E}$ n'est à cheval sur deux sous-supports, à l'exception de $[\![c[x], e[x]]\!]$ ou de $[\![e[x], d[x]]\!]$; et que, surtout, $\mathcal{E}$ contient une de ces deux étoiles.

Le test (16) garantit que $\mathcal{E}$ contient une étoile $[\![e[x], \dots]\!]$. Pour dire que $e[x]$ n'est pas isolé dans cette étoile, on invoque le cerbère singulier $[\![e[x \cdot \mathtt{k}]]\!] + [\![\text{を}(x)]\!]$. Pour dire qu'il est en compagnie de $c[x]$ (ou $d[x]$), on invoque
$[\![c[f(x) \cdot \mathtt{k}]]\!] + [\![e[f(x) \cdot \mathtt{k}], \text{を}(x)]\!] + [\![d[f(x) \cdot \mathtt{k}]]\!]$ et
$[\![c[f'(x) \cdot \mathtt{k}]]\!] + [\![e[f'(x) \cdot x\mathtt{k}], \text{を}(x)]\!] + [\![d[f'(x) \cdot \mathtt{k}]]\!]$,
où f et f' sont deux lettres de fonction unaires. C'est un peu de la cuisine, mais les cerbères ne sont pas choisis pour leur élégance.

4.4.4 Une autre surprise

Un des (petits) défauts de la LL est que la disjonction additive « $\oplus$ » ne correspond pas exactement à la disjonction intuitionniste « $\vee$ ». Il s'agit d'une erreur de jeunesse, commise au tout début par la traduction

$$A \vee B := !A \oplus !B \tag{17}$$

Tout cela dû aux « petites roulettes » de la sémantique cohérente sans laquelle il n'y aurait jamais eu de LL. Mais, comme je l'ai déjà dit, il faut savoir se débarrasser de ses petites roulettes. Examinons-donc le principe $!(A \oplus B) \vdash !A \oplus !B$. Que je n'ai pas le droit d'écrire à cause des restrictions sur l'emploi de « ! » mais qui a un sens tout à fait clair, par exemple celui du séquent

$$(A \Rightarrow C) \ \& \ (B \Rightarrow C) \vdash (A \oplus B) \Rightarrow C \tag{18}$$

qui établit l'identité entre $\vee$ et $\oplus$.

Sans rentrer dans des détails pédants, cela se ramène techniquement à la chose suivante : à partir de $\mathcal{C} \in \ \vdash \underline{\mathbf{C}}, \text{ヲ}$ et $\mathcal{D} \in \ \vdash \underline{\mathbf{D}}, \text{ヲ}$, construire $\mathcal{E} \in \ \vdash \underline{\mathbf{C} \ \& \ \mathbf{D}}, \text{ヲ}$. Ce qui se fait ainsi :

1. Délocaliser les ヲ de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ en $c[x]$ et $d[x]$, résultat $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{D}'$.
2. Effectuer les remplacements $c[x] \rightsquigarrow c[x \cdot \mathtt{k}]$ et $d[x] \rightsquigarrow d[x \cdot \mathtt{k}]$ dans $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{D}'$ qui deviennent $\mathcal{C}''$ et $\mathcal{D}''$.
3. $\mathcal{E} := \mathcal{C}'' + \mathcal{D}'' + [\![e[x \cdot \mathtt{k}], \text{を}(x)]\!]$.

4.5 Quantification

Je me restreins à la quantification (propositionnelle) du second ordre qui transforme un comportement paramétrique $\mathbf{C}[\mathbf{X}, \sim\mathbf{X}]$ en comportement $\forall\mathbf{X}\,\mathbf{C}[\mathbf{X}, \sim\mathbf{X}]$ ou $\exists\mathbf{X}\,\mathbf{C}[\mathbf{X}, \sim\mathbf{X}]$. Un cas qui n'épuise pas le sujet, mais de loin le plus riche.

Ce qui suit simplifie et remplace mes diverses ébauches, notamment [3], trop compliquées et incomplètes.

4.5.1 $\forall\mathbf{X}\,\mathbf{C}[\mathbf{X}, \sim\mathbf{X}]$

On utilise cinq sous-supports : $C[x], v[x], w[x], \tilde{v}[x], \tilde{w}[x]$, où $v[x], w[x], \tilde{v}[x]$ et $\tilde{w}[x]$ sont déclarés normatifs. $v[x], w[x]$ permettent de loger $!(\mathbf{X} \parr \Finv)$ alors que $\tilde{v}[x], \tilde{w}[x]$ loge $!(\sim\mathbf{X} \parr \Finv)$. L'idée fondamentale est de remplacer $\mathbf{C}[\mathbf{X}, \sim\mathbf{X}]$ (logé en $C[x]$) par $((\mathbf{X} \parr \Finv) \otimes (\sim\mathbf{X} \parr \Finv)) \Rightarrow \mathbf{C}[\mathbf{X}, \sim\mathbf{X}]$. La prémisse $!(\mathbf{X} \parr \Finv) \otimes (!\sim\mathbf{X} \parr \Finv)$ facilite bien des choses ; mais elle est à utiliser avec parcimonie car elle a tendance à produire des desseins invisibles !

Les gardiens pour $\forall\mathbf{X}\,\mathbf{C}[\mathbf{X}, \sim\mathbf{X}]$ sont obtenus en sélectionnant une *valeur* $\mathbf{X}_i$ parmi les trois suivantes :

$\mathbf{X}_1 = \Finv$ et donc $\sim\mathbf{X}_1 = \Finv$.

$\mathbf{X}_2 = \Finv \otimes \Finv$ et donc $\sim\mathbf{X}_2 = \Finv \parr \Finv$.

$\mathbf{X}_3 = \Finv \parr \Finv$ et donc $\sim\mathbf{X}_3 = \Finv \otimes \Finv$.

puis en choisisant un gardien dans

$$[((\mathbf{X}_i \parr \Finv) \otimes (\sim\mathbf{X}_i \parr \Finv)) \Rightarrow \mathbf{C}[\mathbf{X}_i, \sim\mathbf{X}_i]] \vdash \Finv$$

Donnons trois exemples emblématiques : $\mathbf{X}$, $\mathbf{X} \parr \mathbf{X}$ et $\sim\mathbf{X} \parr \mathbf{X}$. Qu'on notera $\mathbf{X}'$, $\mathbf{X}' \parr \mathbf{X}''$ et $\sim\mathbf{X}' \parr \mathbf{X}''$ pour tenir compte des délocalisations de la variable $\mathbf{X}$. $\mathbf{X}'$ et $\mathbf{X}''$ sont supposés de supports respectifs $s[\mathtt{x}' \cdot x]$ et $s[\mathtt{x}'' \cdot x]$.

$\forall\mathbf{X}\,\mathbf{X}'$: tous les desseins de $\forall\mathbf{X}\,\mathbf{X}$ contiennent le rayon $s[\mathtt{x}' \cdot x]$ qui doit être fatalement combiné à un rayon de support $v[x], w[x], \tilde{v}[x]$ ou $\tilde{w}[x]$, donc normatif, au sein d'une étoile forcément invisible. Mais $\forall\mathbf{X}\,\mathbf{X}$ est loin d'être vide ; ainsi, si $\mathtt{k}$ est une constante, il contient $\llbracket\, s[\mathtt{x}' \cdot x], \tilde{v}[x \cdot \mathtt{k}]\,\rrbracket + \llbracket\, \tilde{w}[x \cdot \mathtt{k}]\,\rrbracket$.

Rappelons que $\forall\mathbf{X}\,\mathbf{X}$ est la traduction au second ordre de la constante additive $\mathbf{0}$. Cette quantification universelle sur toutes les propriétés rappelle l'« argument ontologique » ; pas étonnant qu'elle représente l'absurdité !

$\forall\mathbf{X}\,(\mathbf{X}' \parr \mathbf{X}'')$: un dessein $\mathcal{C}$ visible de $\forall\mathbf{X}\,(\mathbf{X} \parr \mathbf{X})$ contiendrait l'étoile $\llbracket\, s[\mathtt{x}' \cdot x], s[\mathtt{x}'' \cdot x]\,\rrbracket$; conflit avec la valeur $\mathbf{X}_2$, un cycle en termes de réseaux.

Nombreux desseins invisibles, typiquement, si $\mathtt{k}, \mathtt{l}$ sont des constantes : $[\![\, s[\mathtt{x}' \cdot x], \tilde{v}[x \cdot \mathtt{k}] \,]\!] + [\![\, \tilde{w}[x \cdot \mathtt{k}], \tilde{w}[x \cdot \mathtt{l}] \,]\!] + [\![\, \tilde{v}[x \cdot \mathtt{l}], s[\mathtt{x}'' \cdot x] \,]\!]$.

$\forall \mathbf{X}\, (\sim\!\mathbf{X}' \parr \mathbf{X}'')$: comme le cas précédent, sinon que $\mathcal{C} = [\![\, s[\mathtt{x}' \cdot x], s[\mathtt{x}'' \cdot x] \,]\!]$ est maintenant accepté, ce qui correspond à la prouvabilité de $\forall \mathbf{X}\, (\mathbf{X} \multimap \mathbf{X})$, traduction au second ordre de la défunte constante multiplicative $\mathbf{1}$.

Les valeurs $\mathbf{X}_2$ et $\mathbf{X}_3$ sont utilisées pour restreindre les couplages possibles à la paire $\mathbf{X}$,$\sim\!\mathbf{X}$ (avec le même $\mathbf{X}$). La valeur $\mathbf{X}_1$ sert à éviter un gag, celui de $\mathcal{D} = [\![\, s[\mathtt{x}' \cdot (\mathtt{g} \cdot x)], s[\mathtt{x}'' \cdot (\mathtt{g} \cdot x)] \,]\!] + [\![\, s[\mathtt{x}' \cdot (\mathtt{d} \cdot x)], s[\mathtt{x}'' \cdot (\mathtt{d} \cdot x)] \,]\!]$, formé des seules lamelles de $[\![\, s[\mathtt{x}' \cdot x], s[\mathtt{x}'' \cdot] \,]\!]$ sollicitées par $\mathbf{X}_2$ et $\mathbf{X}_3$.

4.5.2 $\exists \mathbf{X}\, \mathbf{C}[\mathbf{X},\sim\!\mathbf{X}]$

C'est le point le plus délicat de la construction, celui pour lequel je n'avais jamais donné de réponse vraiment satisfaisante.

La règle du quantificateur existentiel s'interprète ainsi : étant donnés des comportements $\mathbf{D}$ et $\sim\!\mathbf{D}$ de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$ et un dessein $\mathcal{E} \in \mathbf{C}[\mathbf{D},\sim \mathbf{D}]$, on construit $!\,\tilde{\mathcal{B}} + !\,\mathcal{B} + \mathcal{C}$ où $\tilde{\mathcal{B}}$ (resp. $\mathcal{B}$) a été exponentié et délocalisé à cheval sur $v[x]$ et $w[x]$ (resp. $\tilde{v}[x]$ et $\tilde{w}[x]$).

Tout semble fonctionner pour le mieux : le quantificateur existentiel réfère à un comportement vu, non pas comme un surmoi $\mathbf{D} \vdash \,\reflectbox{$\forall$}$, mais comme son bi-orthogonal $\vdash \sim\!\mathbf{D}, \reflectbox{$\forall$}$ (ainsi que son envers $\vdash \sim\!\mathbf{D}, \reflectbox{$\forall$}$). Cette quantification sur des ensembles de desseins égaux à leur biorthogonal rappelle celle sur les *candidats de réductibilité* du système $\mathbb{F}$: cet article testamentaire referme en quelque sorte la boucle !

Mais il y a un *hic* : le travail de 1970 se situait dans le cadre d'un système qui fournissait une sorte d'usine. Rien de tel ici car on serait en mal d'en trouver une digne de ce nom, i.e., qui soit finie.

Prenons l'exemple de l'envers de $\mathbf{nat} := \forall \mathbf{X}\, ((\mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{X}) \Rightarrow (\mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{X}))$, i.e., $\exists \mathbf{X}\, (!(\mathbf{X} \multimap \mathbf{X}) \otimes (\mathbf{X} \otimes \sim\!\mathbf{X}))$. Les chiens de ce comportement seraient des desseins de $\mathbf{nat} \parr \reflectbox{$\forall$}$, lequels, par élagage, produiraient des éléments de $\mathbf{nat}$. Il se trouve que $\mathbf{nat}$ est une description possible des entiers naturels (notation du système $\mathbb{F}$) :

$$\overline{n} := \Lambda X \lambda y^{X \Rightarrow X} \lambda x^{X}\, y(y(\ldots y(x) \ldots)) \tag{19}$$

on ne voit donc pas comment $\mathbf{nat} \parr \reflectbox{$\forall$}$ pourrait avoir un pré-biorthognal $\sim\!\mathbf{nat} \vdash \reflectbox{$\forall$}$ fini.

Cette perte de finitude est due à l'introduction des entiers naturels, et plus généralement du quantificateur $\exists X$. Sa manifestation la plus spectculaire est l'*incomplétude*, qui sanctionne les limites de tout système. Et, si l'on a compris que l'usine n'est autre que le système sans le système, exprime l'impossibilité d'une usine finie.

Il va falloir faire avec et réviser notre paradigme.

4.5.3 L'usine épidictique

Faute d'une batterie de tests finie, on se trouve dans l'impossibilité de justifier qu'un dessein $\mathcal{C} \in\ !(\mathbf{D} \parr \maltese) \otimes !(\sim\mathbf{D} \parr \maltese) \otimes \mathbf{C}[\mathbf{D},\sim\mathbf{D}]$ appartient à $\exists \mathbf{X}\, \mathbf{C}[\mathbf{X},\sim\mathbf{X}]$. Parmi les solutions, la batterie infinie, ce qui, dans le cas de $\sim\mathbf{nat}$ nous mènerait à une variation sur la ω-règle germanique et donc à utiliser quelque chose comme

$$\frac{\mathcal{F}(\overline{0}) \in \mathbf{C} \quad \dots \quad \mathcal{F}(\overline{n}) \in \mathbf{C} \quad \dots}{\mathcal{F} \in \mathbf{nat} \Rightarrow \mathbf{C}} \tag{20}$$

pour montrer que $\mathcal{F} \in \mathbf{nat} \multimap \mathbf{C}$, mais en plus compliqué ! Ce n'est sûrement pas ce qu'on veut !

La solution est à chercher du côté du système $\mathbb{F}$ dont il faut oublier le côté « système ». La première idée est de se donner le comportement $\mathbf{D}$ mais ça ne marche que si $\mathbf{D}$ n'utilise aucune quantification du second ordre : si $\mathbf{D}$ est, disons $\sim\mathbf{nat}$, il n'a pas de surmoi fini et nous n'avons fait que reculer pour mieux sauter.

On déplace donc l'intérêt de $\mathbf{D}$ à $!(\mathbf{D} \parr \maltese) \otimes !(\sim\mathbf{D} \parr \maltese) \otimes \mathbf{C}[\mathbf{D},\sim\mathbf{D}]$ dont on va se *donner* un surmoi fini : autrement dit, le dessein $\mathcal{C}$ vient accompagné d'un surmoi *ad hoc*, sa composante *épidictique*.

Je donne un exemple, le principe $\exists \mathbf{Y} \sim\mathbf{C}[\mathbf{Y},\sim\mathbf{Y}] \parr \forall \mathbf{X}\, \mathbf{C}[\mathbf{X},\sim\mathbf{X}]$. Si les deux composantes du « $\parr$ » sont localisées en s, t, le dessein qui le démontre n'est autre que $[\![s[x], t[x]]\!]$. Mais *quid* de son surmoi épidictique ? En posant $\mathbf{E}[\mathbf{X},\sim\mathbf{X}] := ((\mathbf{X} \parr \maltese) \otimes (\sim\mathbf{X} \parr \maltese)) \Rightarrow \mathbf{C}[\mathbf{X},\sim\mathbf{X}]$, il est défini comme la réunion des surmois $[\sim\mathbf{E}[\mathbf{X}_i,\sim\mathbf{X}_i] \parr \mathbf{E}[\mathbf{X}_i,\sim\mathbf{X}_i]] \vdash \maltese$ où les $\mathbf{X}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ sont les « valeurs » de la section 4.5.1.

4.5.4 Le déréalisme

Changement radical par rapport à la relation Objet/Sujet : l'Objet (le dessein) nous est donné avec un « mode d'emploi » qui était fourni dans le système $\mathbb{F}$ par les indications de type, par exemple l'opération $t\{T\}$ d'application d'un terme à un type. Le cas du « premier ordre » correspondait à une situation où l'Objet était jugé par le Sujet selon un protocole qu'on pourrait qualifier d'objectif, d'universel. Il n'en est rien ici puisque le protocole est à la tête du client (i.e., l'Objet).

Ce surmoi épidictique, d'où vient-il ? Dans le système $\mathbb{F}$, il est fourni gracieusement, c'est le côté « système ». Mais on veut être capable de faire la même chose sans s'encombrer d'un système, du moins de ses aspects coercitifs. Il n'y a qu'une seule possibilité : prouver en Théorie des Ensembles que ce surmoi *ad hoc* est une condition *suffisante* d'appartenance à $\exists \mathbf{X}\, \mathbf{C}[\mathbf{X}, \sim\mathbf{X}]$. C'est en réalité ce que j'avais fait pour le système $\mathbb{F}$, au moyen de mon théorème de normalisation. Incidemment, l'utilisation de ZF a été critiquée par la secte prédicativiste, au nom d'interdictions religieuses du genre « Tu ne feras pas cuire un ensemble dans le lait de sa mère ». Oblions ces pinaillages d'une autre époque : le sophiste aboie mais la caravane passe.

Tant qu'on se restreint au premier ordre, i.e., la partie de la Logique qui n'utilise pas $\exists X$, le dilemme se situe entre deux visions de la relation Objet/Sujet :

L'essentialisme : celui de Frege, Russell, Tarski, Quine. Comme Charlton Heston dans *Les dix commandements* (1956), le Sujet applique des principes dictés par le Ciel avec lequel il aurait une ligne directe.

L'existentialisme : la règle du jeu logique est soumise à une interaction consensuelle. Celle développée dans la plus grande partie de l'article.

Le second ordre rebat les cartes en instillant une dimension essentialiste à travers ce surmoi épidictique qui ne peut se justifier que dans ZF. Ce morceau rebelle à toute justification interactive est, comme je l'ai déjà dit, responsable du phénomène appelé *incomplétude* que seuls des autodidactes s'obstinent encore à nier. En tout cas, mon approche, sans pour autant retomber dans les ornières essentialistes, n'est plus vraiment existentialiste : elle est *déréaliste.*

4.5.5 Autres quantificateurs

On pense en tout premier lieu à la quantification du premier ordre. Sans vouloir un instant remettre en cause l'intérêt algébrique du système axiomatique appelé *calcul des prédicats*, force est de constater qu'il ne fonctionne pas logiquement. À cause des foutus individus du premier ordre venus d'on ne sait où. D'ailleurs BHK se cantonne sagement à l'arithmétique en restreignant la quantification à ses cas particuliers $\forall n$ et $\exists n$.

J'ai déjà eu l'occasion d'expliquer comment donner un sens à l'arithmétique, vue comme partie intégrante de la logique du second ordre. Sur ce point précis, mes articles [3] et [4] me semblent toujours d'actualité.

5 Envoi

Cette synthèse du programme de ST comporte de nombreuses nouveautés. D'abord, le pivot $\maltese$ qui permet de donner un sens précis à la dualité entre desseins (preuves) et gardiens (critères de correction). En intégrant au passage des données habituellemenxt exclues de la Logique, comme les desseins « partiels » à l'œuvre dans les cerbères singuliers. Et des bonnes surprises en forme de simplification : $(!A \otimes !B) = !(A \otimes B)$ et $(!A \oplus !B) = !(A \oplus B)$ qui identifie « $\oplus$ » à la disjonction intuitionniste. Le traitement, enfin complet, de la quantification du second ordre fait apparaître l'incomplétude comme la manifestation d'un monde où l'usine est *ad hoc* – et donc nullement apodictique –, contrairement au premier ordre où elle est universelle.

C'est aussi l'occasion d'un bilan méthodologique sur la LL et une réflexion sur le rôle des catégories. Je reviens sur mon image de petites roulettes : sans les espaces cohérents, interprétation catégorique très maniable – comparer aux domaines de Scott qu'ils simplifient –, il n'y aurait jamais eu de LL. Le point de vue catégorique a permis indéniablement de faire sortir la logique constructive de l'ornière en introduisant cette fameuse linéarité qui n'a de sens qu'au point de vue sémantique ; elle m'apparaît désormais comme douteuse.

Cette linéarité dont la conséquence la plus originale est la création des *réseaux de démonstration*, lesquels s'opposent frontalement au point de vue catégorique. Originellement conçus comme une syntaxe un peu extravagante, ils ont acquis leur bâton de maréchal lorsque les critères de correction sont devenus des « démonstrations » de l'envers. Point de vue tellement convaincant qu'il s'est transformé en condition de possibilité : quoi qu'en disent les catégories, les éléments neutres mutliplicatifs sont impossibles et les exponentielles n'existent que combinées. En règle générale, la linéarité libératrice a été exagérée. C'est pour cette raison que le connecteur « $\oplus$ » restait distinct de la disjonction intuitionniste. En oubliant les sempiternels isomorphismes canoniques, éminemment estimables mais sans pour autant avoir droit de cuissage sur la Logique, on rompt les derniers liens avec les systèmes coercitifs dont la Théorie des Catégories est l'expression la plus sophistiquée. Pour la première fois, on travaille sans filet.

L'incapacité des Catégories à rendre compte de la Logique est due à leur essentialisme. En effet, qu'est ce qu'un *morphisme* sinon ce qui préserve la forme laquelle est donc donnée à l'avance. Pas question de dialogue normatif, tout doit donc descendre du Ciel dans une vision réduite à sa dimension d'*usage*.

Cet article dédié à mon cher Phil se clôt sur la critique d'une approche qu'il plaçait au dessus de tout... et à laquelle il ne pourra hélas pas répondre.

A Annexe

A.1 Le support

Cette question a été traitée avec désinvolture dans le texte principal qui passe allègrement d'un support simple à un support multiple. Mon excuse, éviter le pédantisme et l'illisibilité ; c'est ainsi que j'ai utilisé la notation ambiguë $!\mathcal{D}$ dans la définition 5, alors que $!_s\mathcal{D}$ aurait été plus correct.

Comme il a été présenté, le support est une donnée « tarskienne », i.e., externe. Je vais indiquer indiquer, sous la forme d'une série d'exercices, comment le ramener sur Terre, i.e., le traiter interactivement.

A.1.1 Rayons simples

Un rayon sans répétition de variables est dit *simple* ; exemple typique, un support. Un rayon t simple peut être représenté par l'ensemble $|t|$ de ses cas particuliers clos $t\theta$. Si elle n'est pas vide, l'intersection $|t| \cap |u|$ est égale à $|v|$ où v est obtenu par filtrage à partir de t et u. Les sommes finies $|t_1|+\ldots+|t_k|$ de rayons simples disjoints forment en fait une algèbre de Boole. En effet, si le langage fonctionnel est basé sur un nombre fini de symboles, on peut montrer que $|t|$ est complémenté.

Exercice 1 Il existe $t_1, \ldots, t_k$ tels que $t, t_1, \ldots, t_k$ soient deux à deux disjoints et que tout rayon disjoint de t soit moins général qu'un des t_i.

A.1.2 Régulation par des cerbères

Les cerbères singuliers permettent d'obliger interactivement, i.e., par orthogonalité, une étoile à être localisée dans un support t. Soient $t_1, \ldots, t_k$ le « complémentaire » de t (exercice 1).

Exercice 2 Trouver un cerbère interdisant toute étoile $[\![\, t'_1, \ldots, t'_n \,]\!]$ formée de cas particuliers des t_i.

On peut donc récuser les étoiles entièrement situées « hors de t ».

Exercice 3 Trouver des cerbères récusant toute étoile à cheval sur t et au moins un des t_k.

Ce qui, combiné à l'exercice précédent, permet de récuser toute étoile contenant un rayon disjoint de t.

On pourra faire de même pour les supports multiples ; honnêtement je n'ai pas vérifié.

A.2 Locatif contre spirituel

Je voudrais revenir sur l'opposition entre locatif et spirituel. Si l'essentiel de la Logique relève bien du spirituel – *grosso modo*, elle travaille à isomorphisme près – une portion attachante et brimée relève du locatif. Par exemple, le sous-typage ou encore les types intersection.

L'opposition entre les deux apparaît en Théorie des Ensembles avec le couple formé de l'union (locative) et la somme (spirituelle). Des deux, l'union est la plus générale ; elle est de plus commutative, associative, avec un élément neutre ($\emptyset$). Elle est par contre peu transportable, ce qui s'exprime en termes de cardinalité par $\sharp(A \cup B) \leq \sharp A + \sharp B$. La somme est la version stable de l'union : elle est définie au moyen de $A + B := A' \cup B'$ où A' et B' sont des copies de A et B choisies disjointes. Bonne nouvelle $\sharp(A+B) = \sharp A + \sharp B$; par contre on ne sait plus vraiment de quoi est fait $A + B$ et l'associativité, la commutativité et même la neutralité de $\emptyset$ ne sont plus que des isomorphismes dont la canonicité (définition imbitable) résulte en fait des égalités locatives sous-jacentes.

L'opposition $\cup/+$ persiste au niveau du produit ensembliste. D'un côté sa version locative $A \cdot B := \{a \cup b\,; a \in A,\ b \in B\}$ qui a le bon goût d'être commutative, associative, d'élément neutre $\{\emptyset\}$ et de distribuer les unions ; sans oublier $\wp(A \cup B) = \wp(A) \cdot \wp(B)$. Avec toujours un défaut rédhibitoire au niveau de la cardinalité : on a seulement $\sharp(A \cdot B) \leq \sharp A \times \sharp B$. Le produit ensembliste familier est obtenu par délocalisation, i.e., $A \times B := A' \cdot B'$ avec des A' et B' bien choisis. Si l'on obtient bien $\sharp(A \times B) = \sharp A \times \sharp B$, toutes les égalités ont été remplacées par de pénibles isomorphismes.

L'opposition locatif/spirituel est celle entre analytique et synthétique. Ne pas reconnaître que le locatif est antérieur au spirituel est une position de type religieux, du même genre que celle qui niait les ancêtres peu glorieux de l'Humanité, vers de terre et reptiles.

Cette opposition devient irréconciliable quand on passe à l'intersection ; alors qu'il y a un substitut spirituel à $A \cup B$, il n'y a en pas pour $A \cap B$. Ce qui s'en approche le plus est le produit cartésien $A \times B$ mais on est bien loin du compte. Par exemple, la quantification universelle est, vue de loin, une sorte d'intersection ; que certains ont cru devoir interpréter comme un produit infini... ce qui, dans le cas de l'arithmétique revient à démontrer $\forall n\, A[n]$ cas par cas, i.e., au moyen de l'ω-règle (20). Le caractère profondément locatif de l'intersection explique l'irréductibilité de l'usine à l'usage. Ainsi, considérons l'intersection $((\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) \parr \mathbf{E}) \cap ((\mathbf{C} \otimes \mathbf{E}) \parr \mathbf{D})$; il est facile de voir qu'elle est égale à $\mathbf{C} \otimes (\mathbf{D} \parr \mathbf{E})$ qui n'a aucun rapport avec une conjonction genre $((\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) \parr \mathbf{E})\ \&\ ((\mathbf{C} \otimes \mathbf{E}) \parr \mathbf{D})$.

Références

[1] J.-Y. Girard. **Transcendental syntax 1 : deterministic case**. *Mathematical Structures in Computer Science*, pages 1–23, 2015. *Computing with lambda-terms. A special issue dedicated to Corrado Böhm for his 90th birthday.*

[2] J.-Y. Girard. **Transcendental syntax 2 : non deterministic case**. *Logical Methods in Computer Science*, 2016. *Special issue dedicated to Pierre-Louis Curien for his 60th birthday.*

[3] J.-Y. Girard. **Transcendental syntax 3 : equality**. *Logical Methods in Computer Science*, 2016. *Special issue dedicated to Pierre-Louis Curien for his 60th birthday.*

[4] J.-Y. Girard. **Transcendental syntax 4 : logic without systems**. Technical report, http ://girard.perso.math.cnrs.fr/trsy4.pdf, 2020.

[5] J.-Y. Girard. **Schrödinger's cut : la logique à la lumière du quantique**. Technical report, http ://girard.perso.math.cnrs.fr/chat.pdf, 2021.

[6] J.-Y. Girard. **Schrödinger's cut II : les additifs à la lumière du quantique**. Technical report, http ://girard.perso.math.cnrs.fr/chat2.pdf, 2022.

[7] J.-Y. Girard. **Schrödinger's cut III : les univers parallèles**. Technical report, http ://girard.perso.math.cnrs.fr/chat3.pdf, 2022.