UNIVERSITE PARIS VII

THESE de DOCTORAT D'ETAT

SPECIALITE : MATHEMATIQUES

PRESENTEE PAR: Jean-Yves GIRARD

SUJET de la THESE Interprétation fonctionnelle et élimination des coupures de l'arithmétique d'ordre supérieur.

soutenue le, 26 Juin 1972 **devant la commission d'examen**

JURY :

Président : D. LACOMBE

Rapporteur : G. KREISEL

Thèse complémentaire : G. CHOQUET
I. REZNIKOFF

08520

25 OCT. 1972

INTERPRETATION FONCTIONNELLE

ET ELIMINATION DES COUPURES

DE L'ARITHMETIQUE D'ORDRE SUPERIEUR

Jean-Yves Girard

I. Points de vue extensionnel et calculatoire

Si nous considérons les deux fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{N}^4$:

$$F_1 \ : \quad x,y,z,n \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } xyzn=0, \text{ ou } n=1, \text{ ou } n=2, \text{ ou } x^n + y^n \neq z^n \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$F_2 \ : \quad x,y,z,n \longmapsto 0$$

du point de vue des graphes associés, ces deux fonctions seront égales ou distinctes, suivant que le grand théorème de Fermat est vrai ou faux.

Par contre, les idées qui servent à définir ces deux fonctions (ou mieux : leurs algorithmes respectifs de calcul) sont très différentes, et ceci indépendemment de la vérité du théorème de Fermat.

En résumé, il faut distinguer entre deux points de vue dans l'étude des objets mathématiques, et spécialement des fonctions :

- le point de vue extensionnel, pour lequel les fonctions sont des graphes, l'égalité extensionnelle entre fonctions étant par définition l'identité des graphes. Ce point de vue se traduit, en théorie des ensembles, par l'axiome d'extensionalité.

- le point de vue intentionnel (ou mieux, algorithmique, calculatoire) pour lequel les fonctions seront d'avantage des algorithmes, des procédés de calcul. L'égalité intentionnelle (ou algorithmique, calculatoire) est alors définie comme l'égalité des algorithmes, modulo un certain nombre de de transformations simples.

> En fait la situation est plus complexe qu'il ne semble, car si l'égalité extensionnelle a une signification univoque, les propriétés de l'égalité algorithmique dépendent essentiellement du choix des "transformations simples" dont nous avons parlé. Par exemple, les deux fonctions calculatoires définies par les algorithmes
> $F : \ x,y \mapsto x + y$ et $G : \ x,y \mapsto y + x$
> seront égales ou non, suivant que la commutation de la somme sera ou ne sera pas parmi nos "transformations simples". Il faut de plus remarquer que, si en général les transformations en question se ramènent à des suites de transformations récursives primitives, ceci ne signifie pas que l'égalité algorithmique soit décidable, et a fortiori, récursive primitive. (Par exemple, dans les systèmes fonctionnels que nous étudions, l'identité des formes normales est une égalité algorithmique décidable, mais qui n'est pas récursive primitive).

Le point de vue algorithmique permet la plupart du temps de définir une égalité décidable entre fonctions.

> Dans les systèmes que nous utilisons par la suite, des fonctions aussi élémentairement semblables que F et G ne seront pas identifiées : F et G seront représentées par deux assemblages formels $\lambda x \lambda y \; x+y$ et $\lambda x \lambda y \; y+x$ que nous considèrerons comme irréductibles l'un à l'autre.

II. Systèmes fonctionnels (Etude syntaxique)

Les recherches en théorie de la démonstration ont mis en avant la notion de système fonctionnel.

Commençons par une mise au point :

- d'abord, les termes "fonctionnel", "fonctionnelle" évoquent des opérations extensionnelles (définies sur des graphes), alors que justement les systèmes et objets en question sont l'illustration-même du point de vue algorithmique.

> Il serait bien plus correct de parler de "symboles fonctionnels", "système de symboles fonctionnels", et de réserver la terminologie "fonctionnelle","système fonctionnel" pour l'interprétation de ces notions (voir III). Dans la suite de cet exposé cependant, nous emploierons systématiquement l'abus de langage qui consiste à appeler "fonctionnelles" les assemblages qui les dénotent.

- ensuite, il faut bien préciser que nous ne disposons pas à l'heure actuelle d'une définition générale de la notion vague de "système fonctionnel". Ceci dit, nous décrivons dans la première partie de l'exposé un certain nombre de structures mathématiques qu'on a l'habitude d'appeler "systèmes fonctionnels". Nous allons décrire succintement quelques uns de leurs points communs marquants. Pour la raison que nous avons donnée, cette description ne doit pas être prise pour une définition dogmatique.

1. Les objets des systèmes fonctionnels (termes, fonctionnelles, ou mieux, symboles fonctionnels) sont obtenus au moyen de constructions combinatoires.

> Ainsi, étant donnés des termes a et b et une variable x, nous pouvons former (dans certaines conditions) les termes λxa, a(b). Le caractère combinatoire des termes (et des types) est lié à des questions de décidabilité. Dans le cours de l'exposé, nous envisageons même des termes qui ne sont pas obtenus par des méthodes combinatoires (utilisation de suites infinies), mais il ne s'agit là que de constructions temporaires, liées à certaines exigences démonstratives.

2 Les objets des systèmes sont classifiés à l'aide de types. Chaque fonctionnelle possède un type unique. Les types sont eux aussi des objets combinatoires. Les types servent aussi à règlementer les constructions de fonctionnelles : les fonctionnelles $a_1,\ldots,a_n$, ne pourront être utilisées dans une construction que si leurs types respectifs satisfont certaines conditions syntaxiques, dépendant de la construction envisagée.

Par exemple, si a est de type τ, x de type σ, λxa est de type $\sigma\to\tau$. Nous ne pourrons formmer a(b) que si le type de a s'écrit $\sigma\to\tau$, le type de b étant alors σ .

Enfin, dans certains systèmes, comme OF_2, les types peuvent aussi agir réellement sur les fonctionnelles.(Contrairement à ce qui se passe dans le système de Gödel OF_1)

Par exemple, si a est de type $\Lambda\alpha\sigma[\alpha]$, et τ est un type, $a\{\tau\}$ est une fonctionnelle de type $\sigma[\tau]$.

3. Pour chaque type σ, on définit un préordre /= entre éléments de type σ . /= s'appelle réduction, et correspond à l'idée de calcul.

Par exemple, on a : λxa (b) /= a[b] et DTα a$\{\tau\}$ /= a[τ] , où a[C] désigne la substitution combinatoire de l'objet (fonctionnelle ou type) C pour la variable (x ou α).

D'un point de vue élémentaire, la description de /= en tant que préordre peut être avantageusement précisée comme suit : on dispose d'une relation binaire $/=_s$, de réduction stricte (à ne pas confondre avec $/=_1$ de la première partie; $/=_s$ est introduit en début de seconde partie). a $/=_s$ b signifie que b est obtenu à partir de a en utilisant exactement une règle de calcul. /= est alors la relation réflexive et transitive associée à $/=_s$. $/=_s$ doit vérifier la propriété : pour tout a, l'ensemble des b tels que a $/=_s$ b est fini, c'est à dire qu'étant donné a, il n'y a qu'un nombre fini de premières étapes de calcul de a.

On définit d'autre part un certain nombre d'éléments maximaux pour /= , que l'on appelle éléments normaux. Un élément normal est donc un des points d'aboutissement désirables pour un calcul.

En fait, les éléments normaux vérifient la condition suivante (plus forte que la maximalité) : si a est normal, alors il n'existe pas de b tel que a $/=_s$ b. Par exemple, dans le lambda-calcul (qui n'est pas un système fonctionnel, dans le sens où nous l'entendons), le terme non normal (λx x(x))(λx x(x)) est maximal pour /=, mais se réduit strictement en lui-même. Un terme sans rédion strict n'apparaît pas nécessairement (d'un point de vue élémentaire) comme normal (c'est le cas dans les systèmes contenant GD et RED); c'est par contre vrai si le terme possède tous ses rédions stricts (voir partie II).

La relation /= est supposée vérifier un certain nombre de propriétés, par exemple que deux calculs effectués suivant des "chemins" différents, à partir d'un même point de départ, donnent le même résultat, ce qui se traduit par la propriété de Church-Rosser : si a /= b et a /= c, alors il existe d, b /= d et c /= d.

> Par exemple, soit dans le système OF_1 une définition du produit et de la puissance n-ième, avec la règle a.0 /= 0. Si nous devons calculer l'expression $103^{207}.0$, divers chemins de réduction peuvent être utilisés, et ils donnent tous le même résultat. Mais un de ces chemins est nettement plus court que les autres, et nous sommes autorisés par Church-Rosser à ne considérer que ce chemin.

Toutes les propriétés dont nous venons de parler sont vérifiables au moyen de raisonnements élémentaires. Il n'en va pas de même pour la propriété essentielle que nous allons énoncer maintenant :

Le préordre inverse de /= est bien fondé, et ses éléments minimaux (les éléments maximaux de /=) sont exactement les termes normaux. En particulier, /= est un ordre.

> Traduit en termes de $/=_s$, ce qui précède s'énonce précisément : pour chaque terme a, toutes les suites de réductions strictes partant de a sont finies, et les éléments terminaux des calculs sont normaux. Ceci s'énonce "tout terme est absolument normalisable". Comme, pour un terme donné a, l'ensemble des rédions stricts de a (les b tels que a $/=_s$ b) est fini, ceci peut s'énoncer plus simplement par le théorème de Brouwer-König sous forme arithmétique. Remarquons que, si a est absolument normalisable, alors a ne se réduit pas strictement en lui-même. Pour prouver que tous les termes d'un système donné sont absolument normalisables, il est nécessaire de faire intervenir le concept de terme héréditairement absolument normalisable, ou réductible. L'énoncé qui formalise la réductibilité ne se met pas sous forme élémentaire en général.(Pour OF_1, la réductibilité n'est pas arithmétique, pour OF_2, elle n'est pas analytique). En résumé, le résultat qui nous intéresse (l'absolue normalisabilité de tous les termes) est arithmétique (Π^0_2), mais sa démonstration nécessite un détour par une notion (la réductibilité) qui ne l'est pas.

Dans les systèmes associés aux théories non prédicatives, comme OF_2, la définition correcte de la réductibilité est très délicate.

> Un terme de type primitif clos, comme le type o des entiers sera réductible ssi il est absolument normalisable (AN). De même, un terme a de type $(\sigma \to \tau)$ sera réductible ssi pour tout b réductible de type σ, a(b) est réductible de type τ. Un terme a de type $\Lambda\alpha\sigma$ sera réductible ssi pour tout type τ, et toute définition "arbitraire" de la réductibilité de type τ ; $a\{\tau\}$ est réductible de type $\sigma[\tau]$, si on définit cette notion en prenant, pour chaque apparition de τ qui remplace une apparition de α dans σ, cette définition "arbitraire" comme définition primitive de la réductibilité de type σ. Nous allons revenir

sur la notion de définition "arbitraire". Remarquons tout de suite que la réductibilité pour le terme a de type n'est pas définie en fonction du premier symbole de a. (Contrairement à ce que font, par exemple Martin-Löf et Prawitz). Ce point est important pour la formalisation des résultats; il necessite par ailleurs de compliquer les démonstrations, en introduisant la notion essentielle de simplicité. D'autre part, l'emploi de définitions arbitraires (dans un certain sens) de la réductibilité permet de résoudre le problème posé par la circularité inhérente aux types universels.

Dans le cas de OF_2, la réductibilité se définit donc par quantification sur un ensemble de définitions "arbitraires" de la réductibilité, les candidats de réductibilité, ou CR. Le problème de la définition correcte de la réductibilité se ramène donc au choix de la définition des CR.

D'abord, en vue de ce que l'on veut démontrer, l'ensemble des termes AN de type σ doit être un CR de type σ, et ce fait doit être une évidence élémentaire. D'autre part, l'ensemble des CR doit être clos par rapport aux constructions effectuées lors de la définition inductive de la réductibilité. On definit donc un CR de type σ comme un ensemble de termes de type σ satisfaisant aux conditions cruciales :
(CR 2) Tout élément de A est AN.
(CR 5) Si $a \in A$, et a /= b, alors $b \in A$.
Il nous faut enfin une condition (la plus importante) nous permettant de dire qu'un CR possède"suffisamment"d'éléments : pour celà on définit les termes simples, dont la propriété essentielle est la suivante : si a est simple, tous les rédions stricts de a(b) (resp. $a\{\tau\}$) sont de la forme a'(b') (resp. $a'\{\tau\}$) avec a /= a', b /= b'. Dans le cas des systèmes fonctionnels isomorphes à des systèmes de déduction naturelle, les termes simples correspondent aux déductions qui ne se terminent pas par une introduction (si les seules coupures considérées sont du type introd./élim.). On énonce alors
(CR 4) Si a est AN et simple, et si tous les rédions stricts de a sont dans A, alors $a \in A$. En particulier :
(CR 3) Si a est simple et normal, alors $a \in A$.

Ces définitions sont parfaitement adaptées pour la démonstration du théorème de réductibilité dans la plupart des systèmes fonctionnels. De plus, quelques retouches mineures des définitions suffisent à assurer la formalisabilité locale de la démonstration, pour OF_2, par exemple, dans HA_2. Par contre, ces définitions perdent leur caractère opératoire quand se pose le problème des réductions commutatives, ou ultra-réductions, dans les systèmes possédant des types disjonctifs et/ou existentiels.

La raison de cette difficulté s'explique ainsi : si t n'est pas simple, on peut toujours trouver, dans les systèmes sans ultra-réductions, un entier n (dépendant du premier symbole de a) tel que tous les dégénérés n-ièmes de a (les termes obtenus à partir de a quand on a effectué n fois l'opération () ou $\{\}$) soient simples, et on peut alors appliquer (CR 4) à ces dégénérés.

Dans le cas des réductions commutatives, il n'y a pratiquement plus de termes simples, du moins si on s'en tient à la définition primitive. On est amené ainsi à modifier la définition de la simplicité, de manière à préserver les résultats obtenus précédemment, et à trouver un nouveau principe, analogue à (CR 4) qui puisse nous permettre de raisonner dans le cas où ce critère est devenu inopérant. Le résultat est le critère (CR"4), que nous ne décrirons pas ici. La démonstration de l'adéquation de ce critère est fort longue. (CR"4 est une généralisation des principes employés par Prawitz dans sa démonstration de la réductibilité pour les systèmes du premier ordre avec ultra-réduction.) La démonstration que nous donnons se prête encore à une formalisation locale presque immédiate.

III. Interprétation des fonctionnelles

D'après ce qui précède, toute fonctionnelle est majorée, pour /=, par une fonctionnelle normale unique, <u>sa forme normale</u>. En ce sens, on peut dire que les règles de réduction donnent une signification aux fonctionnelles par l'intermédiaire de leurs formes normales.

Par exemple, si on a défini les règles de réduction standard pour la somme, $\lambda x \lambda y\ (x+y)\quad (\bar{o},\bar{1})\quad /= \bar{o} + \bar{1}\quad /= \bar{1}$.

Encore faudrait il :

1) Que les formes normales possèdent elles-même une interprétation mathématique simple.

Par exemple, les fonctionnelles normales et closes de type o s'identifient canoniquement aux entiers naturels. Il n'en va pas de même pour les types supérieurs. Comme nous l'avons dit, le choix des règles de calcul (et donc des formes normales) ne correspond pas forcément à une nécessité mathématique bien comprise. On s'aperçoit ainsi qu'il est presque toujours possible d'adjoindre certaines règles, changeant par là-même la notion de forme normale. (Ceci n'est bien sûr pas possible au type o, car nous ne voulons pas identifier des entiers distincts) Par exemple, on aurait pu considérer les η-réductions, dont un exemple est la règle $\lambda x\ a(x)\quad /= a$ (x non libre dans a). Cette règle n'est pas dépourvue totalement d'intérêt : en ajoutant une nouvelle constante de chaque type, sans règle spécifique pour elle, on voit que l'égalité définie entre termes clos comme l'identité des formes normales permet d'obtenir à peu de frais un "modèle" extensionnel du système (et celà même pour les systèmes contenant GD et RED). Malheureusement, ce "modèle", si il vérifie une condition délicate (l'extensionalité), ne jouit pas par contre des propriétés très simples qu'on est en droit de demander par ailleurs.(Les η-réductions ne sont pas étudiées dans cet exposé; la construction du modèle est complètement évidente.)

2) Que la signification (extra-combinatoire) des types soit évidente

Pour le type o, il n'y a pas de problème. Ce type peut être identifié en toute tranquillité à $\mathbb{N}$. Si nous avons pu décrire les types σ et τ en tant qu'ensembles d'indices de fonctions récursives, le type $\sigma \rightarrow \tau$ sera l'ensemble des indices f de fonctions récursives partielles :

appliquant tout élément e de type σ, sur l'élément $\{f\}e$ de type τ. La signification du type universel $\Lambda\alpha\sigma$ est plus délicate : remarquons en effet que si e est de ce type, $e\{\tau\}$ doit être de type $\sigma[\tau]$, et ce, pour tout τ. C'est à dire que la compréhension d'un type universel présuppose (en première analyse) la compréhension de tous les types, y compris lui-même. Il y a là un cercle, qui peut être brisé en introduisant un nouveau type pour chaque ensemble d'entiers. Ces nouveaux types sont appelés types primaires, et le type que nous voulons définir fait déjà partie des types primaires. Les éléments de $\Lambda\alpha\sigma$ sont par définition les e qui sont dans tous les $\sigma[P]$, P primaire. Nous venons de définir, à quelque chose près la structure HRO_2 de la seconde partie. (Remarquer la similitude entre types primaires et candidats de réductibilité. Ces constructions sont aussi apparentées à la "réalisabilité" de Kreisel-Troelstra; la réalisabilité n'est pas étudiée dans cet exposé.)
Signalons au passage que seule une petite partie de HRO_2 est l'interprétation du système correspondant OF_2. Cependant, cette interprétation par HRO_2, tout en résolvant un problème, en ouvre un autre : a, de type universel $\Lambda\alpha\sigma$, sera interprété par un indice e, qui est dans tous les $\sigma[P]$, en particulier, $e\{P\} = e$ pour tout P. Les objets de type universel sont donc des fonctions définies "uniformément" sur les types. Dans le cas précis des fonctions récursives, nous avons une caractérisation de l'uniformité, que nous venons de donner. Par contre le problème est ouvert de trouver une interprétation de la notion vague d'uniformité dans un contexte qui ne soit pas aussi restrictif que celui des fonctions récursives.

3 Que l'on possède (dans certains cas) des modèles extensionnels standard.

Un modèle M du système fonctionnel F est obtenu par l'adjonction de nouvelles constantes (pour les types et les fonctionnelles). Les règles de réduction s'étendent canoniquement à cette structure (en n'introduisant aucune règle spécifique pour ces nouvelles constantes), et on se restreint aux réductions qui ne font intervenir que des termes clos (réductions *). On suppose de plus que M est muni, sur chaque type σ , d'une équivalence =* entre éléments de type σ . La relation =* doit vérifier les propriétés :
$a =^* b \rightarrow T(a) =^* T(b)$ (a et b de type σ , T de type $\sigma\rightarrow\tau$)
$a \,/\!\!=^* b \rightarrow a =^* b$
Ces conditions ne sont pas suffisantes dans les applications pratiques. On est amené à définir un type (), à deux éléments V et F (voir IV), et on exige que =* détermine exactement deux classes sur ce type, celles de V et de F. Si le système possède de plus des types disjonctifs et/ou existentiels, on demande que =* vérifie certaines conditions supplémentaires (voir partie IV).
Un modèle est standard si pour tout a de type o, il existe n tel que $a =^* \bar{n}$. (Ce n est unique, à cause de la condition sur ())
Un modèle est extensionnel si il vérifie de plus : $a =^* b$ ssi $a(c) =^* b(c)$ pour tout c (a et b de type $\sigma\rightarrow\tau$, c de type σ), et $a =^* b$ ssi $a\{\tau\} =^* b\{\tau\}$ pour tout τ (a et b de type universel).
Remarquons en passant que la condition sur le type () élimine les "modèles" obtenus à l'aide des η -réductions.
Il est relativement facile de construire des modèles extensionnels standard pour les systèmes OF_1, OF_2, au moyen des structures HEO_1 , HEO_2.. (voir seconde partie).
(Bien entendu, la notion de modèle que nous utilisons ne diffère pas sensiblement de la notion habituelle de modèle d'une théorie formelle; les modèles que nous considérons ici ne sont autres que des cas particuliers de modèles (au sens habituel) de théories formelles associées aux systèmes fonctionnels, dans un sens qui sera précisé en IV.B)

Bien que HEO_1 soit défini (localement) par des méthodes arithmétiques, on peut avoir l'impression vague suivante : les modèles extensionnels "intéressants" de OF_1 sont en rapport avec les modèles de la théorie des types. Cette idée assez floue est précisée au moyen du résultat élémentaire :

D'un modèle extensionnel de OF_1 contenant la fonction caractéristique de l'égalité =*, on déduit un modèle de la théorie des types (et réciproquement). Ce qu'on a dans la tête en parlant de modèle intéressant (et qui peut comporter des exigences variées, par exemple possibilité de passer à la limite, etc...) n'est donc rien d'autre que de pouvoir considérer l'égalité comme un élément du modèle.

Pour OF_2, on a par contre le résultat négatif suivant : il n'y a pas de modèle extensionnel de OF_2 contenant la fonction caractéristique universelle de l'égalité (c'est à dire un E de type $\Lambda\alpha(\alpha,\alpha\rightarrow())$, tel que pour tout τ , $E\{\tau\}$soit la fonction caractéristique de l'égalité sur τ). On montre en effet qu'on en déduirait un modèle d'une théorie formelle U, que l'on sait par ailleurs être incohérente. (Voir III. Annexe)

En particulier, le résultat précédent nous donne une idée précise des limitations que nous pouvons rencontrer en essayant de préciser la notion vague d'uniformité.

IV Equations dans les systèmes fonctionnels

Soient a et b deux termes de type o. Si a et b sont clos, l'<u>équation</u> a=b a une signification évidente (l'égalité des formes normales). Pour donner une signification aux équations dans le cas général, on remarque d'abord que les seules équations qui nous intéressent vraîment sont celles où a et b ne peuvent prendre que les valeurs 0 et 1, c'est à dire où a et b sont isomorphes à des fonctions caractéristiques de prédicats. Aussi, introduit-on un type spécial , noté (), à deux éléments V et F, qui représentent les deux alternatives de la logique classique.

1 Vérité d'une équation dans un modèle

On dira que l'équation a=b est vraie dans (M,=*) ssi pour toute suite C d'éléments de M telle que a[C] et b[C] sont clos, a[C] =* b [C] .

Dans la pratique, on peut considérer le modèle particulier $(M_o,=_o)$ des termes clos muni de l'égalité des formes normales. Dans le cas des systèmes avec arithmétisation ou Bar-récursion, les équations associées aux interprétations fonctionnelles seront vérifiées uniquement dans $(M_o,=_o)$. Pour les autres systèmes, il est plus intéressant de demander que les équations soient vérifiées dans certaines classes de modèles assez généraux.

2. Validité d'une équation

On dira que l'équation a= b est <u>valide</u> (pour la validité intentionnelle faible, VIF) si a=b est vraie dans tous les modèles du système. On montre que la validité VIF d'une équation est décidable. Pour celà on introduit des nouvelles règles de réduction (pour les termes contenant des variables libres) réduisant certains termes de type () (par exemple les variables de ce type) en V ou F. La donnée d'un ensemble cohérent de telles règles s'appelle <u>valuation</u>. Pour chaque valuation $\mathbb{L}$, on a donc une notion de $\mathbb{L}$-réduction, $\mathbb{L}$-forme normale. On prouve que a=b est VIF ssi a et b ont même forme normale pour tout $\mathbb{L}$, et la décidabilité est alors un corollaire évident.
Mais en général, pour les besoins de l'interprétation fonctionnelle, on a besoin d'une définition de la validité d'une équation plus restrictive que VIF. (Par exemple VIF ne vérifie pas les axiomes de l'égalité pour le type o, et on ne sait pas si leur adjonction préserve la décidabilité; à fortiori, VIF n'est pas clos par rapport à l'induction sur les équations).
On est amené à définir une extension VI de VIF, qui est close par rapport à ce schéma. Il en résulte que VI est indécidable.
VIF et VI sont aussi définissables à l'aide d'une axiomatique (voir tableau).

<u>V Démonstrations de cohérence pour les systèmes formels</u>

Une démonstration formelle de cohérence pour une théorie T (dont nous sommes convaincus par ailleurs de la cohérence) peut avoir de nombreux à côtés intéressants.

Par exemple, soit T une théorie $(T=HA_1,HA_2,\ldots)$, $T^{(i)}$ un sous-système <u>fini</u> (voir plus loin) de T. Il est possible de formaliser la démonstration la plus bête de la cohérence de $T^{(i)}$ dans T en construisant (localement) un modèle de $T^{(i)}$ dans T. Ceci est possible grâce au résultat bien connu de Gentzen (la propriété de la sous-formule). Pour chaque énoncé A, nous obtenons une démonstration formelle du résultat "si A est prouvable dans $T^{(i)}$, alors A". Ce résultat, et les formulations diverses qu'on peut en donner, est connu sous le nom de <u>schéma de réflexion</u>.

Ainsi, une des applications les plus simples des preuves formelles de cohérence est le schéma de réflexion pour les sous-systèmes finis. Il permet de donner des démonstrations locales suffisemment générales de résultats qui ne sont pas globalement formalisables.

On définit les sous-systèmes finis des systèmes fonctionnels, en restreignant l'application de certains schémas (récursion, extraction, etc...) : on demande que dans REC^{σ}, $a\{\sigma\}$,..le type σ appartienne à un ensemble de types engendré par un nombre fini d'entre eux, au moyen des opérations de changement de nom des variables libres et de substitution réciproque. Prenons par exemple le cas de OF_2 : le théorème de réductibilité pour OF_2 n'est pas démontrable dans HA_2. Si par contre, on considère un sous-système fini de OF_2, $OF_2^{(i)}$, on voit immédiatement que le théorème de réductibilité pour ce système se démontre, pour chaque fonctionnelle a, à partir d'un certain nombre de compréhensions et d'inductions, ne dépendant pas de a, et que cet ensemble d'axiomes constitue un sous-système fini de HA_2, soit $HA_2^{(j)}$. En appliquant le schéma de réflexion de $HA_2^{(j)}$ dans HA_2, on en déduit une démonstration dans HA_2 de "tout terme de $OF_2^{(i)}$ est absolument normalisable".

D'autre part, en formulant les systèmes logiques en termes de systèmes de déduction naturelle, on aboutit au concept essentiel de démonstration sans coupure (à ne pas confondre avec la notion similaire pour les systèmes de séquents).

Les inférences logiques sont divisées en deux catégories : les introductions et les éliminations. Les coupures sont des redondances dans les démonstrations formelles. Elles se rencontrent en général quand une élimination suit immédiatement une introduction. Les démonstrations sans coupure ont des propriétés très intéressantes, spécialement pour les systèmes du premier ordre (propriété de la sous-formule). Leur intérêt, pour les systèmes d'ordre supérieur, quoique plus limité, est cependant indéniable.

On montre élémentairement qu'il existe un isomorphisme entre systèmes de déduction naturelle et certains systèmes fonctionnels. L'image isomorphique des déductions sans coupure n'est autre que l'ensemble des formes normales. La transportée par cet isomorphisme de la relation de réduction définit le processus de normalisation. Le théorème de réductibilité pour les systèmes fonctionnels trouve alors son analogue dans le théorème de normalisation forte.

Les sous-systèmes finis des systèmes de déduction sont obtenus au moyen de cet isomorphisme, à partir de la notion similaire déjà définie pour les systèmes fonctionnels.
Il y a plusieurs façons non équivalentes de dire qu'un système de déduction naturelle admet "sufisemment" de démonstrations sans coupures : considérons les énoncés
(H) (Hauptsatz) Si A est démontrable, il est démontrable sans coupure.
(N) (Normalisation faible) Si $\mathbb{D}$ est une démonstration de A, on peut normaliser $\mathbb{D}$ en une démonstration sans coupure.
(NF) (Normalisation forte) L'ensemble des suites de normalisations strictes de A est fini.
En général, (NF) $\rightarrow$ (N) $\rightarrow$ (H); des exemples simples montrent que les implications réciproques ne sont pas toujours vraies. Par exemple,

soit T un système de déduction dans lequel il existe un A ne vérifiant pas (N). Soit T' le système obtenu en ajoutant l'axiome (règle d'introduction sans prémisse) A. Alors A vérifie (H) dans T', mais pas (N).
Le problème du choix des règles de réduction se traduit isomorphiquement par celui du choix de la procédure de normalisation. On débouche sur le problème délicat de l'identité de preuves. Pour plus d'informations sur ce sujet, voir Kreisel 1970 et Prawitz 1970.

Pour les sous-systèmes finis, le théorème de normalisation forte est démontrable dans le système global.

Soit T une théorie (par exemple $T=HA_2$), $T^{(i)}$ un sous-système fini de T. On prouve formellement dans T que, si $\exists xA$ est démontrable dans $T^{(i)}$ ($\exists xA$ clos), alors il existe un n tel que $A[\bar{n}]$ soit prouvable dans $T^{(i)}$. Ce résultat se généralise de diverses façons, à l'aide du schéma de réflexion.

VI Interprétations fonctionnelles

Soit T une théorie ($T=HA_1$, HA_2), F un système fonctionnel ($F=OF_1$, OF_2). L'interprétation fonctionnelle de T dans F traitée dans cet exposé associe à tout énoncé A de T une expression A* de la forme $\exists x^\sigma \forall y^\tau\, E_A(x,y)$, où E_A est une équation de F. La fonction $E \to E_A$ est récursive primitive. On dit $\exists x \forall y\, E_A(x,y)$ est valide ssi on peut trouver a (ne contenant pas y) tel que $E_A(a,y)$ soit vérifiée (voir IV).

L'interprétation fonctionnelle vérifie alors

- si A est prouvable dans T, A* est valide
- $\perp$* n'est pas valide

En particulier, on peut caractériser les fonctions récursives qu'on peut montrer être totales dans T (fonctions récursives prouvables de T) à l'aide des systèmes fonctionnels. Ainsi, les graphes des fonctions récursives prouvables de HA_n sont exactement les graphes associés aux fonctions (fonctionnelles de type $o \to o$) de OF_n.

L'interprétation de T dans F assure aussitôt, modulo le théorème de réductibilité pour F, la cohérence de T.

Par exemple, soit T la théorie HA_n + (CT_n), où CT_n est une forme forte de la thèse de Church. T s'interprète dans le système fonctionnel OFA_n. D'autre part le théorème de réductibilité pour OFA_n est prouvable localement (c'est à dire pour les sous-systèmes finis) dans HA_n. On en déduit immédiatement la cohérence relative de HA_n + (CT_n) par rapport à HA_n. (CT_n) exprime formellement que toute fonction calculable est définie par une fonction de OFA_n. En particulier, la négation du théorème de réductibilité pour OFA_n est conséquence formelle de (CT_n).

Puisqu'il existe en général des énoncés non prouvables dans T, mais dont l'interprétation est valide, on en déduit non seulement leur cohérence relative, mais aussi leur caractère conservatif par rapport à certaines classes d'énoncés, et des résultats de clôture, par exemple :

> Le Principe de Markov est interprétable dans OF_n, alors qu'il n'est pas dérivable dans HA_n. En combinant ce fait avec l'élimination des coupures et le schéma de réflexion, on démontre la côture de HA_n pour la <u>règle</u> de Markov.

Finalement, les interprétations fonctionnelles permettent dans certains cas une réduction du problème de la prouvabilité dans T à la solution d'une équation de F d'un type particulier, notemment pour les énoncés purement universels.

Je tiens à remercier le Professeur Kreisel pour ses suggestions (notemment les résultats de V.sec.5 et VI.sec.2. répondent à des problèmes qu'il m'a signalés) et ses critiques (par exemple les résultats de II.sec.5.,III.Ann.B, répondent à ses critiques touchant à un manque de clarté dans une version préliminaire).

Je remercie également M.Reznikoff pour ses encouragements et pour avoir vérifié un certain nombre de démonstrations.

Je remercie finalement le Professeur Choquet pour avoir eu la gentillesse de diriger mon sujet de thèse complémentaire.

CONSEILS GENERAUX DE LECTURE

La rédaction de cet exposé étant assez uniforme, il est peut être bon de donner quelques points de repères.

Approximativement, on peut dire que les résultats que nous exposons sont centrés sur la dualité 1er ordre / second ordre, l'accent étant plutôt mis sur le second ordre. Celà signifie, qu'au niveau des systèmes fonctionnels, le lecteur aura avantage à se concentrer en première lecture sur OF_1 et OF_2, au niveau des systèmes formels, sur HA_1 et HA_2.

En seconde lecture, on pourra se concentrer sur OFA_1 et OFB_1.

Les autres systèmes OF_n, OFA_n, OFB_n, ainsi que les HA_n, n'offrent alors plus de difficulté spéciale, quand les cas particuliers n=1 et n=2 ont été bien compris.

Nous avons adjoint un certain nombre de tableaux descriptifs et comparatif pour les cas n=1 et n=2.

TYPES ET SCHÉMAS FONCTIONNELS (cas $n \leqslant 2$)

TYPE	Schémas associés	Réductions	Observations
o	$\bar{o}$, S, REC^{σ}	$REC(a,b,\bar{o})$ /= a $REC(a,b,Sw)$ /= $b(REC(a,b,w),w)$	o est le type des entiers naturels.
$\sigma \to \tau$	λxa, APbc	$\lambda xa(b)$ /= $a[b]$	APab est abrégé en a(b).
$\bigwedge \alpha\sigma$	$DT\alpha a$, $EXTa\tau$	$DT\alpha a\{\tau\}$/= $a[\tau]$	$EXTa\tau$ est abrégé en $a\{\tau\}$. Problème de l'"uniformité".
$\sigma \times \tau$	$\otimes ab$, $\pi^1 c$, $\pi^2 c$	$\pi^i \otimes a_1 a_2$ /= a_i	Le type la plus simple. Correspond au produit cartésien
$\bigvee \alpha\sigma$	$I^{\tau}a$, $ST\alpha xbc$	$ST\alpha xbI^{\tau}a$ /= $b[\tau,a]$	Ultra-réductions
$\sigma + \tau$	$\amalg^1 a$, $\amalg^2 a$, $\oplus xybcd$	$\oplus xyb_1 b_2 \amalg^i a$ /= $b_i[a]$	Ultra-réductions
	O^{σ}	voir texte	redondant si n=1
	GD,RED	voir texte	contredit la continuité.
	$B^{\sigma\tau}$	voir texte (Bar-récursion)	nécessite la continuité. OFB_n définit les mêmes graphes de fctions rec. que OF_{n+1}.
	IND^{σ}	voir texte	Image isomorphe du schéma d'induction par l'isom. d'Howard. Inutilisé dans les systèmes fonctionnels proprement dits.
()	V,F,D^{σ}	$D(V,a,b)$ /= a $D(F,a,b)$ /= b	II-réductions

SYSTEMES FONCTIONNELS OF_1, OF_2 et OFA_1

NOM du SYSTEME F	OF_1	OF_2	OFA_1
SCHEMAS DE F	$\bar{o}$, S, REC λ, AP $\otimes, \pi^1, \pi^2$ O (redondant)	les schémas de OF_1, et DT, EXT I, ST	les schémas de OF_1, et GD, RED.
Le théorème de réductibilité pour $F^{(i)}$ se prouve dans	HA_1 (arithmétique de Heyting)	HA_2 (analyse non prédicative)	HA_1
Le système F permet l'interprétation fonctionnelle de	HA_1	HA_2	$HA_1 + (CT_1)$
Un modèle extensionnel standard de F est obtenu à l'aide de	HEO_1	HEO_2	impossible
Observations	Existence d'un modèle extens. stand. contenant la fction caract. de l'égalité.	Inexistence d'un tel modèle contenant la fction caract. universelle de l'égalité.	OFA_1 définit les mêmes graphes de fctions rec. que OF_1. On peut prouver la négation du th. de réductibilité ds $HA_1 + (CT_1)$

INFERENCES DANS LES SYSTEMES DE DEDUCTION

Enoncés	Introduction	schéma fcl correspondant	Elimination	schéma fcl correspondant
$A \to B$	$\dfrac{\begin{matrix}\cancel{A}\\ \vdots\\ B\end{matrix}}{A \to B}$	λxa	$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A \to B\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\\ A\end{matrix}}{B}$	$APab$
$A \wedge B$	$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\\ B\end{matrix}}{A \wedge B}$	$\otimes ab$	$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A_1 \wedge A_2\end{matrix}}{A_i}$	$\pi^i a$
$A \vee B$	$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A_i\end{matrix}}{A_1 \vee A_2}$	$\amalg^i a$	$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A \vee B\end{matrix} \quad \begin{matrix}\cancel{A}\\ \vdots\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}\cancel{B}\\ \vdots\\ C\end{matrix}}{C}$	$\oplus xyabc$
$\bot$	pas d'introd.	sans objet	$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \bot\end{matrix}}{A}$	H^{τ}
$\forall xA$	$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A\end{matrix}}{\forall xA}$	$DT\alpha a$	$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \exists xA\end{matrix}}{A[T]}$	$EXTa\tau$
$\exists xA$	$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A[T]\end{matrix}}{\exists xA}$	$I^{\tau}a$	$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \exists xA\end{matrix} \quad \begin{matrix}\cancel{A}\\ \vdots\\ B\end{matrix}}{B}$	$ST\alpha xbc$

AUTRES SCHEMAS

Schéma	Signification	schéma fcl correspondant
A	Hypothèse	x^{τ}
$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A\,o\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\\ Ax\end{matrix}\ ASx}{At}$	Induction	IND

AXIOMATIQUE DE VIF

(VIF 1) $$\frac{a =_{AS} b \qquad a}{b} \qquad (*)$$

(VIF 2) $$\frac{a(V) \qquad a(F)}{a(b)}$$

(VIF 3) $$V$$

(VIF 4) $$\frac{a \qquad a \to b}{b}$$

(VIF 5) $$\frac{a(I^{\alpha} x)}{a(t)} \qquad (**)$$

(VIF 6) $$\frac{a(\amalg^{1} x) \qquad a(\amalg^{2} y)}{a(t)} \qquad (***)$$

(*) $a =_{AS} b$ signifie l'égalité des formes normales de a et b "ancien style".
c'est à dire indépendemment des $\mathbb{L}$-réductions.

(**) α et x ne sont pas libres dans a.

(***) x et y ne sont pas libres dans a.

SCHEMA SUPPLEMENTAIRE POUR VI

(VI) $$\frac{A\,[\bar{o}, z] \qquad A\,[x, Sz] \to A\,[Sx, z]}{A\,[t, \bar{o}]}$$

DEFINITIONS ESSENTIELLES DE LA SECONDE PARTIE

a <u>possède tous ses rédions</u> (stricts) ssi tout sous-terme RED(b,c) de a, b et c normaux et clos, admet une forme normale.

ABSOLUE NORMALISABILITE

- si a est normal, a est AN
- si a possède tous ses rédions stricts, et si tous les rédions stricts de a sont AN, a est AN.

DEGENERES

Si b est soit a, soit un dégénéré de a, et si c est b(d), $b\{\sigma\}$, $\pi^1 b$, $H^\sigma b$, $\oplus$xyefb, ST αxdb, c est un dégénéré de a.

(Si on supprime les dégénérescences H, $\oplus$, ST, on obtient les <u>dégénérés inverses</u> de a)

SIMPLICITE

a est simple ssi pour tout dégénéré inverse b de a et tout c tel que $b \mathrel{/{=}_s} c$, la dernière règle de réduction utilisée est stricte.

CANDIDATS DE REDUCTIBILITE

Un ensemble A de termes est un CR de type σ ssi A vérifie

(CR 1) si $a \in A$, a est de type σ.

(CR 2) si $a \in A$, a est AN.

(CR 3) si a est un terme simple et AN de type σ, $a \in A$.

(CR 4) si a est un terme simple de type σ possédant tous ses rédions stricts et tel que tous les rédions stricts de a soient dans A, $a \in A$.

(CR 5) si $a \in A$ et a /= b, alors $b \in A$.

DEFINITIONS POUR LES ULTRA-REDUCTIONS

a -/ b ssi

(i) b ne commence ni par $\oplus$, ni par ST, ni par H, et a=b

(ii) b est $\oplus$xycde et a -/ d ou a -/ e .

(iii) b est STαxcd et a -/ c

a =/ b ssi b', b /= b' et a -/ b'.

Critère (CR" 4), pour les ultra-rédustions; dans ce qui suit, f désigne une suite de dégénérescences inverses.

<u>Types disjonctifs</u>

Supposons que :

(i) c est un terme AN

(ii) f a et f b sont dans A

(iii) pour tout $\amalg^1 e$ (resp. $\amalg^2 e$) tel que $\amalg^1 e$ =/ c (resp. $\amalg^2 e$ =/ c), f a[e] (resp. fb[e]) est dans A.

alors f ⊕xyabc est dans A.

<u>Types existentiels</u>

Supposons que

(i) b est un terme AN.

(ii) f a est dans A.

(iii) pour tout $I^{\tau} c$ =/ b, fa[τ,c] est dans A.

alors fSTαxab est dans A.

<u>Type absurde</u>

Supposons que

(i) a est un terme AN.

(ii) les fcl contenues dans la suite f sont AN

alors f H^{σ}a est dans A.

TABLE DES MATIERES

Section 2 : Le théorème de réductibilité 1

Démonstration du résultat "tout terme est absolument normalisable" par induction sur la construction des fcl, en montrant le résultat "tout terme est réductible".

Section 3 : Le théorème de réductibilité 2

La section ne couvre que les fcl décrites en section 2 de la première partie. Nous examinons ici les schémas de la section 5 de la première partie. La partie non évidente de la section 3 est consacrée au théorème de réductibilité pour les systèmes avec ultra-réduction.

Section 4 : Modèles des systèmes fonctionnels

Définition du type (). Définition du concept de modèle.

Section 5 : Structures HEO_n et HRO_n

Interprétation de certains systèmes fonctionnels à l'aide d'indices de fonctions récursives partielles.

Annexe : Un contre-exemple

Un schéma d'apparence simple qui contredit la réductibilité.

Troisième Partie : Le formalisme de la théorie des ordres

Section 1 : Le calcul des prédicats d'ordre fini

Définition du langage de la théorie des ordres (=théorie des types). Description des systèmes de déduction naturelle.

Section 2 : La théorie des ordres

Axiomes de la théorie des ordres. Enoncé des résultats bien connus de traduction.

Section 3 : Elimination des coupures

Définition de l'isomorphisme d'Howard. Coupures. Règles de conversion (ou de normalisation). Théorème de normalisation forte.

Section 4 : Le schéma de réflexion

Démonstration du schéma de réflexion pour les sous-systèmes finis de la théorie des ordres.

Section 5 : Démonstration du théorème de réductibilité pour les sous-systèmes finis

Réénonciation des conditions sur les CR en termes de faisceaux. Application du schéma de réflexion pour obtenir un résultat global pour chaque sous-système fini.

Section 6 : Fonctions récursives prouvables

Définition, et application des résultats de la section 5.

Annexe A : Le système U

Description d'un système formel U qui généralise dans un certain sens les principes de la théorie des ordres. Dérivation d'un paradoxe dans U.

Annexe B : Modèles extensionnels contenant l'égalité

Application de l'annexe A pour montrer qu'il n'y a pas de modèle extensionnel de OF_2 contenant la fonction caractéristique universelle de l'égalité.

Quatrième Partie : Notions de validité

Section 1 : Vérité dans un modèle

Définition et enoncé de quelques propriétés de base.

Section 2 : les $\mathbb{L}$-réductions

Définition des termes clef et des valuations. Théorème de $\mathbb{L}$-forme normale.

Section 3 : Validité intentionnelle faible et $\mathbb{L}$-réductions.

Démonstration de la décidabilité de VIF à l'aide des $\mathbb{L}$-réductions.

Section 4 : Cas des types disjonctifs

Section 5 : Validité intentionnelle

Définition de VI, et énoncé de ses propriétés.

Section 6 : Notions de validité

Annexe A : Elimination des zéros

Annexe technique, où l'on indique un procédé qui peut permettre de se passer du schéma O dans certains cas. Peut être omis.

Annexe B : Modèles des systèmes fonctionnels et théorie des modèles

Nous exposons rapidement les relations entre notre définition d'un modèle et la notion familière de modèle d'une théorie logique.

Cinquième partie : L'interprétation de Gödel

Section 1 : L'interprétation de Gödel et ses variantes

Définition de la validité d'une expression formelle $\exists x \forall y \; A \; [x,y,\underline{Z}]$.

Clauses inductives de l'interprétation fonctionnelle.

Section 2 : Interprétation de Gödel de l'arithmétique

Démonstration des résultats au premier ordre.

Section 3 : Interprétation de l'axiome de Spector

Une version (un peu) différente de la démonstration de Spector. Il est montré que l'on n'utilise qu'un cas très particulier d'extensionalité.

Section 4 : Interprétation des quantifications d'ordre supérieur

Extension des résultats à un ordre arbitraire.

Section 5 : Interprétation de la thèse de Church

On interprète HA_n + (CT_n) dans OFA_n. Cohérence relative de (CT_n) par rapport à HA_n.

Section 6 : Interprétation du principe de Markov

Section 7 : No counterexemple interpretation

Reformulation du résultat bien connu de Kreisel en termes de VI et VIF.

Annexe : Interprétation à l'aide des variantes

Interprétation à l'aide de types disjonctifs. Peut être omis.

Sixième partie : Applications à la théorie des ordres

Section 1 : Les corollaires existentiels

Application du schéma de réflexion et de l'élimination des coupures pour obtenir des résulats de clôture.

Section 2 : Clôture par rapport à la règle de Markov

Ce résultat de clôture est obtenu à l'aide de l'interprétation fonctionnelle de la normalisation et de la réflexion.

Section 3 : Prouvabilité des énoncés récursifs primitifs

Application de l'interprétation fonctionnelle et de VI.

NOTES

<u>Système OF_1</u> : dans la littérature, système T, du à Gödel 1958. En 1958-59, dans ses course-notes, Kreisel définit HRO et HEO (dans notre terminologie, HRO_1 et HEO_1). Dans Kreisel 1959, on trouve entre autre la preuve de l'interprétabilité du principe de Markov, et le non counterexample. Le système T est reformulé dans Spector 1962, et Tait 1967, qui donne la démonstration de réductibilité sous une forme à peine différente de celle que nous avons donnée pour OF_1. Le fait que l'interprétation des axiomes de l'arithmétique est valide a été vérifié dans Spector 1962, et aussi Yasugi 1963.

<u>Système OFB_1</u> : Dans son papier de 1962, Spector introduit un système (sans quantificateurs) Σ_4 pour des fonctionnelles (extensionnelles) de type fini contenant la Bar-récursion. Dans son papier de 1970, Tait définit un ensemble de termes (OFB_1) qui donne un modèle de Σ_4
Nous montrons que l'interprétation fonctionnelle n'utilise qu'un cas particulier d'extensionalité, ce qui permet d'étendre la démonstration de Spector aux systèmes SA_n, au moyen des systèmes OFB_n introduits, pour $n > 1$, dans Girard 1971. En particulier, OFB_n et OF_{n+1} définissent les mêmes graphes de fonctions récursives.

<u>Système OF_2</u> : Système fonctionnel introduit dans Girard 1970. L'interprétation de l'analyse dans OF_2 est nettement plus simple que dans Σ_4 ou OFB_1. Par contre, la signification de OF_2 est beaucoup moins claire. La démonstration de la réductibilité pour OF_2 nécessite l'introduction des candidats de réductibilité. Sur un plan différent, une construction similaire avait été exposée pour la réalisabilité par Kreisel et Troelstra 1970 (article écrit en 1968). Troelstra 1971 généralise HRO_1 au second ordre par la construction de HRO_2. HEO_2 a été construit spécialement pour cet exposé (Juin 1972).

Systèmes OFA_n : Systèmes fonctionnels introduits dans Girard 1971 pour répondre à une question de Kreisel, formulée notemment dans Kreisel 1970. La cohérence relative de HA_2 + (CT) avait déjà été prouvée dans Kreisel-Troelstra 1970, par des méthodes de réalisabilité.

Systèmes OF_n : $(n > 2)$ Introduits dans Girard 1971, pour obtenir l'interprétation fonctionnelle de la théorie des types. Dans le même papier, l'auteur décrit aussi les OFB_n $(n \geqslant 2)$.

Systèmes de déduction naturelle

La découverte des systèmes de déduction naturelle, si elle remonte à Gentzen dans les années 30, restera sans conséquence importante jusqu'au livre de Prawitz 1965. Takeuti 1953 décrivait d'autre part en termes de séquents classiques un système G^1LC pour le second ordre, et émettait sa "conjecture fondamentale" sur l'élimination des coupures dans G^1LC.

Sous la forme "Hauptsatz", ce résultat fut prouvé de diverses façons, par Tait 1966, Takahashi 1967, Prawitz 1968. La démonstration de la réductibilité pour OF_2 inspira une triple preuve de normalisation pour HA_2, dans Girard, Martin-Löf et Prawitz 1970. Aucune de ces trois démonstrations ne prouvait la normalisation forte, mais, chose amusante, elles se complètent très bien, c'est à dire qu'en prenant une définition de la réductibilité très proche de celle de Girard 1970, des CR très proche de celle de Martin-Löf 1970 (en ajoutant des clauses d'absolue normalisabilité) (Martin-Löf énonce trois critères, qui, si on les réécrit en ajoutant des clauses pour assurer l'absolue normalisabilité, sont très proches de notre formulation de (CR 4); la définition de la simplicité, qui permet de donner une forme très générale à des critères épars, a été faite dans le cadre de ce travail.), et en reprenant les constructions de Prawitz 1970 (En particulier AN, et surtout, le critère (CR"4) que nous donnons ici généralise la démonstration de Prawitz pour les ultra-réductions au premier ordre.)

La démonstration très élégante de Church-Rosser que nous avons donnée, est due à Tait (non publié) . Cette démonstration a été présentée dans Martin-Löf 1971.(Pour le lambda-calcul, voir Barendregt 1971).

Pour HA_1 les résultats de normalisation sont dus à Jervell 1970; ces résultats sont un cas particulier de Martin Löf 1970 A.

Le schéma de réflexion : L'emploi systèmatique de ce schéma remonte à Kreisel 1959 et 1968. Les résultats essentiels sur la question sont exposés dans Kreisel et Levy 1968.

Les résultats de clôture : pour le premier ordre, ces résultats ont très souvent été obtenus au moyen de la réalisabilité. Pour un exposé approfondi sur le sujet, voir Troelstra 1970. Pour le second ordre, un cas particulier de la clôture par rapport à Markov est démontré dans Kreisel 1968, à l'aide des résultats de Spector 1962. La démonstration que nous donnons est exposée dans Girard 1971, et elle répond à une question de Kreisel. Kreisel a d'autre part montré (Kreisel 1970, p.122) que HA_1 n'est pas clos par rapport à la règle : si $(\forall x(A\vee\neg A)\to\neg\neg\exists xA)$ alors $(\forall x(A\vee\neg A)\to\exists xA)$.

Les résultats de clôture au second ordre ont été exposés dans Troelstra 1971, mais , ne disposant pas de procédé pour formaliser les démonstrations localement, il n'énonce les résultats que pour les énoncés clos. Troelstra considère un certain nombre de règles particulières que nous n'étudions pas ici.

Validité : Cette notion a été introduite dans cet exposé pour avoir une description claire des principes implicites utilisés dans les interprétations fonctionnelles. Le type (), qui correspond à quelque chose de très courant dans le lambda-calcul nous permet d'avoir des descriptions très simples (contrairement à o, utilisé précédemment dans la littérature), et des résultats comme la décidabilité de VIF.

<u>Autres sujets</u> : Les traductions de I.Sec.5. sont inspirées des résultats de Prawitz 1965; au moyen de l'isomorphisme d'Howard, introduit en 1969 par Howard.(Ce résultat essentiel nous permet de ramener la normalisation forte à un résultat déjà prouvé dans les systèmes fonctionnels.). La traduction de o est due à Martin-Löf 1970 B. L'exsistence de cette traduction nous a inspiré les résultats de I.Ann. .

Les relations de la Bar-récursion avec la thèse de Church et la continuité sont exposées dans Howard & Kreisel 1966. Pour une discussion détaillée de la thèse de Church, voir Kreisel 1968.

Dans Shoenfield 1967, une variante de l'interprétation de Gödel pour les systèmes classiques est donnée pour HA_1^c. Il n'y a pas de difficulté à étendre cette interprétation particulière aux ordres supérieurs, en utilisant des schémas analogues à (G10).

La notion de modèle que nous utilisons dans cet exposé diffère des notions courantes de modèle pour les systèmes fonctionnels en ce que

- soit aucune condition autre que celle d'interpréter la réduction n'était demandée, et en particulier l'existence de tels modèles est conséquence immédiate de Church-Rosser, et ils n'ont aucun intérêt pour l'interprétation fonctionnelle.
- soit les conditions exigées étaient trop fortes (il est très difficile d'exprimer simplement les conditions simples sur les tautologies à l'aide du type o, sans être amené à demander beaucoup plus que ce qu'on a en tête)

C'est pourquoi, nous avons introduit le type (), qui a des applications intéressantes, telles la décidabilité de VIF. De plus, nous avons mis l'accent sur la distinction entre /= et /=*, car, par exemple, HRO_1 ne définit un modèle de OF_1 que par rapport à /=*. Par contre, pour les modèles extensionnels, les conditions sur l'égalité sont équivalentes, qu'on les exprime en termes de /=O ou de /=*.

PREMIERE PARTIE

DESCRIPTION DES SYSTEMES FONCTIONNELS

SECTION 1 : ORDRES ET OPERATEURS

1. La hiérarchie des ordres

Les ordres sont donnés par la définition inductive :

(1) 0 est un ordre

(2) 1 est un ordre

(3) () est un ordre

(4) si $R_1,\ldots,R_n$ sont des ordres, $(R_1,\ldots,R_n)$ est un ordre.

Remarquons que (3) est un cas particulier de (4).

Il n'est pas nécessaire d'utiliser tous les ordres pour la construction des systèmes fonctionnels. En particulier, 0 et 1 jouent un rôle pratiquement insignifiant dans les deux premières parties.

Si nous n'utilisons qu'un sous-ensemble de la hiérarchie, il faudra bien entendu que ce sous-ensemble contienne (), et qu'il vérifie la propriété suivante : si $(\underline{R})$ est dans ce sous-ensemble, chaque élément de la suite $\underline{R}$ est aussi dans cet ensemble, ceci afin d'éviter des anomalies.

() sera l'ordre des types; similairement, ((),()) sera l'ordre des opérateurs binaires, qui, telle la flèche $\rightarrow$, agissent sur les types; similairement, tous les ordres construits sans les clauses (1) et (2) ont une interprétation du même genre.

2. Les opérateurs

Ce qui suit donne, pour chaque ordre R, une définition inductive de la notion d'opérateur d'ordre R.

2.1. Variables et constantes

- Variables : les variables d'ordre R, ou indéterminées d'ordre R,

$\alpha^R, \beta^R, \gamma^R, \ldots$ sont des opérateurs d'ordre R. On abrègera indéterminée en <u>ind.</u> et ind. d'ordre R en <u>R-ind</u>.

- Constantes : le choix des constantes dépend, bien entendu du système fonctionnel considéré. En général, o sera une constante d'ordre (). Dans la seconde partie, nous introduirons une autre constante d'ordre (), que nous noterons aussi ().

En vue de la troisième partie, remarquons que = est généralement parmi les constantes d'ordre (0,0), S parmi les constantes d'ordre 1, $\bar{o}$ parmi les constantes d'ordre 0, etc...

2.2. Opérateurs d'ordre 0 (en vue de la troisième partie)

- Si σ et τ sont des opérateurs d'ordres respectifs 1 et 0, $\sigma\tau$ est un opérateur d'ordre 0.

- Si σ et τ sont des opérateurs d'ordre 0, $\sigma+\tau$ et $\sigma.\tau$ sont des opérateurs d'ordre 0.

(Ainsi, les opérateurs d'ordre 0 sont définis comme les termes de l'arithmétique, construits en utilisant aussi éventuellement des variables de fonctions)

2.3. Opérateurs d'ordre (), ou <u>types</u>

- si σ et τ sont des types, $\sigma\to\tau$ est un type.
- si σ est un type, si α est une R-ind, $\bigwedge\alpha\sigma$ est un type.
- si σ, $\tau_1, \ldots, \tau_n$, sont des opérateurs d'ordres respectifs $(R_1,\ldots,R_n), R_1,\ldots,R_n$, $\sigma\tau_1\ldots\tau_n$ est un type.

2.4. Opérateurs d'ordre supérieur

Soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ des ind. distinctes d'ordres respectifs $R_1,\ldots,R_n$, et σ un type, c'est à dire un opérateur d'ordre (), $\lambda\alpha_1\ldots\alpha_n\sigma$ est un opérateur d'ordre $(R_1,\ldots,R_n)$.

3. Indéterminées libres et muettes

Dans $\Lambda\alpha\sigma$ et $\lambda\alpha_1\ldots\alpha_n\sigma$, $\alpha,\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, sont muettes. Ceci est suffisant pour pouvoir définir généralement la notion d'indéterminée libre et d'indéterminée muette. Nous faisons grâce au lecteur de cette fastidieuse définition.

Dans ce qui suit, nous supposons que tous les opérateurs utilisés sont libérés par un procédé quelconque des complications qui résultent d'un malencontreux usage des variables libres et muettes. Nous convenons d'identifier systématiquement, au niveau de l'écriture des objets qui ne diffèreraient que par les appellations différentes de leurs variables muettes. (Ceci est toujours possible, au moyen du "carré de Bourbaki".)

Nous ne définirons pas non plus la notion de substitution (combinatoire) d'un opérateur pour une ind. . Avec les conventions précédentes, cette opération s'effectue sans problème.

En général, nous noterons $[\alpha_1,\ldots,\alpha_n/\tau_1,\ldots,\tau_n]\sigma$ le résultat de la substitution simultanée pour $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ des opérateurs $\tau_1,\ldots,\tau_n$, sous réserve que l'ordre de α_i soit égal à celui de τ_i (i=1...n).

Si la suite α_i est déterminée sans ambigüité par le contexte, nous pourrons adopter la notation $\sigma[\tau_1,\ldots,\tau_n]$.

4. Egalité entre opérateurs

La définition de l'égalité entre opérateurs est une conséquence nécessaire de l'interprétation des opérateurs :

4.1. Signification des opérateurs

- o est le type des entiers
- $\sigma\to\tau$ est le type des fonctions qui, à tout objet de type σ , associent un objet de type τ .
- $\Lambda\alpha\sigma$ est le type des objets qui sont définis "uniformément" sur les types $\sigma[\tau]$, pour tout τ .

- $\sigma\tau_1\ldots\tau_n$ est le type obtenu en appliquant les arguments $\tau_1,\ldots,\tau_n$ à l'opérateur σ.
- $\lambda\alpha_1\ldots\alpha_n\sigma$ est l'opérateur, qui, appliqué aux arguments $\tau_1,\ldots,\tau_n$, prend la valeur $\sigma[\tau_1,\ldots,\tau_n]$.

Ainsi, ce qui précède suppose l'identification de $\lambda\alpha_1\ldots\alpha_n\sigma\tau_1\ldots\tau_n$ et de $\sigma[\tau_1,\ldots,\tau_n]$.

4.2 Opérateurs normaux

Un opérateur est <u>normal</u> ssi il ne renferme parmi ses sous-opérateurs (c'est à dire les opérateurs qui lui sont antérieurs dans sa construction) aucun type de la forme $\lambda\alpha_1\ldots\alpha_n\sigma\tau_1\ldots\tau_n$.

4.3. Réduction des opérateurs

La relation de préordre /= définie entre opérateurs de même ordre par

(OR 1) σ /= σ

(OR 2) si σ /= τ et τ /= ρ, alors σ /= ρ

(OR 3) si σ' est obtenu à partir de σ par remplacement d'une apparition de τ par une apparition correspondante d'un τ' tel que τ /= τ', alors σ /= σ'.

(OR 4) $\lambda\alpha_1\ldots\alpha_n\sigma\tau_1\ldots\tau_n$ /= $\sigma[\tau_1,\ldots,\tau_n]$

est appelée relation de <u>réduction</u>. σ /= τ se lit " σ se réduit en τ ".
Si σ /= τ, et si τ est normal, alors τ est <u>une forme normale</u> de σ.

<u>THEOREME 1</u>

Tout opérateur admet une forme normale et une seule, que nous appelerons <u>sa</u> forme normale.

<u>Démonstration</u>

Le théorème 1 peut être obtenu directement par des procédés élémentaires. Mais cependant, il apparaîtra que les opérateurs se plongent isomorphiquement dans une partie très restreinte des systèmes fonctionnels, et que donc, le théorème 1 est conséquence des résultats généraux des deux premières parties. Pour voir que cette justification ne tourne pas en rond, il nous suffit de remarquer que l'image isomorphique de l'ensemble des opérateurs est un système fonctionnel qui n'utilise pas la notion générale d'opérateur.

4.4. Egalité de deux opérateurs

Nous dirons que deux opérateurs sont <u>égaux</u> ss'ils ont la même forme normale. Ceci constitue évidemment une relation d'équivalence, d'après le théorème 1.

Dans ce qui suit, nous convenons d'identifier toujours un opérateur avec sa forme normale. Ainsi, "α est libre dans σ" signifiera que α est libre dans la forme normale de σ . De même, $\sigma[\tau]$ représentera la forme normale de $\sigma[\tau]$, tel qu'il a été défini en 3.

Cependant nous n'avons pas défini les opérateurs non-normaux pour le plaisir de nous restreindre ensuite aux opérateurs normaux. En fait dans certains cas il s'avère malaisé de raisonner directement sur les opérateurs normaux. Le détour par les opérateurs non normaux sera alors simplificateur. Cette situation se présentera lorsqu'il s'agira de définir des propriétés par induction sur les opérateurs, comme la QR de la seconde partie. Il nous faudra bien entendu nous assurer de la clôture de nos définitions par rapport à l'égalité telle que nous venons de la définir.

Dans les cas où la notion d'égalité entre opérateurs utilisée ne ressort pas clairement du contexte, nous réfèrerons à l'égalité des écritures formelles (modulo les changements de variables muettes) de 3. sous le nom d'<u>égalité syntaxique</u>, alors que la notion que nous venons de définir sera appelée <u>égalité modulo les ORi</u>.

SECTION 2 : LES FONCTIONNELLES I

Ce qui suit est une définition inductive, pour chaque type σ , de la notion de fonctionnelle de type σ . (ou σ -fonctionnelle, ou σ -fcl, ou fcl si le type n'importe pas ou ressort clairement du contexte) On pourra aussi employer l'expression "terme", qui aura le même sens.

Bien entendu, de même que l'ensemble des ordres que l'on considère peut être restreint, nous pouvons de même restreindre l'ensemble des opérateurs, et l'ensemble des fonctionnelles. Il y a même des schémas qui sont mutuellement incompatibles, tels B d'une part, GD et RED de l'autre. En section 5, nous donnerons une terminologie pour les systèmes fonctionnels courants.

Une coupure très nette s'établit entre deux types de schémas de construction de fonctionnelles. Certains d'entre eux, les schémas logiques sont liés à la notion de démonstration intuitionniste (voir troisième partie), tout en ayant cependant une signification évidente dans les systèmes fonctionnels proprement dits. Les autres schémas, qui supposent généralement l'utilisation du type o, n'ont pas d'interprétation complètement satisfaisante en termes de démonstrations; nous les appellerons schémas fonctionnels.

Typiquement, la lambda-abstraction appartient aux schémas logiques, alors que la Bar-récursion est un schéma fonctionnel.

1. Schémas logiques

1.1. Variables

Pour chaque type σ , les variables de type σ , x^{σ}, y^{σ}, z^{σ},... sont des σ -fcl.

Qui dit variables dit tôt ou tard distinction entre variables libres et variables muettes. Nous faisons des conventions similaires à celles de la section 1.3. . Il nous suffira d'indiquer quels sont les schémas mutifiants, au cours de notre description.

1.2. Schémas liés à $\rightarrow$.

- Si a est une τ-fcl, x une σ-variable, λxa est une $(\sigma\rightarrow\tau)$-fcl.
- Si a est une $(\sigma\rightarrow\tau)$-fcl, si b est une σ-fcl, APab est une τ-fcl, usuellement notée a(b), ou encore ab.

Exemples et signification

a(b) représente la valeur de la fonction a (voir sec.1.4.1.) sur l'argument b. AP est donc une abréviation pour application. λxa , dans lequel x est muet, est obtenu par λ-abstraction, et dénote la fonction qui, à tout b de type σ, associe la fcl de type τ $a[b]$. Cette explication implique que nous aurons plus tard à identifier λxa(b) avec $a[b]$. Si σ est un type, d'après 1.1. et 1.2., $\lambda x^{\sigma} x^{\sigma}$ est une fonctionnelle de type $\sigma\rightarrow\sigma$. Les explicatioBs que nous avons données montrent que λxx(b) doit être entendu (pour le moment heuristiquement) comme b. C'èst à dire que $\lambda x^{\sigma} x^{\sigma}$ représente l'application identique.

1.3. Schémas liés au Λ .

-si a est une σ - fcl, et si α est une R-ind stratifiable dans a, c'est à dire que α n'est pas libre dans l'indice supérieur d'une variable libre de a, DTαa est une $(\Lambda\alpha\sigma)$-fcl.

- si a est une $(\Lambda\alpha\sigma)$-fcl (α d'ordre R), et si τ est un R-opérateur, EXTaτ est une $(\sigma[\tau])$-fcl. On abrège EXTaτ en $a\{\tau\}$, ou encore aτ .

Exemples et signification

DT (la stratification universelle) et EXT (l'extraction) offrent de grandes similitudes avec λ et AP. Remarquons d'abord que α est muet dans DTαa. Si a est une $\Lambda\alpha\sigma$-fcl, et τ un opérateur, $a\{\tau\}$ désigne la composante de l'ensemble "uniforme" de fcl (voir sec.1.4.1.) représenté par a, pour l'opérateur τ , c'est à dire sa composante sur $\sigma[\tau]$. DTαa désigne l'ensemble "uniforme" de fcl dont la composante pour τ est $a[\tau]$.

En reprenant l'exemple donné en 1.2., $\lambda x^\alpha x^\alpha$ est une $(\alpha \to \alpha)$-fcl; il en résulte que $DT\alpha\, \lambda x^\alpha x^\alpha$ est une fcl de type $\Lambda\alpha(\alpha \to \alpha)$, qui correspond à la donnée uniforme de toutes les applications identiques d'un type sur lui-même. Les indications heuristiques sur la signification de DT et EXT nous laissent pressentir l'identifaication de $DT\alpha\, a\{\tau\}$ et de $a[\tau]$. Ainsi $DT\alpha\, \lambda x^\alpha x^\alpha\{\tau\}$ sera $\lambda x^\tau x^\tau$. La condition "α stratifiable dans a" vient naturellement de l'isomorphisme entre DT et la règle de $\forall$-introduction (III,sec.1,2.5.1); on peut aussi remarquer que, si par exemple, on avait le droit de former $DT\alpha x^\alpha$, la variable libre x n'aurait plus de type, puisque dès que α est muet, α perd toute identité.

2. Schémas fonctionnels

Tous les schémas présentés ici supposent le type o. Les schémas 2.2. et 2.3. sont exclusifs les uns des autres.

2.1. Récursion

- $\bar{o}$ est une fcl de type o.
- S est une fcl de type $o \to o$.
- Pour chaque type σ, REC^σ est une fcl de type $(\sigma, (\sigma, o \to \sigma), o \to \sigma)$.

(nous avons utilisé l'abréviation bien connue $(\rho, \sigma \to \tau)$ pour $(\rho \to (\sigma \to \tau))$.)

Exemples et signification

Si on définit le terme $\bar{n}$ par $\overline{p+1} = S\bar{p}$, on voit que le type o est le type des entiers, S représentant le successeur de l'arithmétique.

De par sa définition, REC^σ peut prendre trois arguments a,b,et c. REC(a,b) est une fonctionnelle de type $o \to \sigma$ définie par récursion à partir de a et b, a étant la base de la récursion (c'est à dire que $REC(a,b,\bar{o})$ dénotera a), et b nous permettant de passer de $\bar{n}$ à $\overline{n+1}$, (c'est à dire que si $REC(a,b,\bar{n})$ a été reconnu comme étant c, $REC(a,b,S\bar{n})$ dénotera $b(c,\bar{n})$).

Si on considère les termes suivants

Ad : $REC\,\lambda x^o x^o\, \lambda x^{o\to o} \lambda z^o \lambda y^o S(x^{o\to o}(y^o))$

$\cdot$: $REC\,\lambda x^o \bar{o}\, \lambda x^{o\to o} \lambda z^o \lambda y^o Ad(x^{o\to o}(y^o), y^o)$

P : $REC\,\bar{o} \lambda x^o \lambda y^o y^o$

on vérifie que

$Ad(\bar{n},\bar{o}) = \bar{n}$, $Ad(\bar{n},S\bar{m}) = S(Ad(\bar{n},\bar{m}))$

$\cdot(\bar{n},\bar{o}) = \bar{o}$, $\cdot(\bar{n},S\bar{m}) = Ad(\cdot(\bar{n},\bar{m}),\bar{n})$

$P(\bar{o}) = \bar{o}$, $P(S\bar{n}) = \bar{n}$

l'égalité désignant ici la signification heuristique des concepts (rappelons que cette signification n'a pas encore été donnée de manière formelle, et que, de plus, même si cette signification a été rigoureusement définie, il nous faudra encore établir son bien fondé)
De manière évidente, Ad,.,P, désignent respectivement l'addition, la multiplication, le prédecesseur de l'arithmétique.

2.2. La Bar-Récursion

Pour tous types σ et τ , $B^{\sigma\tau}$ est une fcl de type
$(\tau, ((\sigma\to\tau)\to\tau), ((o\to\sigma)\to o), (o\to\sigma), \sigma, o\to\tau)$.

Ainsi que l'a montré Tait, il peut être utile d'adjoindre le "schéma" suivant : si $\varphi = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fcl closes de type σ (σ,φ) est une fcl de type $(o\to\sigma)$. Il est facile de remarquer que l'application de ce nouveau schéma nécessite de penser les termes non plus en tant qu'objets représentables par des entiers, mais en tant qu'objets codables par des suites d'entiers, c'est à dire des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, une suite de suites d'entiers étant bien entendu encore représentable par une suite d'entiers.

__N.B.__ Les fcl (σ,φ) ne font pas à proprement parler à inclure dans le formalisme des systèmes fonctionnels. D'ailleurs la plupart d'entre elles sont pathologiques. Cependant, afin de prouver les propriétés de réductibilité de B, certaines de ces fcl sont très utiles. Il va donc de soi que nous n'entendrons plus parler de ces fcl particulières dès que les propriétés fondamentales de B auront été établies.

Il est difficile d'expliquer en peu de lignes la signification de B. Nous nous conterons de dire que B exprime la récursion sur un ensemble bien fondé de termes.

2.3. Arithmétisation

GD est une fcl de type $(o \to o) \to o$.

RED est une fcl de type $(o \to o) \to (o \to o)$.

GD et RED expriment des propriétés (limitées) de réflexion d'un système fonctionnel dans lui-même. GD est une numérotation de Gödel des fcl closes de type $(o \to o)$, et RED est une arithmétisation des calculs des fcl de type $(o \to o)$. Rien ne nous oblige à nous cantonner au type $(o \to o)$; nous le faisons pour des raisons de simplicité uniquement; il va de soi que la généralisation de GD et RED à tous les types construits à partir de o et de $\to$ est sans problème.

SECTION 3 : NOTION DE REDUCTION

Dans ce qui suit, nous allons définir une relation de préordre entre fonctionnelles, la relation de réduction, notée /= . Nous commencerons par définir certaines fcl maximales pour ce préordre, c'est à dire les termes normaux. La relation de réduction est exactement la relation "se calcule en", et les termes normaux ne sont autres que les termes explicitement calculés.

1. Termes normaux

Un terme est normal si aucun de ses sous-termes n'est de la forme :

$\lambda xa(b)$ (1)

$DT\forall a\{\tau\}$ (2)

$RECfg\bar{o}$ (3a)

$RECfgSw$ (3b)

$Brstuvw$ (4)

$(\sigma, \underline{\varphi})\bar{n}$ (5)

$GD(a)$ (6)

$RED(a,b)$ (7)

avec les conditions supplémentaires

(4) t,u,v,w, sont clos (ce qui signifie que, entre autres le type σ, dans $B^{\sigma\tau}$, est clos, car, si u est clos, son type $o\to\sigma$ est necessairement clos.)

(5) la suite $\underline{\varphi}$ est formée de fcl normales; en fait, nous n'utiliserons la construction auxiliaire $(\sigma, \underline{\varphi})$, que lorsque $\underline{\varphi}$ vérifie cette condition.

(6) a est clos.

(7) a et b sont clos.

2. Réduction

La notion de réduction est une relation de préordre, comme nous l'avons laissé entendre plus haut.

La réduction est obtenue à partir de la <u>réduction atomique</u>, $/\!=_1$, au moyen des deux règles

$$\frac{a \;/\!=_1\; b}{a \;/\!=\; b} \qquad (R\ 1)$$

$$\frac{a \;/\!=\; b \qquad b \;/\!=\; c}{a \;/\!=\; c} \qquad (R\ 2)$$

Réductions et réductions atomiques seront représentées par des arbres, chaque nœud étant une expression $a /\!= b$ ou $a /\!=_1 b$. Le nœud le plus bas de l'arbre, qui est de la forme $a /\!= b$, ou $a /\!=_1 b$, nous dira ce que l'arbre a démontré, ou encore ce que l'arbre a calculé. S'il existe un tel arbre se terminant par $a /\!= b$ (resp. $a /\!=_1 b$) on dira que a se réduit (resp. se réduit atomiquement) en b.

3. Réduction atomique

(RA 1) $$a \;/\!=_1\; a$$

(RA 2) $$\frac{a \;/\!=_1\; a'}{\lambda x a \;/\!=_1\; \lambda x a'}$$

(RA 3) $$\frac{a \;/\!=_1\; a' \qquad b \;/\!=_1\; b'}{a(b) \;/\!=_1\; a'(b')}$$

(RA 4) $$\frac{a \;/\!=_1\; a'}{DT\alpha\, a \;/\!=_1\; DT\alpha\, a'}$$

(RA 5) $$\frac{a \;/\!=_1\; a'}{a\{\tau\} \;/\!=_1\; a'\{\tau\}}$$

(RA 6) $$\frac{a \;/\!=_1\; a' \qquad b \;/\!=_1\; b'}{\lambda x a(b) \;/\!=_1\; [x/b']\, a'}$$

(RA 7) $$\frac{a \;/\!=_1\; a'}{DT\alpha\, a\{\tau\} \;/\!=_1\; [\alpha/\tau]\, a'}$$

(RA 8) $$\frac{a \;/\!=_1\; a'}{RECab\bar{o} \;/\!=_1\; a'}$$

(RA 9) $$\frac{a \;/\!=_1\; a' \qquad b \;/\!=_1\; b' \qquad c \;/\!=_1\; c'}{\mathrm{REC}abSc \;/\!=_1\; b(\mathrm{REC}a'b'c',c')}$$

Les règles suivantes nécessitent quelques définitions auxiliaires :

3.1. Pour la Bar-récursion

On sait définir un terme DIF de type $(o,o\to o)$, avec la propriété $\mathrm{DIF}(\bar{m},\bar{n}) \;/\!= \bar{o}$ si $m \leqslant n$, $\mathrm{DIF}(\bar{m},\bar{n}) \;/\!= \overline{m-n}$ sinon. Dans ce dernier cas, $\mathrm{DIF}(\bar{m},\bar{n})$ se réduit en un terme de la forme Sw.

On peut définir pour chaque type σ , une fcl DC^{σ} de type $(o,\sigma,\sigma\to\sigma)$, en posant $\mathrm{DC}^{\sigma} = \lambda z^{o} \lambda x^{\sigma} \lambda y^{\sigma}\ \mathrm{REC}\ (x, \lambda y^{\sigma} \lambda z'^{o} y, z)$.

On a, bien entendu :

$\mathrm{DC}(\bar{o},a,b) \;/\!= a$

$\mathrm{DC}(Sw,a,b) \;/\!= b$

On définirait de même DD par :

$\mathrm{DD}^{\sigma\tau} = \mathrm{REC}(\lambda x^{\tau\to\sigma} \lambda y^{\tau} \lambda z^{\sigma} x(y))\ (\lambda x'^{\tau\to\sigma,\tau,\sigma\to\tau} \lambda z'^{o} \lambda x^{\tau\to\sigma} \lambda y^{\tau} \lambda z^{\sigma} z)$

et donc :

$\mathrm{DD}(\bar{o},a,b,c) \;/\!= a(b)$; $\mathrm{DD}(Sw,a,b,c) \;/\!= c$

On pose $(u;z^{o} \;/v) = \lambda w \mathrm{DC}(\mathrm{DIF}(z,w),v,u(w))$ et

$(u;z^{o},a \;/v) = (\ (a;z \;/a\ );Sz \;\;/v)$

Soit :

$(u;\bar{m} \;/v)\ (\bar{n}) \;/\!= u(\bar{n})$ si $n < m$

$(u;\bar{m} \;/v)\ (\bar{n}) \;/\!= v$ si $n \geqslant m$

$(u;\bar{m},a \;/v)\ (\bar{n}) \;/\!= u(\bar{n})$ si $n < m$

$(u;\bar{m},a \;/v)\ (\bar{n}) \;/\!= a$ si $n = m$

$(u;\bar{m},a \;/v)\ (\bar{n}) \;/\!= v$ si $n > m$

Si on considère v (le "zéro") comme fixé, une notation plus imagée, bien qu'incorrecte serait : $(u_o,\dots,u_{n-1})$ pour $(u;\bar{n} \;/v)$ et $(u_o,\dots,u_{n-1},a)$ pour $(u;\bar{n},a \;/v)$.

On peut maintenant formuler les deux règles correspondant à la Bar-récursion, RA 10 et RA 11 :

$$\frac{(RA\ 10)\quad r \;/\!=_1\; r' \quad s \;/\!=_1\; s' \quad t \;/\!=_1\; t' \quad u \;/\!=_1\; u' \quad v \;/\!=_1\; v' \quad w \;/\!=_1\; w'}{Brstuvw \;/\!=_1\; DD(DIF(w',t'((u';w'/v'))),s',\lambda x\, Br's't'(u';w',x/v')v'Sw',r')}$$

avec la restriction t,u,v,w (et donc t',u',v',w') clos.

(RA 11) $\qquad (\sigma,\varphi) \;/\!=_1\; \varphi(n)$

3.2. Règles concernant l'arithmétisation

Dans ce cas, RA 10 et RA 11 ne sont pas définies à cause de l'exclusion réciproque entre Bar-récursion et arithmétisation.

On considère une énumération des termes de type $(o \to o)$ et o, et clos; à chaque terme clos de ces types, on peut associer un "numéro de Gödel", par une application $\ulcorner\ \urcorner$. Une suite finie de termes clos de type o peut toujours être représentée sous la forme $p_o^{\ulcorner a_o \urcorner} \cdot \ldots \cdot p_n^{\ulcorner a_n \urcorner}$.

Considérons maintenant la notion de réduction "à gauche", donnée par ce qui suit :

Un <u>sous-terme minimal</u> d'un terme donné est un sous-terme non normal, dont <u>tous</u> les sous-termes stricts sont normaux. Si a est un terme non normal quelconque, il existe un nombre fini non nul de sous-termes minimaux de a. <u>Le sous-terme minimal gauche</u> de a est le sous-terme minimal de a le plus à gauche dans a. La <u>réduction atomique à gauche</u> est définie ainsi : a $/\!=_g$ b ssi b est obtenu à partir de a par substitution dans a, pour le sous-terme minimal gauche c, de a, d'un terme d obtenu à partir de c par une des règles RA 6,7,8,9,12,13, les prémisses éventuelles de ces règles étant toutes obtenues par RA 1. Par exemple, si c est RECab$\bar{o}$, d est a. La <u>réduction gauche</u> est définie par a $/\!=_G$ b ssi il existe $a_o, \ldots, a_n$, $a_o = a, a_n = b$, et $a_i \;/\!=_g\; a_{i+1}$ pour tout i inférieur à n.

(RA 12) $\qquad GD(a) \;/\!=_1\; \overline{\ulcorner a \urcorner} \qquad$ (a clos, et normal)

(RA 13) $\qquad RED(a,b) \;/\!=_1\; \bar{p} \qquad$ (a et b normaux et clos) et p est un entier représentant une réduction gauche de a en une forme normale, c'est à dire que p représente la suite $a_o, \ldots, a_n$ décrite plus haut.

La définition de (RA 13) pose certains problèmes évidents d'auto-référence que nous ne pouvons lever que par une arithmétisation rigoureuse de la réduction à gauche.

Nous allons expliciter une partie de la numérotation de tous les termes :

$\ulcorner APuv \urcorner = 3^2 . 5^{\ulcorner u \urcorner} . 7^{\ulcorner v \urcorner}$

$\ulcorner EXTu\tau \urcorner = 3^4 . 5^{\ulcorner u \urcorner} . 7^{\ulcorner \tau \urcorner}$

$\ulcorner \lambda xa \urcorner = 3^6 . 5^{\ulcorner x \urcorner} . 7^{\ulcorner a \urcorner}$

$\ulcorner DT\alpha\, a \urcorner = 3^8 . 5^{\ulcorner \alpha \urcorner} . 7^{\ulcorner a \urcorner}$

$\ulcorner RED \urcorner = 2$

$\ulcorner GD \urcorner = 4$

$\ulcorner S \urcorner = 6$

$\ulcorner \bar{o} \urcorner = 8$

le numéro des variables, des opérateurs, etc... nous est inutile.
Il faudrait exprimer l'invariance par changement de nom des variables et ind; ceci est inutile, si on prend bien soin de ne partir que d'expressions n'utilisant jamais deux fois la même variable ou la même ind aux mêmes fins.

On pourrait construire les fonctions recursives primitives, et les prédicats :

Term(a) : a est le n° d'un terme. Clos(a) : a est le n° d'un terme clos.

Type(a,b): Term(a) et b est le numéro du type du terme désigné par a.

Num(a) : a est le numéro d'un numéral : a=8, ou $a=(3^2.5^6.7^{a_3}$ et $Num(a_3)$)

q(x) : le numéro de $\bar{x}$: $q(o)=8$, $q(Sx)=3^2.5^6.7^{q(x)}$

r(x) : le numéral représenté par x si Num(x), o sinon :

$r(x)=o$ si $x=8$ ou non(Num(x)), $r(x)=S(r(x_3))$ sinon.

Norm(a) : Term(a) et le terme désigné par a est normal.

D'autre part, pour les termes non normaux de la forme de ceux envisagés à gauche de la conclusion de RA6-9, nous disposons d'une fonction f récursive primitive nous donnant l'unique possiblité à droite de la conclusion de la règle, si toutes les prémisses viennent de RA 1.

Par exemple, $f(\ulcorner \text{RECabo} \urcorner) = \ulcorner a \urcorner$.

Nous pouvons maintenant nous attaquer à la construction du prédicat T qui exprime la réduction atomique gauche :

$T(u,v) \equiv$ Term(u) et Term(v) et soit 1., 2., 3., ou 4.

1. $u=3^6.5^{u_2}.7^{u_3}$ et $v=3^6.5^{u_2}.7^{v_3}$ et $T(u_3,v_3)$

2. $u=3^8.5^{u_2}.7^{u_3}$ et $v=3^8.5^{u_2}.7^{v_3}$ et $T(u_3,v_3)$

3. $u=3^4.5^{u_2}.7^{u_3}$ et (3.1. ou 3.2.)

   3.1. non(Norm(u_2)) et $v= 3^4.5^{v_2}.7^{u_3}$, et $T(u_2,v_2)$

   3.2. Norm(u_2) et non(Norm(u)) et $v=f(u)$

4. $u=3^2.5^{u_2}.7^{u_3}$ et (4.1 ou 4.2. ou 4.3.)

   4.1. non(Norm(u_2)) et $v=3^2.5^{v_2}.7^{u_3}$ et $T(u_2,v_2)$

   4.2. Norm(u_2) et non(Norm(u_3)) et $v=3^2.5^{u_2}.7^{v_3}$ et $T(u_3,v_3)$

   4.3. Norm(u_2) et Norm(u_3) et non(Norm(u)) et (4.3.1 ou 4.3.2. ou 4.3.3.)

      4.3.1. $u_2=4$ et $v=q(u_3)$ (axiome pour GD) (et Clos(u_3))

      4.3.2. $u_2=3^2.5^2.7^{u_{2_3}}$ et Num(u_3) et Clos(u_{2_3}) et Num(v) et $r(v)\neq o$ et $(r(v))_o=3^2.5^{u_{2_3}}.7^{u_3}$ et Num($(r(v))_{lh(r(v))\dot{-}1}$) et $\forall i < lh(r(v)) \dot{-} 1 \quad T((r(v))_i,(r(v))_{i+1})$ (Axiome pour RED)

      4.3.3. $v=f(u)$ sinon.

<u>Lemme 1</u>

T est récursif primitif

Démonstration : par induction sur $2^u.3^v$

Pour toutes les clauses autres que 4.3.2., T(u,v) est vérifié au moyen d'un certain nombre de propriétés ne dépendant pas de T, et de $T(u_i,v_i)$. Mais $2^{u_i}.3^{v_i} < 2^u.3^v$, puisque $u_i < u$ et $v_i < v$.

Pour 4.3.2. T(u,v) est essentiellement vérifié à partir de $T(r(v)_i,r(v)_{i+1})$. Il suffit de montrer que $2^{r(v)_i}.3^{r(v)_{i+1}} < 2^u.3^v$. Mais l'expression à gauche de l'inégalité est majorée par $p_i^{r(v)_i}.p_{i+1}^{r(v)_{i+1}}$, lui-même majoré par r(v). Mais r(v) est majoré par v, et v est strictement majoré par $2^u.3^v$. Ceci montre bien la validité du lemme.

Lemme 2 :

Si $T(u,v)$ et $T(u,v')$, alors $v=v'$.

Démonstration :

Par induction sur $2^u.3^v$, nous montrons que le seul v' tel que $T(u,v')$ est v :

Si la clause utilisée pour montrer $T(u,v)$ est autre que 4.3.2., v'est obtenu à partir de u soit comme $f(u)$, et est donc unique, soit univoquement à partir que tout v_i tel que $T(u_i,v_i)$ ($i=2$, ou 3, suivant le cas) Mais l'hypothèse d'induction montre alors que v_i est obtenu univoquement à partir de u_i. Si $T(u,v)$ est obtenu à partir de 4.3.2., v' est obtenu univoquement à partir de toute suite de réductions $T(r(v')_i,r(v')_{i+1})$, dont le point de départ ne dépend que de u, et le point d'arrivée est un numéral. L'hypothèse d'induction nous assure de l'univocité d'une telle suite.

Remarque : Bien que $T(u,v)$ soit récursif primitif, et que v soit obtenu fonctionnellement en fonction de u, $T(u,v)$ ne peut pas se mettre sous la forme $v=g(u)$, pour un g récursif primitif. Nous montrerons pourtant l'existence d'une fonction g récursive qui vérifie cette propriété; une telle fonction ne saurait alors être exprimable dans le système fonctionnel lui-même.

T' arithmétise les réductions à gauche; par définition, $T'(a,b,c)$ signifie, au niveau des numéros que c est une réduction à gauche de $a(b)$ en un numéral.

$T'(e,x,y) \equiv$ Norm(e) et Type$(e,\ulcorner o \to o \urcorner)$ et $y_o=3^2.5^e.7^{q(x)}$ et Num$(y_{lh(y)\dot{-}1})$ et $\forall i < lh(y)\dot{-}1 \quad T(y_i,y_{i+1})$.

T' est donc récursif primitif.

On définit de même $U'(y)=r(y_{lh(y)\dot{-}1})$

Nous savons d'autre part que nos systèmes fonctionnels contiennent toutes les fonctions récursives primitives, dès qu'ils contiennent les schémas récursifs. T' et U' sont donc représentables dans le système pour lequel ils sont définis, par des fcl notées par la même lettre :

$T'(n,m,p) \Rightarrow T'(\bar{n},\bar{m},\bar{p}) \ /= \ \bar{o}$

$non(T'(n,m,p) \Rightarrow T'(\bar{n},\bar{m},\bar{p}) \ /= \ \bar{1}$

$U'(n)=p \Rightarrow U'(\bar{n}) \ /= \ \bar{p}$

<u>Lemme 3</u>

Si a est clos et normal, et si $RED(a,\bar{n}) \ /= \bar{q}$, on a

$T'(GD(a),\bar{n},RED(a,\bar{n})) \ /=_1 \ \bar{o}$

<u>Démonstration</u>

Il suffit de montrer que $T'(\ulcorner a \urcorner, n,p)$ est vrai. Mais p est par définition $p_o^{a_o} . \ \ldots \ .p_k^{a_k}$, avec $T(a_i,a_{i+1})$ pour tout i, et $a_o=3^2.5^a.7^{q(n)}$, et a_k est le numéro d'un numéral. C'est exactement ce qui est requis dans la définition de T'.

<u>Lemme 4</u>

Si a est normal et clos, si $RED(a,\bar{n}) \ /= \bar{m}$, $a(\bar{n})$ se réduit en $(\overline{U'(m)})$

<u>Démonstration</u>

Etant donné que $a(\bar{n})$ se réduit à gauche de manière évidente en le numéral mentionné, il nous suffit de remarquer que la réduction à gauche est un cas particulier de réduction.

<u>3.3 Quelques commentaires sur 3.1.</u>

La fcl DD introduite en 3.1. sert essentiellement à ceci :

si $t((u;\bar{n} /v)) \ /= \ \bar{m}$, avec $m < n$, $Brstuv\bar{n}$ se réduit en r.

si $t((u;\bar{n} /v)) \ /= \ \bar{m}$, avec $m > n$, $Brstuv\bar{n}$ se réduit en $s(\lambda xBrst(u;\bar{n},x/v)vS\bar{n})$.

Dans le premier cas, la construction précise de DD empêche la formation éventuelle du second terme; dans les réductions possibles de $Brstuv\bar{n}$; sans cette construction, les réductions pourraient ne pas se terminer.

SECTION 4

THEOREME DE CHURCH-ROSSER POUR LES SYSTEMES FONCTIONNELS

Le théorème de Church-Rosser assure l'univocité des calculs. Si a se réduit en b, nous dirons que b est un <u>rédion</u> de a .

THEOREME 2 (Church-Rosser)

Deux rédions d'un même terme ont un rédion commun.

Soit a un terme; un rédion normal de a est une <u>forme normale</u> de a.

Corollaire

Tout terme a au plus une forme normale.

Le théorème 2 est conséquence du

THEOREME 3 (D'après Martin-Löf et Tait)

Deux rédions atomiques d'un même terme ont un rédion atomique commun.

En effet, définissons, pour p strictement positif $a \;/\!=_p\; b$ par la règle

$$\frac{a \;/\!=_q\; b \quad b \;/\!=_1\; c}{a \;/\!=_{q+1}\; c}$$

Une version plus précise du théorème 2 est la suivante :

si $a \;/\!=_p\; b$ et $a \;/\!=_q\; c$, on peut trouver d tel que $b \;/\!=_q\; d$ et $c \;/\!=_p\; d$.

Si p=q=1, c'est le théorème 3. Si p=1, on raisonne par induction sur q : si $a \;/\!=_1\; b$ et $a \;/\!=_{q+1}\; c$, c'est à dire $a \;/\!=_q\; c'$ et $c' \;/\!=_1\; c$, on peut, par hypothèse, trouver d' tel que $b \;/\!=_q\; d'$ et $c' \;/\!=_1\; d'$. Comme $c' \;/\!=_1\; c$ et $c' \;/\!=_1\; d'$, on peut trouver d tel que $c \;/\!=_1\; d$, et $d' \;/\!=_1\; d$; alors $b \;/\!=_{q+1}\; d$.

Supposons maintenant le résultat vrai pour p; nous voulons montrer sa validité pour p+1. Supposons $a \;/\!=_{p+1}\; b$, soit $a \;/\!=_p\; b'$ et $b' \;/\!=_1\; b$, et $a \;/\!=_q\; c$. Par hypothèse, on dispose de d' tel que $b' \;/\!=_q\; d'$ et $c \;/\!=_p\; d'$. Comme $b' \;/\!=_1\; b$ et $b' \;/\!=_q\; d'$, on dispose, par ce qui précède d'un d tel que $b \;/\!=_q\; d$ et $d' \;/\!=_1\; d$, d'où $c \;/\!=_{p+1}\; d$.   C.Q.F.D.

Le théorème ~~1~~ 2 se ramène donc au théorème ~~2~~ 3. Pour démontrer ce dernier, il est bon de donner quelques définitions générales.

Par <u>règles strictes</u>, nous entendons RA 6-13 . Ces règles sont de la forme

$$\frac{a_1 \;/\!=_1\; a'_1 \quad \cdots \quad a_n \;/\!=_1\; a'_n}{t\,[a_1,\ldots,a_n] \;/\!=_1\; u\,[a'_1,\ldots,a'_n]}$$

où t et u sont deux fonctions ne dépendant que de la règle envisagée.

Par <u>règles conservatives</u>, nous entendons les règles RA 1,-5. Ces règles sont de la forme citée plus haut, mais avec t identique à u.

Nous raisonnerons par induction sur la somme des hauteurs des deux arbres de réduction de $a \;/\!=_1\; b$ et $a \;/\!=_1\; c$.

<u>Premier cas</u> : les deux dernières règles sont distinctes.

La situation se présente ainsi :

$$\frac{\ldots\; a_i \;/\!=_1\; a'_i \;\ldots}{t\,[\ldots a_i \ldots] \;/\!=_1\; t\,[\ldots a'_i \ldots]}\,RA_k \qquad \frac{\ldots\; a_i \;/\!=_1\; a''_i \;\ldots}{t\,[\ldots a_i \ldots] \;/\!=_1\; u\,[\ldots a''_i \ldots]}\,RA_j$$

Par hypothèse d'induction, on dispose de a'''_i , avec $a'_i \;/\!=_1\; a'''_i$, $a''_i \;/\!=_1\; a'''_i$.

On peut appliquer RA_j ainsi :

$$\frac{\ldots\; a'_i \;/\!=_1\; a'''_i \;\ldots}{t\,[\ldots a'_i \ldots] \;/\!=_1\; u\,[\ldots a'''_i \ldots]}\,RA_j$$

et il suffit donc de montrer la validité de

$$\frac{\ldots\; a''_i \;/\!=_1\; a'''_i \;\ldots}{u\,[\ldots a''_i \ldots] \;/\!=_1\; u\,[\ldots a'''_i \ldots]}$$

Cette dernière propriété est établie aisément à l'aide des règles conservatives, qui sont énoncées précisement dans ce but.

<u>Second cas</u> : les deux dernières règles sont identiques.

La situation se présente ainsi

$$\frac{\ldots\; a_i \;/\!=_1\; a'_i \;\ldots}{t\,[\ldots a_i \ldots] \;/\!=_1\; u\,[\ldots a'_i \ldots]} \qquad \frac{\ldots\; a_i \;/\!=_1\; a''_i \;\ldots}{t\,[\ldots a_i \ldots] \;/\!=_1\; u\,[\ldots a''_i \ldots]}$$

(t et u peuvent être identiques)

Par hypothèse d'induction, on dispose de a_i''' , tels que $a_i' \mathrel{/\!=_1} a_i'''$ et $a_i'' \mathrel{/\!=_1} a_i'''$. Il suffit donc d'établir la validité de

$$\frac{\ldots a_i' \mathrel{/\!=_1} a_i''' \ldots.}{u\,[\ldots a_i' \ldots] \mathrel{/\!=_1} u\,[\ldots a_i''' \ldots]} \qquad \frac{\ldots a_i'' \mathrel{/\!=_1} a_i'''}{u\,[\ldots a_i'' \ldots] \mathrel{/\!=_1} u\,[\ldots a_i''' \ldots]}$$

Le problème a déjà été évoqué.

<u>REMARQUE</u>

Une possibilité n'a pas été traitée dans ce qui précède : une des dernières règles est RA 1 ; mais la solution est alors évidente.

SECTION 5 : LES FONCTIONNELLES (II)

Le pouvoir expressif des fcl construites à partir de λ,AP,DT et EXT est si grand que l'on pourrait pratiquement se confiner à ces fcl. Les nouveaux types, nouvelles fcl, que nous allons introduire sont pratiquement toutes définissables à partir des schémas sus-mentionnés. Cependant, ces nouvelles fonctionnelles sont importantes, d'une part comme abréviations, d'autre part parcequ'elles possèdent des propriétés d'autonomie par rapport à leur interprétation dans le fragment engendré par λ,AP,DT et EXT, c'est à dire qu'il est possible d'affiner la notion de réduction dans certains cas.

1. Produit de types

Le produit est introduit par la clause :

- Si σ et τ sont des types, $\sigma \times \tau$ est un type.

Le produit de types induit les schémas fonctionnels suivants

- Si a et b sont des fcl de types respectifs σ et τ , $a \otimes b$ est une fcl de type $\sigma \times \tau$.
- Si a est une fcl de type $\sigma \times \tau$, $\pi^1 a$ et $\pi^2 a$ sont des fcl de types respectifs σ et τ .

$\otimes$ correspond à la formation du couple ordonné, les π^i étant les deux projections. La règle stricte de réduction correspondante est

$$\frac{a_1 \ /\!=_1 \ a'_1 \qquad a_2 \ /\!=_1 \ a'_2}{\pi^i(a_1 \otimes a_2) \ /\!=_1 \ a'_i} \quad \text{(RA 14 i)}$$

Bien entendu, il faut aussi adjoindre les règles conservatives correspondantes.

$$\frac{a_1 \ /\!=_1 \ a'_1 \qquad a_2 \ /\!=_1 \ a'_2}{a_1 \otimes a_2 \ /\!=_1 \ a'_1 \otimes a'_2} \qquad \frac{a \ /\!=_1 a'}{\pi^i a \ /\!=_1 \pi^i a'}$$

La forme de ces règles assure la propriété de Church-Rosser dans ce cas.

Le produit est définissable dans le système de la section 2 : posons

$\sigma \times \tau = \Lambda\alpha((\sigma \to (\tau \to \alpha)) \to \alpha)$, où α est une nouvelle ind d'ordre ().

$a \otimes b = DT\alpha\, \lambda x^{\sigma \to (\tau \to \alpha)} x(a,b)$

$\pi^1 a = a\{\sigma\}(\lambda x^{\sigma} \lambda y^{\tau}\ x)$

$\pi^2 a = a\{\tau\}(\lambda x^{\sigma} \lambda y^{\tau}\ y^{\tau})$

2. Somme de types

Bien que surtout utilé en vue de la troisième partie, il peut être intéressant d'introduire la somme de types par :

- si σ et τ sont des types , $\sigma + \tau$ est un type.

Les schémas fonctionnels induits sont les suivants :

- si a est une fcl de type σ (resp. de type τ), $\amalg^{1\tau} a$ (resp. $\amalg^{2\sigma} a$) est une fcl de type $\sigma + \tau$.

- si a et b sont des fcl de type ρ , si x et y sont des variables dictinctes de types respectifs σ et τ , telles que x ne soit pas libre dans b et y ne soit pas libre dans a, si c est un terme de type $\sigma + \tau$, alors $\oplus xyabc$ est un terme de type ρ . Dans cette dernière expression x et y sont muets. (on suppose aussi que x et y ne sont pas libres dans c)

La signification des fcl introduites est donnée par la règle :

$$\frac{a_1 \;/\!=_1\; a_1' \qquad a_2 \;/\!=_1\; a_2' \qquad b_i \;/\!=_1\; b_i'}{\oplus x_1 x_2 a_1 a_2 \amalg^i b_i \;/\!=_1\; [x_i/b_i']\, a_i'} \quad \text{(RA 15 i)}$$

(Nous convenons d'omettre les indices dans $\amalg^{i\rho} a$ chaque fois que l'écriture $\amalg^i a$ ne sera pas ambigüe)

Les règles conservatives correspondantes sont

$$\frac{a \;/\!=_1\; a'}{\amalg^i a \;/\!=_1 \amalg^i a'} \qquad \frac{a \;/\!=_1\; a' \qquad b \;/\!=_1\; b' \qquad c \;/\!=_1\; c'}{\oplus xyabc \;/\!=_1\; \oplus xya'b'c'}$$

De même que le produit, la somme est définissable en termes de $\rightarrow$ et Λ

$$\sigma+\tau \quad = \quad \Lambda\alpha((\sigma\rightarrow\alpha)\rightarrow((\tau\rightarrow\alpha)\rightarrow\alpha))$$

$$\mu^1 a \quad = \quad DT\alpha\,\lambda x^{\sigma\rightarrow\alpha}\lambda y^{\tau\rightarrow\alpha}\,x(a)$$

$$\mu^2 a \quad = \quad DT\alpha\,\lambda x^{\sigma\rightarrow\alpha}\,y^{\tau\rightarrow\alpha}\,y(a)$$

$$\oplus xyabc = \quad c\{\rho\}\,(\lambda x^{\sigma}\,a)\,(\lambda\,y^{\tau}\,b)$$

La propriété de Church-Rosser pour les réductions utilisant les types disjonctifs est aisément établie.

3. Types existentiels

- Si σ est un type, si α est une ind. d'ordre R, $V\alpha\sigma$ est un type.

Les schémas fonctionnels associés sont les suivants :

- si a est une fcl de type $[\alpha/\tau]\sigma$, où α est d'ordre R, $I^{\tau,V\alpha\sigma}a$ est une fcl de type $V\alpha^R\sigma$. (On conviendra d'abréger $I^{\tau,V\alpha\sigma}a$ en $I^{\tau}a$ chaque fois que le contexte le permettra)

- si a est une fcl de type ρ, x une variable de type σ, α une ind non libre dans ρ et stratifiable dans λxa, b un terme de type $V\alpha\sigma$ dans lequel α et x ne sont pas libres, $ST\alpha xab$ est une fcl de type ρ.

I est appelé <u>injection</u>, ST est appelé <u>stratification existentielle</u>.

La règle qui donne leur signification à ces schémas s'énonce :

$$\frac{a \;/\!=_1\; a' \qquad b \;/\!=_1\; b'}{ST\alpha x a I^{\tau} b \;/\!=_1\; [y/b]\,(\,[\alpha/\tau]\,a)} \qquad \text{(RA 16)}$$

où y est $[\alpha/\tau]\;x^{\sigma}$.

Les règles conservatives sont, bien entendu :

$$\frac{a \;/\!=_1\; a'}{I^{\tau}a \;/\!=_1\; I^{\tau}a'} \qquad\qquad \frac{a \;/\!=_1\; a' \qquad b \;/\!=_1\; b'}{ST\alpha xab \;/\!=_1\; ST\alpha xa'b'}$$

Comme pour les schémas de 1. et 2., la propriété de Church-Rosser s'étend sans difficulté.

Les types ~~disjonctifs~~ existentiels [illegible]

$V\alpha\sigma \;=\; \Lambda\beta(\Lambda\alpha($[illegible]$)$

$I^{\tau}a \;=\; DT\beta\lambda x^{\Lambda\alpha(\sigma\to\beta)}\, x\{\tau\}(a)$

$ST\alpha xab \;=\; b\{\rho\}\,(DT\alpha\lambda x^{\sigma} a)$

4. L'absurdité

- $\perp$ est un type.
- Pour chaque fcl a de type $\perp$, et pour tout type σ, $H^{\sigma}a$ est une fcl de type σ.

$\perp$ est définissable par

$\perp \;=\; \Lambda\alpha^{(1)}\alpha$ (La seule règle pour H est la règle conservative

$H^{\sigma}a \;=\; a\{\sigma\}$ si $a \;/\!\!=_1\; a'$, $H^{\sigma}a \;/\!\!=_1\; H^{\sigma}a'$)

5. L'induction

En relation avec la troisième partie, il est utile d'introduire un schéma correspondant au raisonnement par induction.

Soit σ un type, α une ind d'ordre 0 . Ici, $\bar{o}$ et S désignent les opérations définies sur les ind d'ordre 0. Soit a une fcl de type $\sigma[\bar{o}]$, b une fcl de type $\sigma[\alpha]\to\sigma[S\alpha]$, τ un opérateur d'ordre 0; on suppose que α n'est libre ni dans a ni dans τ , et est stratifiable dans b. Alors $IND^{\tau}_{\alpha}ab$ est une fcl de type $\sigma[\tau]$.

Les règles de réduction pour IND sont les suivantes :

$$\frac{a \;/\!\!=_1\; a'}{IND^{\bar{o}}_{\alpha}ab \;/\!\!=_1\; a'} \qquad \text{(RA 17 a)}$$

$$\frac{a \;/\!\!=_1\; a' \qquad b \;/\!\!=_1\; b'}{IND^{S\tau}_{\alpha}ab \;/\!\!=_1\; b'[\tau](IND^{\tau}_{\alpha}a'b')} \qquad \text{(RA 17 b)}$$

ainsi que la règle conservative

$$\frac{a \;/\!\!=_1\; a' \qquad b \;/\!\!=_1\; b'}{IND^{\tau}_{\alpha}ab \;/\!\!=_1\; IND^{\tau}_{\alpha}a'b'}$$

Dans $IND^{\tau}_{\alpha}ab$, α est muet.

6. Le zéro

Le zéro est utilisé pour assurer l'existence d'un terme clos de chaque type clos.

- Pour chaque type σ , 0^{σ} est une fcl de type σ .

Nous convenons d'identifier 0^{o} à la fcl $\bar{o}$.

Les règles de réduction pour le zéro sont

(Z 1)	$0^{\sigma\to\tau}$	$/=_1$	$\lambda x^{\sigma}\ 0^{\tau}$
(Z 2)	$0^{\sigma\times\tau}$	$/=_1$	$0^{\sigma}\otimes 0^{\tau}$
(Z 3)	$0^{\Lambda\alpha\sigma}$	$/=_1$	$DT\alpha\ 0^{\sigma}$
(Z 4)	$0^{\sigma+\tau}$	$/=_1$	$\amalg^{1}\ 0^{\sigma}$
(Z 5)	$0^{\vee\alpha\sigma}$	$/=_1$	$I^{o}\ \ 0^{\sigma[o]}$
(Z 6)	0^{o}	$/=_1$	$\bar{o}$

(Dans (Z 5), o désigne l'opérateur défini par : $o^{0}=\bar{o}$, $o^{1}=S$, $o^{()}=o$, $o^{(R_1,\ldots,R_n)}=\lambda\alpha_1\ldots\alpha_n\ \ o$)

7. Redéfinition de la récursion

Il est facile de montrer que le type o est lui-même définissable par

$o\ = \Lambda\alpha\ (\alpha\ ,(\alpha\to\alpha)\to\alpha)$

$\bar{o}\ = \ DT\alpha\lambda x^{\alpha}\lambda y^{\alpha\to\alpha}\ x$

$Sa = \ DT\alpha\lambda x^{\alpha}\lambda y^{\alpha\to\alpha}\ y(a\{\alpha\}(x,y))$

c'est à dire que $\bar{n}$ est $DT\alpha\lambda x^{\alpha}\lambda y^{\alpha\to\alpha}\underbrace{y(y\ldots.(y}_{n\ \text{fois}}(x))\ldots)$

Alors $\bar{o}\{\tau\}(a,b)\ \ /=_1\ \ a$

et $\quad S\bar{n}\{\tau\}\ (a,b)\ /=_1\ \ b(\bar{n}\{\tau\}(a,b))$

Il n'est pas difficile, à l'aide du produit de type d'en déduire une interprétation de REC. Cependant cette interprétation ne donne pas tout à fait le même résultat : la traduction de (RA 9) n'est vérifiée que si c est un numéral.

8. Ultra-réductions, ou réductions commutatives.

L'autonomie des types disjonctifs, existentiels et absurde s'exprime par la possibilité d'adjoindre de nouvelles règles de réduction, qui n'étaient pas prévisibles de par leur interprétation dans le fragment de la section 2.

Un dégénéré minimal de a est un terme b de la forme $a(c)$, $\pi^{i}a$, $a\{\tau\}$, $\oplus xyda$, $ST\alpha xca$, $H^{\sigma}a$. Nous associerons à chaque forme de dégénéré minimal de a une opération de dégénerescence minimale f symbolisée suivant les cas, respectivement par c, i, τ, (c,d), c, σ. Si f et f' sont deux opérations, nous noterons $f /=_1 f'$ pour dire que f et f' agissent de même manière sur a et que si f est symbolisée respectivement par $c, i, \tau, (c,d), c, \sigma$, f' est symbolisée respectivement par c' avec $c /=_1 c'$, i, τ, (c',d') avec $c /=_1 c'$ et $d /=_1 d'$, c' avec $c /=_1 c'$, σ.

Nous dirons qu'un terme est ultra-normal si il ne renferme aucun sous-terme qui soit un dégénéré minimal d'un terme $\oplus xyabc$, $ST\alpha xab$, $H^{\sigma}a$, (et si de plus le terme dont nous parlons est normal)

Les règles de réduction correspondantes sont les suivantes :

$$\frac{f /=_1 f' \qquad a /=_1 a' \qquad b /=_1 b' \qquad c /=_1 c'}{f[\oplus xyabc] \quad /=_1 \quad \oplus xy\, f'[a']\, f'[b']\, c'} \qquad \text{(UR 1)}$$

$$\frac{f /=_1 f' \qquad a /=_1 a' \qquad b /=_1 b'}{f\,[\,ST\alpha xab\,] /=_1 \quad ST\alpha x f'[a']\; b'} \qquad \text{(UR 2)}$$

$$\frac{f /=_1 f' \qquad a /=_1 a'}{f[H^{\sigma}a] /=_1 \quad H^{\tau}a'} \qquad \text{(UR 3)}$$

(Dans UR 3, τ est le type de $f[H^{\sigma}a]$)

Lemme

L'adjonction des (UR i) conserve la propriété de Church-Rosser.

Bornons-nous au cas de (UR 2). Le seul cas fondamentalement nouveau est le suivant :

$$\frac{\dfrac{a \;/{=_1}\; a' \qquad b \;/{=_1}\; b'}{ST\alpha xaIb \;/{=_1}\; a'[\tau, b']} \qquad f \;/{=_1}\; f'}{f\,[ST\alpha\, xaIb] \;/{=_1}\; f'[\,a'[\tau, b']\,]}$$

d'une part, et de l'autre :

$$\frac{f \;/{=_1}\; f'' \qquad a \;/{=_1}\; a'' \qquad Ib \;/{=_1}\; Ib''}{f\,[ST\,\alpha\, xaIb] \;/{=_1}\; ST\,\alpha\, xf''[a'']Ib''}$$

Si $Ib \;/{=_1}\; Ib''$, alors $b \;/{=_1}\; b''$, avec un arbre qui n'est pas plus haut.

Par hypothèse d'induction, on dispose de a''', b''', f''', tels que

$a' \;/{=_1}\; a'''$, $a'' \;/{=_1}\; a'''$, $b' \;/{=_1}\; b'''$, $b'' \;/{=_1}\; b'''$, $f' \;/{=_1}\; f'''$, $f'' \;/{=_1}\; f'''$.

Nous en déduisons

$f'\,[a'\,[\tau, b']] \;/{=_1}\; f'''\,[\,a'''\,[\tau, b''']\,]$ d'une part, et

$ST\alpha\, xf''[a'']\, Ib'' \;/{=_1}\; f'''\,[\,a'''\,[\tau, b''']\,]$ de l'autre . C.Q.F.D.

9. Nomenclature des systèmes fonctionnels

A part le type () et les règles de réduction qui lui sont attachées, nous disposons de tous les schémas fonctionnels que nous utiliserons par la suite. Nous allons donc décrire les systèmes que nous allons considérer pour les interprétations fonctionnelles. Cette nomenclature sera ensuite étendue dans la troisième partie pour les systèmes fonctionnels représentant des systèmes de preuves.

D'abord, nous n'utiliserons pas les ordres construits à partir de O et 1.

9.1. Systèmes sans Bar-récursion; ni arithmétisation.

En général, nous n'utiliserons pas la sómme de types.

F_1 sera le système clos sous les règles de la section 2 : 1.1.,1.2.,2.1. , et de la section 5 ,1. F_1 n'utilise donc que les types construits à l'aide de o, $\rightarrow$, et $\times$. Il n'est pas sensiblement différent du système de termes T de Gödel.

Pour définir F_{n+2}, il nous faut définir la profondeur d'un ordre.

$PF(\ ()\ ) = o$

$PF(\ (R_1,\dots,R_n)\ ) = \sup_i (PF(R_i)) + 1 \qquad (n > o)$

F_{n+2} est défini en considérant, en plus dés schémas de F_1, tous les schémas de la section 2, 1.3., et de la section 5,3. qui ne font pas intervenir d'opérateur dont la profondeur excède n. En particulier, F_2 est le système F de Girard, moins le zéro.

F_ω est défini comme la réunion des F_n.

Pour $n \geq 1$, OF_n désignera le système F_n auquel on a adjoint le zéro pour tous les types du système.

Si nous désirons inclure les types disjonctifs, nous noterons les systèmes ainsi obtenus F^+_n et OF^+_n .

9.2. Systèmes avec Bar-récursion ou Arithmétisation

L'adjonction, pour les types exprimables dans le système F_n, OF_n, F^+_n, OF^+_n , de la Bar récursion sur les types constructibles dans le système donnera des systèmes : $FB_n, OFB_n, FB^+_n, OFB^+_n$.

L'adjonction de l'arithmétisation se traduira par les symboles $FA_n, OFA_n, FA^+_n, OFA^+_n$.

Remarquons que FB_1 ne diffère pas essentiellement du système de termes associé à la théorie Σ_4 de Spector.

9.3. Sous-systèmes finis

Les sous-systèmes finis de OF_n, OFB_n, OFA_n, avec $n < \omega$, notés $OF^{(i)}_n$, $OFB^{(i)}_n$ $OFA^{(i)}_n$, etc... sont les systèmes obtenus à partir d'un ensemble fini OP d'opérateurs, en demandant que, dans $EXTa\tau$, $I^\tau a$, REC^σ , $B^{\sigma\tau}$, σ et τ soient dans OP', où OP' est la clôture de OP sous les opérations de changement du nom des variables libres et de substitution réciproque.

9.4.

Systèmes sans récursion

Dans les systèmes OF_n, OF^+_n , il peut être intéressant de supprimer la récursion. Les systèmes seront alors notés ROF_n, ROF^+_n .

Le fragment de F_ω sans récursion, constrūit uniquement sur λ,AP,DT et EXT sera appelé E.

9.5. Dans la seconde partie, nous adjoindrons un nouveau type, (). Il est entendu que tous les systèmes sus-mentionnés (sauf E) subiront nécessairement l'adjonction de ce nouveau type, des schémas qui l'accompagnent, et des nouvelles règles de réduction qui en découlent, aussi il n'y aura pas lieu de changer de notation. (voir partie IV)

Quant aux notions de validité associées à ces systèmes (on pourra se restreindre aux systèmes contenant O), ce seront :

VIF pour ROF_n, ROF^+_n

VI pour OF_n, OF^+_n

[illegible] pour OFB_n, OFB^+_n ; validité dans le modèle M_0 des

[illegible] pour OFA_n, OFA^+_n ; termes clos.

à moins que le contraire ne soit expressément affirmé.

Les autres systèmes ne seront munis que de la notion de validité dans M_0.

Il y a plusieurs possibilités quant aux règles de réduction que nous utiliserons sur ces systèmes. Etant donné que les ultra-réductions sont les règles les plus fines que nous ayons envisagées, il va de soi que nous supposerons ces systèmes munis de ces règles.

ANNEXE : IMAGE D'UN SYSTEME FONCTIONNEL DANS LE LAMBDA-CALCUL

Considérons par exemple la partie de F_ω qui n'utilise que λ , AP, DT et EXT, c'est à dire E.

Considérons d'autre part le lambda-calcul LC, construit à l'aide de variables x,y,z,..., de la lambda-abstraction λ , et de l'application AP, avec les règles de réduction (R1),(R2),(RA 1),(RA 2),(RA 3),(RA 6).

Nous savons que toute fonction récursive partielle est représentable dans le lambda-calcul.

La transformation $^-$ est définie par

$(x^\tau)^- = x$ (à des variables différentes de F , sont associées des variables différentes de LC)

$(\lambda xa)^- = \lambda x^- a^-$

$(APab)^- = APa^- b^-$

$(DT\alpha a)^- = a^-$

$(EXTa\tau)^- = a^-$

THEOREME 4

L'application $a \mapsto a^-$ est un morphisme du fragment de F construit sur λ,AP,DT,et EXT dans LC, tel que si $a \,/\!=_1 b$ (resp. $a \,/\!= b$), alors $a^- /\!=_1 b^-$ (resp. $a^- /\!= b^-$), et que si $a^- /\!=_1 c$, (dans LC) alors, il existe b tel que $c=b^-$, et $a \,/\!=_1 b$. (resp. $a \,/\!= b$).

Démonstration

La partie de la démonstration consacrée au fait que $^-$ est un morphisme pour la réduction est évidente.

Pour la seconde partie du théorème, nous avons besoin du

Lemme 1

Si u de type $\sigma \to \tau$ est tel que u^- soit λxc, on peut trouver u' tel que $u \,/\!= u'$, $u' = \lambda x^\sigma b$, avec $b^- = c$

Démonstration :

Par induction sur le nombre de sysmboles EXT dans u : mettons u sous la forme $u_o\{\tau_1\}\cdots\{\tau_n\}$ $(n \geqslant o)$, u_o ne commençant pas par EXT. Remarquons que $u_o^- = \lambda xc$, et donc u_o ne peut commencer que par λ ou DT. Si u_o commence par λ, alors $n=o$, car on ne peut pratiquer d'extraction sur un type implicationnel; on prend alors $u=u_o=u'$. Si u_o commence par DT, alors $n>o$, car sinon le type de u ne serait pas implicationnel. Soit $u_o=DT\alpha_1 v_o$; posons $v=[\alpha_1/\tau_1]\ v_o$; on a $u \,/\!= v\{\tau_2\}\cdots\{\tau_n\}$, et comme $v\{\tau_2\}\cdots\{\tau_n\}$ a un EXT de moins que u, et que $v^-=\lambda xc$, on peut trouver v', $v'=\lambda x^\sigma b$, avec $b^-=c$, et $v\{\tau_2\}\ldots\{\tau_n\}/\!= v'$; alors $u \,/\!= v'$.

<u>Démonstration du théorème</u> :

Il nous faut montrer que si $a^- \not/\!=_1 c$, il existe b tel que $c=b^-$, et $a \,/\!= b$. Nous utiliserons une double induction, l'induction principale se faisant sur la longueur de la réduction, l'induction subordonnée sur le nombre de symboles de a.

<u>Base</u> : La réduction se réduit à RA 1; alors $a=c$, et on prend $b=a$.

<u>Induction</u> : la réduction se termine par RA 2, RA 3, RA 6. Par induction sur la longueur de a :

Base : a est $u(v)$ ou λxu. Si la réduction se termine par RA 2 ou RA 3, on part $u^- \,/\!=_1 d$ et $v^- \,/\!=_1 e$, et on dispose, par l'hypothèse principale, de f et g, avec $f^- = d$, $g^-=e$, $u \,/\!= f$, $v \,/\!= g$; on peut alors définir b comme $f(g)$, ou λxf, suivant la règle (RA 2 ou 3) utilisée. Si la réduction se termine par RA 6, on dispose de d et e tels que $u^- = \lambda xd$, et $d \,/\!=_1 e$, de f tel que $v^- = f$; par l'hypothèse d'induction principale, on a g tel que $u \,/\!= g$ et $g^- = \lambda xd$, h tel que $h^-=f$. Par le lemme 1, on peut trouver g' tel que $g \,/\!= \lambda xg'$, avec $g'^-=d$. Alors $([x/h]\ g')^- = [x/h^-]\ g'^- = [x/f]\ d = c$, et $a \,/\!= [x/h]\ g'$.

Induction subordonnée : a est $DT\alpha\, a'$, ou $a'\{\tau\}$. On dispose par hypothèse d'induction subordonnée de b' tel que $a' \,/\!= b'$, et $b'^- = c$; On définit b comme $DT\alpha\, b'$, ou $b'\{\tau\}$, suivant le cas.

COROLLAIRE

La partie de LC qui est l'image de l'application $^-$ est stable par réduction, c'est à dire que si cette partie est appellée LC_ω, $a \in LC$, et $a \,/\!\!= b$ implique que $b \in LC_\omega$.

Remarquons que, si l'on traduit les notions de paire (produit de types), d'entiers comme en I.5. dans E, la traduction $^-$ de cette notion dans LC est exactement la construction habituelle du λ-calcul; par exemple $\bar{3}$ est représenté par $DT\alpha\lambda x^{\alpha}\lambda y^{\alpha\to\alpha}y(y(y(x)))$ dans E, et par $\lambda x \lambda y\ y(y(y(x)))$ dans LC.

Si nous nous plaçons du point de vue de LC, LC_ω est donc (voir parties II et V) un ensemble de λ-termes possédant la propriété de forme normale (et même que toutes les réductions se terminent, au sens de AN) équivalent extensionellement au système des fonctions récursives-prouvables de la théorie des ordres.

Le système qui consiste à introduire des types, opérateurs, DT, EX^T peut être compris comme une stratification de LC_ω, c'est à dire une représentation de LC_ω dans un système muni d'une notion de type.

Le problème qui se pose est de déterminer si cette stratification est effective, c'est à dire si, étant donné a dans LC_ω, on peut trouver b dans E récursivement en a tel que $b^-=a$ ssi a est dans LC_ω.

Dans certains cas particuliers, on a une réponse positive (Hindley 1969).

SECONDE PARTIE

LE THEOREME DE REDUCTIBILITE POUR LES SYSTEMES FONCTIONNELS

SECTION 1 : LA REDUCTIBILITE

Dans ce qui suit, nous utilisons la réduction stricte $/=_s$, définie par a $/=_s$ b ssi a $/=_1$ b et au moins une règle stricte est utilisée . On en déduit que si a $/=_1$ b, et a $\neq$ b, alors a $/=_s$ b.

Si a $/=_s$ b, on dira que b est un **rédion strict** de a. Un terme normal n'admet pas de rédion strict. Dans un système ne contenant pas GD et RED, la réciproque est démontrable élémentairement. Par contre si il existait un couple (a,b) de termes normaux clos tels que a(b) n'ait pas de réduction à gauche en un numéral, RED(a,b) n'aurait aucun rédion strict, tout en n'étant pas normal.

Nous dirons qu'un terme t possède tous ses rédions (stricts) si, pour tout sous-terme de t de la forme RED(a,b), a et b normaux et clos, il existe p tel que RED(a,b) $/=_1$ $\bar{p}$. Un terme possédant tous ses rédions stricts, et sans rédion strict, est évidemment normal.

1. Termes absolument normalisables

L'ensemble AN des termes absolument normalisables est donné par les clauses inductives :

1) Un terme normal est AN.

2) Si a possède tous ses rédions stricts, et si tous les rédions stricts de a sont AN, alors a est AN.

1) est évidemment un cas particulier de 2).

Les termes AN vérifient les propriétés :

- Tout terme AN admet une forme normale
- Tout rédion d'un terme AN est AN.

Nous montrerons que tous les termes des systèmes fonctionnels que nous étudions sont AN.

L'intérêt de l'absolue normalisabilité est bien rendue par les exemples suivants :

Considérons en effet les nouvelles définitions de la réduction, et éventuellement des termes normaux :

1) Réduction à gauche : on réduit en changeant systématiquement le sous-terme minimal le plus à gauche. Nous avons étudié la réduction à gauche dans le cas particulier des OFA_n en I, section 3.

2) Réductions * : un terme est normal * si il ne contient aucun sous terme de la forme de ceux mentionnés dans la définition de la normalité, et qui soit de plus clos. Par exemple RECxy[illegible] est normal*. La réduction * n'est définie que pour les termes clos : on se restreint de la manière suivante : dans l'application des (RA_i), on demande que la conclusion de la règle soit formée de termes clos, et que, dans les prémisses éventuelles $a \neq_1 a'$, avec a' non clos (si a est clos, a' est toujours clos) que a=a', c'est à dire que la seule règle que l'on se permet sur les termes non clos est (RA 1).

3) Réductions à gauche * : une réduction * qui s'effectue à gauche : pour celà, il faut définir les sous-termes minimaux * de t : ce sont les sous termes u de t qui sont clos, non normaux, qui ne sont pas sous-termes d'un sous-terme non clos v de t, et minimaux pour cette propriété. La réduction à gauche * est définie par le remplacement du sous-terme minimal * le plus à gauche.

Maintenant, si a est AN, les chemins particuliers de réduction définis par la réduction à gauche, à gauche *, * , sont finis : en particulier, dans les deux derniers cas, le dernier terme de la réduction n'admet pas de rédion * strict, et est donc normal* (car il possède tous ses rédions *).

On vérifie simplement que les termes clos normaux * ne sont autres que les $\bar{n}$, pour le type o. Cette particularité est très importante; elle a par exemple, en l'absence de GD et RED pour corollaire la continuité des fcl.

2. Termes simples

Soit a un terme. Par dégénéré de a, on entend tout terme obtenu à partir de a par une succession (non vide) d'applications et d'extractions.

Exemples

- a n'est pas un dégénéré de a.

- a(b) est un dégénéré de a, ainsi que $a\{\tau\}$.

- b(a) n'est pas un dégénéré de a.

- si b est un dégénéré de a, et si c est un dégénéré de b, c est un dégénéré de a.

Un terme est simple (S) si aucun de ses dégénérés n'admet de réduction stricte qui se termine par une règle stricte.

Exemple

Une variable est S.

λxa n'est pas S (à cause de $\hat{\lambda}xa(b) \,/\!=_S\, [x/b]\, a$), mais λxa(b) l'est.

DTα a n'est pas S, mais DTα $a\{\tau\}$ l'est.

REC n'est pas S, pas plus que REC(a), REC(a,b); mais REC(a,b,c) est S.

GD,RED,RED(a), avec a clos et normal ne sont pas S, mais GD(a), RED(a), avec a non normal ou non clos, RED(b,c) sont S.

$\bar{o}$, S, sont S.

B,Br,Brs, Brst,Brstu,Brstuv, avec s,t,u,v clos ne sont pas S; par contre Brst (t non clos), Brstu (t ou u non clos), Brstuv (t ou u ou v non clos), Brstuvw,sont S.

La propriété des termes S est la suivante : tout dégénéré d'un terme S est un terme S. Etant donné que tout terme est soit un des termes des exemples plus haut, soit un de leurs dégénérés, on peut se faire une bonne idée de ce qu'est un terme simple.

Nous désignerons par SN la classe des termes simples normaux.

3- Candidats de réductibilité

Exceptionnellement, dans les deux sections qui suivent, nous abandonnerons l'identification des opérateurs au moyen des règles OR i , pour donner des définitions dépendant du nom précis de l'opérateur, quitte à montrer que ces définitions sont invariantes par les OR i.

Soit τ un opérateur. Nous allons définir le concept de <u>candidat de réductibilité</u> de hauteur τ, par induction sur l'ordre de τ.

<u>3.1.</u> τ est d'ordre ().

Un CR de hauteur (ou de type) τ, est un ensemble de termes qui vérifie :

(CR 1) si $a \in A$, le type de a est égal à τ, modulo les OR i.

(CR 2) si $a \in A$, alors a est AN.

(CR 3) si a est SN, alors $a \in A$. (sous réserve de CR 1)

(CR 4) si a est S, et si tous les rédions stricts de a sont dans A, alors $a \in A$.(sous réserve de CR 1 et CR 2)

(CR 5) si a//= b et si $a \in A$, alors $b \in A$.

Remarquons que CR 3 est conséquence de CR 4, car, si a est SN, il est S, et il n'a pas de rédion strict. Si on n'exige pas CR 2 pour la clause CR 4, il pourrait se produire la situation suivante : a n' a pas de rédion strict, et n'est pas normal ; alors a n'est pas AN, en contradiction avec CR 2. Une formulation équivalente de CR 4 serait donc

(CR 4) si a est S, et a possède tous ses rédions, et si tous les rédions stricts de a sont dans A, alors a est dans A. (sous réserve de CR 1)

<u>Exemple</u> :

Pour chaque type τ , il existe un CR de type τ , le <u>CR canonique</u>, formé des termes AN dont le type est égal à τ , modulo les OR i.

Remarquons qu'un CR ne saurait être vide, à cause de CR 3 et du fait qu'une variable de type τ est SN.

3.2. τ est d'ordre O.

(CR 6) un CR de hauteur τ est τ lui-même.

3.3. τ est d'ordre $(R_1, \ldots, R_n)$ $(n > o)$ ou 1

(CR 7) un CR de hauteur τ est une application qui à tous CR de hauteurs $\sigma_1 \ldots \sigma_n$ (d'ordres respectifs $R_1, \ldots, R_n$) associe un CR de hauteur $\tau\, \sigma_1 \ldots \sigma_n$.

Exemple :

Il existe un CR de chaque Hauteur, le CR canonique:

si τ est d'ordre (), Can_τ a déjà été défini.

si τ est d'ordre 0 ~~ou 1~~, Can_τ est τ, si τ est d'ordre 1, Can_τ est défini comme la fonction $\sigma \mapsto \tau\sigma$

si τ est d'ordre $(R_1,\dots,R_n)$, Can_τ est l'application qui à tous CR de hauteurs respectives $\sigma_1 \dots \sigma_n$ associe $Can_{\tau\sigma_1 \dots \sigma_n}$.

Si A est un CR, nous désignerons par h(A) la hauteur de A. (la hauteur ainsi définie est univoque modulo l'égalité des opérateurs définie par les OR_i.)

4. La quasi-réductibilité

Considérons un opérateur τ, et soient $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ des indéterminées distinctes, $A_1,\dots,A_n$ des CR dont les ordres (c'est à dire les ordres des $h(A_i)$) sont ceux des α_i. On définit alors l'expression $[\alpha_1 \dots \alpha_n/A_1 \dots A_n]\tau$, qui sera un CR de hauteur $[\alpha_1 \dots \alpha_n/h(A_1) \dots h(A_n)]\tau$. Le but évident de la construction est la construction de $[-/-]\tau$, correspondant à des suites vides.

(QR 1) $[\alpha_1,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_n /A_1 \dots A_i \dots A_n]\alpha_i = A_i$

(QR 2) $[\alpha_1,\dots,\alpha_n/A_1 \dots A_n]\tau = Can_{[\alpha_1 \dots \alpha_n/h(A_1)\dots h(A_n)]\tau}$, si τ est soit une constante, soit une indéterminée non parmi les α_i.

(QR 3) $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\tau\sigma_1 \dots \sigma_m = ([\underline{\alpha}/\underline{A}]\tau)[([\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma_1) \dots ([\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma_n)]$

(QR 4) $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\lambda\beta_1 \dots \beta_m\tau$ est l'application qui aux CR $B_1 \dots B_m = \underline{B}$, associe $[\underline{\alpha},\underline{\beta}/\underline{A},\underline{B}]\tau$.

(QR 5) a est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma \to \tau$, ssi pour tout b dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma$, a(b) est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\tau$.

(QR 6) a est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\Lambda\beta\tau$, ssi pour tout CR B, a$\{h(B)\}$ est dans $[\underline{\alpha},\beta/\underline{A},B]\tau$.

Par exemple, $[-/-]o$ est l'ensemble des termes AN de type o. (par CR 2)

De même, $[-/-]\Lambda\alpha(\mu\to\mu)$ est l'ensemble des termes tels que pour tout CR B, et tout b dans B, $a\{h(B)\}(b)$ soit encore dans B.

Remarquons que l'adjonction à la suite $\alpha_1 \dots \alpha_n$ d'ind non dans $\mathcal{C}$, l'interversion de deux ind et des CR correspondants ne changent rien aux définitions.

<u>Lemme 1</u> ("Lemme de substitution")

$$[\underline{\alpha},\underline{\beta}/\underline{A},([\underline{\alpha}/\underline{A}]\ \underline{\sigma})]\tau = [\underline{\alpha}/\underline{A}]\ ([\underline{\beta}/\underline{\sigma}]\tau)$$

En conséquence, on aura, par exemple

$$[\underline{\alpha},\underline{\beta}/\underline{A},\underline{A}]\tau = [\underline{\alpha}/\underline{A}]\ ([\underline{\beta}/\underline{\alpha}]\tau)$$

<u>Démonstration</u> :

Par induction sur la longueur de τ.

1) τ est une constante, ou est ~~d'ordre 0 ou 1~~ une variable non dans $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$. Par définition de Can.

2) τ est une ind.

- si cette ind est dans $\underline{\alpha}$, $([\underline{\beta}/\underline{\sigma}]\tau) = \tau$, et le lemme est évident.
- si cette ind est dans $\underline{\beta}$, celà se ramène à $[\beta_i/([\underline{\alpha}/\underline{A}]\ \sigma_i)]\ \beta_i$ d'une part, $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\ \sigma_i$ de l'autre. On conclut à l'aide de QR 1.
- sinon, par définition de Can. (cas 1)

3) si τ est $\lambda\gamma_1\dots\gamma_m\rho$, celà résulte de l'hypothèse d'induction, qui nous permet d'égaler $[\underline{\alpha},\underline{\beta},\underline{\gamma}/\underline{A},([\underline{\alpha}/\underline{A}]\ \underline{\sigma}),\underline{C}]\rho$ d'une part et $[\underline{\alpha},\underline{\gamma}/\underline{A},\underline{C}]\ ([\underline{\beta}/\underline{\sigma}]\tau)$ de l'autre.

4) si est $\rho\mu_1\dots\mu_m$, $\mu_1\to\mu_2$, $\Lambda\gamma\rho$, le traitement est similaire :

dans le premier cas on utilise les hypothèses d'induction

$$[\underline{\alpha},\underline{\beta}/\underline{A},([\underline{\alpha}/\underline{A}]\ \underline{\sigma})]\rho = [\underline{\alpha}/\underline{A}]\ ([\underline{\beta}/\underline{\sigma}]\rho)$$

$$[\underline{\alpha},\underline{\beta}/\underline{A},([\underline{\alpha}/\underline{A}]\ \underline{\sigma})]\mu_i = [\underline{\alpha}/\underline{A}]\ ([\underline{\beta}/\underline{\sigma}]\mu_i)$$

On utilise les mêmes pour μ_1 et μ_2 dans le second cas.

Enfin, le dernier cas suppose l'hypothèse

$$[\underline{\alpha},\underline{\beta},\gamma/\underline{A},([\underline{\alpha}/\underline{A}]\ \underline{\sigma}),C]\rho = [\underline{\alpha},\gamma/\underline{A},C]\ ([\underline{\beta}/\underline{\sigma}]\rho)$$

Intuitivement, le lemme 1 peut se paraphraser comme suit : la construction (QR) est un procédé permettant de donner un sens à l'expression "a est réductible de type τ ", en partant d'une signification arbitraire de la réductibilité pour certains types plus petits que τ, cette signification étant donnée par les A_i. Si maintenant, je remplace les A_i par une signification plus précise de la réductibilité pour les hauteurs $h(A_1) \dots h(A_n)$, donnée en fonction de $B_1 \dots B_m$, il est normal que les deux constructions :

- la QR de hauteur τ construite directement par rapport à $B_1 \dots B_m$
- la QR de hauteur τ construite à l'aide des valeurs trouvées sur

$h(A_1) \dots h(A_n)$ à l'aide de $B_1 \dots B_m$

soient identiques.

Lemme 2

$[\underline{\alpha}/\underline{A}]\tau'$ et $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\tau$ sont identiques, dès que τ' et τ sont égaux modulo les OR i .

Démonstration

L'égalité modulo les OR i se définit comme l'existence d'une forme normale commune. La symétrie du lemme 2 nous permet de nous restreindre au cas où τ' est un rédion de τ. On se ramène de même au cas d'un rédion immédiat. Maintenant le lemme 2 est évidemment vrai pour OR 1, et est conservé (!) par les règles conservatives. Le seul cas important est celui de la réduction stricte :

$\lambda \beta_1 \dots \beta_m \tau \; \sigma_1 \dots \sigma_m \;\; /=_1 \; [\beta_1, \dots, \beta_m / \sigma_1, \dots, \sigma_m] \tau$.

D'après QR 3 et QR 4, il nous faut montrer que

$[\underline{\alpha}, \underline{\beta}/\underline{A}, ([\underline{\alpha}/\underline{A}]\;\underline{\sigma})]\tau = [\underline{\alpha}/\underline{A}]\;([\underline{\beta}/\underline{\sigma}]\tau)$, ce qui est exactement l'énoncé du lemme 1.

Lemme 3

Si $\underline{A}$ est une suite de CR, $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\tau$ est un CR de hauteur $[\underline{\alpha}/\underline{h}(\underline{A})]\tau$.

Démonstration

Par induction sur la construction de τ, où ce qui revient au même, par induction sur les QR i.

QR 1. Car A_1 est un CR.

QR 2. Car Can est un CR.

QR 3. A cause de CR 7 et de l'hypothèse d'induction.

QR 4. Comme QR 3.

QR 5.

- CR 1 est évidemment vérifiée.
- CR 5 est vérifiée : si a /=: c, et a est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma\to\tau$, soit b dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma$. Alors a(b) est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\tau$, et, CR 5 appliqué à nous assure que c(b) est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\tau$. QR 5 nous dit alors que c est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma\to\tau$.
- CR 2 est vérifiée : soit a dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma\to\tau$; comme x est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma$ a(x) est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\tau$. Comme a(x) est AN, il possède tous ses rédions stricts, et donc a aussi. Si b est un rédion strict de a, b est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma\to\tau$. Il suffit de montrer que b est AN; mais comme b(x) est un rédion strict de a(x), il occupe un rang moins élevé que a(x) dans la définition inductive des AN.
- CR 4 est vérifiée : soit a de type $[\underline{\alpha}/h(\underline{A})]\sigma\to\tau$ possédant tous ses rédions stricts. Soit b dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma$. Les rédions stricts de a(b) sont de la forme a'(b'), où a' est un rédion de a, et b' un rédion de b, et l'un des deux est un rédion strict, si on suppose a simple.

1) a' est un rédion strict. Par hypothèse, a' est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma\to\tau$. Par CR 5 appliqué à b, b' est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma$, donc a'(b') est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma$.

2) sinon, on procède par induction sur la clause inductive d'absolue normalisabilité de b : si tous les rédions stricts de a(b) ... de la forme a(b') sont dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma$, a(b) est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma$. Celà résulte de 1) et de CR 4 appliqué à a(b) : a(b) possède en effet tous ses rédions...

car si RED(c,d) avec c et d normaux et clos apparaît dans a(b) soit :

- il apparaît dans a ou dans b.

- soit a est RED(c); alors a n'est pas simple.

Il résulte de 2) que a(b) est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\tau$.

-CR3 est un cas particulier de CR 4.

QR 6.

-CR1 est évident.

-CR 5 est vérifié : soit a dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\Lambda\beta\tau$. Alors $a\{h(B)\}$ est dans $[\underline{\alpha},\beta/\underline{A},B]\tau$. Soit b tel que a /= b; alors $a\{h(B)\}$ /= $b\{h(B)\}$, et CR 5, appliqué à τ , nous assure que $b\{h(B)\}$ est dans $[\underline{\alpha},\beta/\underline{A},B]\tau$.

-CR 2 est vérifié : soit a dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\Lambda\beta\tau$. Alors $a\{\beta\}$ est dans $[\underline{\alpha},\beta/\underline{A},Can_\beta]\tau$. Alors, par CR 2 appliqué à τ, $a\{\beta\}$ est AN, et on peut raisonner par induction sur la définition inductive des AN, pour $a\{\beta\}$. Si a $/=_s$ b, $b\{\beta\}$ vient avant $a\{\beta\}$ dans cette définition inductive, et b est donc AN par hypothèse, d'après CR 2 appliqué à a. D'autre part puisque $a\{\beta\}$ est AN, a possède tous ses rédions stricts.

-CR 4 est vérifié : soit a de type $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\Lambda\beta\tau$, possédant tous ses rédions stricts. Soit B un CR. Si a est simple, tous les rédions stricts de $a\{h(B)\}$ sont de la forme $a'\{h(B)\}$ avec a $/=_s$ a', et, si tous les rédions stricts de a sont dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\Lambda\beta\tau$, $a'\{h(B)\}$ est dans $[\underline{\alpha},\beta/\underline{A},B]\tau$, et comme $a'\{h(B)\}$ possède tous ses rédions stricts, $a\{h(B)\}$ est dans $[\underline{\alpha},\beta/\underline{A},B]\tau$, par CR 4 appliqué à τ .

- CR 3 est un cas particulier de CR 4.

5. La réductibilité

Soit a une fcl de type τ. Soit $\underline{\alpha}$ une suite d'indéterminées englobant toutes les ind libres de a, $\underline{A}$ une suite de CR associée à $\underline{\alpha}$, $\underline{x}$ une suite de variables englobant toutes celles libres dans a, $\underline{y}$ la suite $[\underline{\alpha}/\underline{h}(\underline{A})]\ \underline{x}$. Soit $\underline{\sigma}$ la suite des types de $\underline{x}$, On dit que a est <u>réductible</u> (RD) ssi pour toute suite de termes $\underline{b}$ respectivement dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\ \underline{\sigma}$, $[\underline{y}/\underline{b}]\ ([\underline{\alpha}/\underline{h}(\underline{A})]\ a\ )$ est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\ \tau$.

L'opération de substitution d'opérateurs, puis de fcl pour les variables modifiées ainsi obtenues a reçu le nom de <u>translation</u> : une translation est donc définie comme

$$[\ (\ [\underline{\alpha}/\underline{\sigma}]\ \underline{x}\ )/\underline{b}\ ]\ (\ [\underline{\alpha}/\underline{\sigma}]\ a)$$

THEOREME 1:

Soit F un système fonctionnel. Alors tous les termes de F sont réductibles.

COROLLAIRE

Tous les termes d'un système fonctionnel sont absolument normalisables. En particulier, tout terme admet une unique forme normale.

Pour démontrer le théorème, nous aurons d'abord besoin d'une quantité impressionnante de lemmes. Beaucoup de ces lemmes seront démontrés par induction sur une expression $L(a,b,\dots, c)$ définie ainsi :

$L(a)$=La longueur maximum d'une réduction de a, considérée comme suite de réductions strictes.

$L(a_0,a_1,\dots,a_n)=L(a_0) + L(a_1,\dots,a_n)$.

En général, $L(a_0,\dots,a_n)$ ne sera défini que si $a_1,\dots,a_n$ sont AN.

Lemme 1

Si pour tout b dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma$, $[x/b]$ a est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\tau$, alors λxa est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]$ $(\sigma\to\tau)$.

Démonstration :

Il suffit, d'après QR 5, de prouver que, si b est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma$, λxa(b) est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\tau$. Nous allons raisonner par induction sur $L(a,b)$. Comme λxa(b) est S, il suffit de montrer par CR 4, que tous ses rédions stricts sont dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\tau$.

Soit un rédion strict de λxa(b) de la forme $[x/b']$ a', avec $L(a,b) \leqslant L(a',b')$

Comme $[x/b]$ a /= $[x/b']$ a', par CR 5, on obtient que $[x/b']$ a' est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\tau$.

Soit au contraire un rédion strict de la forme λxa'(b'); alors $L(a',b') < L(a,b)$, et on peut appliquer l'hypothèse d'induction.

Lemme 2

Si a et b sont respectivement dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma$ et dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]$ $(\sigma\to\tau)$, b(a) est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\tau$.

Lemme 3 :

Si $[\beta/h(B)]$ a est dans $[\beta,\underline{\alpha}/B,\underline{A}]\tau$ pour tout B, DTβa est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\Lambda\beta\tau$.

Démonstration

Par définition il suffit de montrer l'appartenance de DTβa$\{h(B)\}$ au CR $C=[\beta,\underline{\alpha}/B,\underline{A}]\tau$. Remarquons que DT$\beta$a$\{h(B)\}$ est dans S, et qu'il suffit donc de montrer que tous les rédions stricts de DTβa$\{h(B)\}$ sont dans C. Comme a est AN (en choisissant un B de hauteur β), on peut raisonner par induction sur L(a).

Soit un rédion strict de DTβa$\{h(B)\}$ de la forme $[\beta/h(B)]$a'. Comme $[\beta/h(B)]$ a $/=$ $[\beta/h(B)]$ a', on applique CR 5, qui combiné aux hypothèses nous donne $[\beta/h(B)]$ a $\in$ C.

Soit un rédion strict de DTβa$\{h(B)\}$ de la forme DTβa'$\{h(B)\}$; alors L(a') $<$ L(a), et l'hypothèse d'induction joue.

Lemme 4

Si a est dans $[\underline{\beta}/\underline{B}]\Lambda\alpha\tau$, a$\{h(A)\}$ est dans $[\alpha,\underline{\beta}/A,\underline{B}]\tau$.

Lemme 5

1) $\bar{o}$ est dans $[-/-]$ o.

2) S est dans $[-/-](o\rightarrow o)$.

3) Un terme normal et clos de type o est un numéral.

Démonstration

1) En effet $\bar{o}$ est AN. (définition du CR canonique)

2) Car si u est AN, Su est AN.

3) Par induction sur la complexité de u, normal et clos.

- si u est $\bar{o}$, c'est évident.

- sinon, étant donné que u n'est pas une variable, u est un dégénéré d'une certaine expression v, telle que v ne soit pas le dégénéré d'un autre terme. v ne peut pas être une variable, ni de la forme λxa, DTα a, REC, B, GD, RED, car dans tous ces cas u ne serait pas normal. v ne peut être que S, soit u=Sw; comme w=$\bar{n}$, u=$\overline{n+1}$

Lemme 6

Si τ désigne le type de REC^{α}, $REC^{h(A)}$ est dans $[\alpha/A]\tau$.

Démonstration

Il suffit de montrer que pour tous f,g, et u dans ,respectivement, A, $[\alpha/A]$ $(\alpha, o\rightarrow\alpha)$, et $[-/-]$ o, RECfgu est dans A. Comme RECfgu est dans S, celà revient à montrer que tous les rédions stricts de RECfgu sont dans A. On raisonne par induction sur L(f,g,u).

Soit un rédion strict de la forme RECf'g'u', avec L(f',g',u') $<$ L(f,g,u). alors on applique l'hypothèse d'induction.

Soit un rédion strict de la forme f'; comme f /= f', f' est dans A.

Soit un rédion strict de la forme g'(RECf'g'v',v'). g' est un rédion de g, f' un rédion de f, Sv' est un rédion de Sv=u. D'où g',f',v' sont respectivement dans les mêmes CR que g,f,v.(pour v', remarquons que la condition est "v' est AN", et, que si Sv' est AN, v' est AN)

Supposons que RECf'g'v' soit dans A; alors g'(RECf'g'v',v') est dans A. Si v' est un rédion strict de v, RECf'g'v' est dans A par hypothèse d'induction. Si v' est v, il faut procéder par induction sur la complexité de v: si v ne commence pas par un successeur, RECfgv est dans A, comme nous l'avons vu. Sinon, l'hypothèse "RECfgw est dans A" implique à elle seule que RECfgSw est dans A.

Lemme 7

1) GD est dans $[-/-]$ $((o\rightarrow o)\rightarrow o)$

2) RED est dans $[-/-]$ $((o\rightarrow o)\rightarrow(o\rightarrow o))$

Démonstration

1) Par induction sur L(a) ; soit a dans $[-/-](o\rightarrow o)$, montrons que GD(a) est AN . Soit un rédion strict de GD(a) de la forme GD(a'), L(a') $<$ L(a). On utilise l'hypothèse d'induction. Soit un rédion de GD(a) de la forme $\ulcorner\bar{a}\urcorner$ (alors L(a)=o). Alors ce rédion est SN.

2) Par induction sur L(a,b), où a est dans $[-/-]$ $(o\rightarrow o)$, et b est AN, il suffit de montrer

1- que RED(a,b) est soit SN, soit admet un rédion strict.

2) que, si RED(a,b) admet un rédion strict, tous ses rédions stricts sont AN, c'est à dire sont dans $[-/-]$ o.

2) est conséquence évidente de 1), car un rédion strict de RED(a,b) est soit de la forme RED(a',b'), avec $L(a',b') < L(a,b)$, (hypothèse d'induction), soit un numéral.

1) est obtenu ainsi : si $L(a,b)\neq o$, RED(a,b) admet un rédion strict. si $L(a,b)=o$, et si a et b ne sont pas tous deux clos, RED(a,b) est normal. sinon, comme a(b) est AN par hypothèse, tous les "chemins" de réduction possibles sont finis, et se terminent par un terme normal clos, soit un numéral. Considérons le chemin correspondant à la réduction à gauche. On en déduit un entier p, et $\bar{p}$ est un rédion strict de RED(a,b).

<u>Lemme 8</u> (Tait)

Soit $t[u]$ un terme de type o contenant 0 ou plusieurs apparitions désignées du terme normal u de type $o \rightarrow \sigma$. On suppose que GD et RED n'apparaissent pas dans $t[u]$. Soit $t[u']$ le terme obtenu par remplacement des apparitions désignées de u dans $t[u]$ par des apparitions de u', de type $o \rightarrow \sigma$. Supposons que $t[u]$ et $t[u']$ sont clos et que $t[u]$ admet une réduction à gauche* en $\bar{m}$, et que, pour tout n tel que $u\bar{n}$ apparaisse dans cette réduction, $u\bar{n}$ et $u'\bar{n}$ aient même forme normale u_n. Alors $t[u']$ se réduit en $\bar{m}$.

<u>Démonstration</u>

Par induction sur la longueur de la réduction à gauche de $t[u]$ en $\bar{m}$.

1) cette longueur l est égale à 1. Alors $t[u] = t[u'] = \bar{m}$

2) $l > 1$, et le résultat est valide pour les réductions plus courtes.

2.1. si la première étape n'utilise aucune réduction de la forme $u\bar{n} \models s$ sur une apparition désignée de u, puisque u est normal, la réduction s'écrit $t[u] \mathrel{/\!=} t'[u]$. Comme $t'[u]$ se réduit en $\bar{m}$, $t'[u']$ se réduit aussi en $\bar{m}$, par hypothèse d'induction. Mais comme $t[u'] \mathrel{/\!=} t'[u']$, on obtient le résultat désiré.

2.2. si la première étape utilise une réduction de la forme $u\bar{n} \mathrel{/\!=} s$ sur une apparition désignée de u. Alors cette étape est de la forme

$t[u] = t_o[u,u\bar{n}] /= t_o[u,s]$. Par hypothèse d'induction, $t_o[u',s]$ se réduit en $\bar{m}$. Mais $s /= u_n$ et $u'_{,}\bar{n} /= v_n$; d'où $t[u'] = t_o[u',u'\bar{n}]$ se réduit en $\bar{m}$.

Commentaires sur le lemme

L'essentiel est de remarquer que toutes les réductions ont bien la forme annoncée. Comme GD et RED ne sont pas utilisés, et que la réduction utilise toujours des étapes sur des sous-termes minimaux, une apparition désignée de u ne peut disparaître que lors de l'application d'une règle ut /= s, avec t normal. Mais, la réduction * est définie de telle manière que t est clos dans ce cas. Alors t est normal *, c'est à dire que c'est un numéral. Remarquons que, si $t[u]$ est AN, le chemin correspondant à la réduction à gauche * est fini, et donc son aboutissement est un terme normal clos de type o, soit $\bar{m}$.

Si on remplace le type o de $t[u]$ par ()*, le lemme est toujours valide, car les formes normales possibles sont V et F, qui ne contiennent pas u. Une autre manière d'exprimer le lemme 7 est de dire que les termes de type $(o\to\sigma)\to o$ (resp. $(o\to\sigma)\to()$) sont continus.

Lemme 9

Soit τ le type de $B^{\alpha\beta}$, et soient deux CR A et B. Alors $B^{h(A)h(B)}$ est dans $[\alpha,\beta/A,B]\tau$.

Démonstration

Soient C,D,E les CR $[\alpha,\beta/A,B](\sigma\to\beta)\to\beta$, $[\alpha/A](o\to\alpha)\to o$, $[\alpha/A]\,o\to\alpha$.

Il nous faut montrer que, pour tous r,s,t,u,v,w respectivement dans B,C,D,E,A, $[-/-]$ o, Brstuvw est dans B.

1- Si Brstuvw est dans B pour tous r,s,t,u,v,w, dans les CR ci-dessus, et t,u,v,w clos, alors B est dans le CR $F=[\alpha,\beta/A,B]\tau$.

Par induction sur L(r,s,t,u,v,w) : si t,u,v,w sont simultanément clos, Brstuvw est dans B par hypothèse. Sinon, vu que Brstuvw est S, il suffit de montrer que tous ses rédions stricts sont dans B. Mais, comme

* Voir 4ème section.

t,u,v,w ne sont pas simultanément clos, les seuls rédions stricts de Brstuvw sont de la forme Br's't'u'v'w', avec L(r',s',t',v',w') $<$ L(r,s,t,u,v,w) . On applique alors l'hypothèse d'induction et CR 4.

2- λxBrst(u;w',x/v')vSw est dans $[\alpha,\beta/A,B]\alpha\to\beta$, ssi pour tout a clos dans A, Brst(u;w',a/v')vSw est dans B.

Le 2) se démontre comme le 1), par induction sur L(r,s,t,u,a,v,v',w,w') en considérant les termes Brst(u;w',a/v')vSw. Le seul cas où une telle expression admet un rédion strict qui n'est pas de cette forme est en effet celui où t,u,v,v',w,w' sont tous clos. Mais, alors on utilise l'hypothèse. On termine à l'aide du lemme 1.

3- DD est dans $[\alpha,\beta/A,B]$ $(o,(\alpha\to\beta)\to\beta,\alpha\to\beta,\beta\to\beta)$

DIF est dans $[-/-]$ $(o,o\to o)$

(; /) est dans $[\alpha/A]$ $(o\to\alpha,o,\alpha,o\to\alpha)$

(; , /)est dans $[\alpha/A]$ $(o\to\alpha,o,\alpha,\alpha,o\to\alpha)$

Le 3) est conséquence des lemmes précédents, ou si l'on préfère de l'utilisation qui en sera faite plus loin, en ne considérant pas la Bar-récursion qui ne sert pas à définir les termes mentionnés.

4- Si pour tout a clos Brst(u;w,a/v)vSw est dans B, alors Brstuvw est aussi dans B. (a dans A)

Par induction sur L(r,s,t,u,v,w) : si t,u,v,w ne sont pas tous clos, les seuls rédions stricts de Brstuvw sont les Br's't'u'v'w', avec L(r',s',t',u',v',w') $<$ L(r,s,t,u,v,w), et on applique l'hypothèse d'induction. Sinon, outre les rédions stricts de la forme sus-mentionnée, il apparait des rédions stricts de la forme

DD(DIF(w',t'((u';w'/v'))),s', λxBr's't'(u';w',x/v')v'Sw',r') (R)

Mais comme λxBrst(u;w,x/v)vSw $\in[\alpha,\beta/A,B]\alpha\to\beta$ d'après 2-, 3- nous apprend que DD(DIF(w,t((u;w/v))),s, λxBrst(u;w,x/v)vSw,r) est dans B, et son rédion R est donc aussi dans B par CR 5.

5) Si B n'est pas dans F, on peut trouver r dans B, s dans C, t clos dans D, u dans E, v dans A, w dans $[-/-]$ o (u,v,w clos) et une suite a_m de

termes clos de A tels que, si $\bar{n}$ est la forme normale de w, et si

u_m est la suite définie par :

$u_m = (u\bar{m})$ si $m \leq n$

$u_{m+1} = (u_m; m, a_m/\gamma)$ si $m \geqslant n$

on ait $\quad Brstu_{n+p} vS^p w \notin B$ pour tout p.

Par 1-, on obtient r, s, t, u, v, w; 4- nous permet de passer de u_{n+p} à u_{n+p+1}. L'existence de la suite u_n est donc conséquence de l'axiome du choix dépendant. (En effet, l'étude de la Bar-Récursion exige l'adjonction des termes (σ, φ), et les u_n peuvent être construits à l'aide de ce schéma, pourvu qu'il satisfasse les conditions de réductibilité). On pose $a_m = u\bar{m}$ pour $m < \bar{n}$.

6- B est dans F. On considère une suite a_m comme dans 5-, et soit a'_m la suite des formes normales des termes a_n, soit φ. Alors $(h(A), \varphi)$ est dans $[\alpha/A]\ o \rightarrow \alpha$, car $(h(A), \varphi)w'$ se réduit en a'_n si w est $\bar{n}$, ou est SN si w' est normal non clos, les autres cas se traitant par induction sur L(w').

Donc $t'((h(A), \varphi))$ est normalisable, et même absolument normalisable. Soit donc une réduction à gauche* de ce terme en une forme normale close, c'est à dire un numéral $\bar{q}$. Le lemme 8 nous donne un entier p tel que si a'_i et $b\bar{i}$ ont même forme normale pour i plus petit que p t (b) se réduit en $\bar{m}$. Soit $j = \sup(n, p, q) + 1$.

Alors $t(u_j)$ se réduit en $\bar{q}$, et $DIF(\bar{j}, \bar{q})$ se réduit en un successeur.

Posons $j = n + k$.

Par hypothèse, $DD(DIF(S^k w, t(u_j; S^k w/v)), s, \lambda x Brst(u; S^k w, x/v) vS^{k+1} w, r)$ n'est pas dans B. Comme ce terme est S, il suffit, pour obtenir une contradiction, de montrer que tous ses rédions stricts sont dans B.

En mettant ce terme sous la forme symbolique

DD(w', s, s', r), en remarquant que w' et s' ainsi définis sont AN, on peut raisonner par induction sur L(w', s, s', r).

Premier cas : soit un rédion strict de la même forme ; alors on s'en occupe à l'aide de l'hypothèse d'induction.

Second cas : sinon, c'est que w' est $\bar{0}$ ou Sw" et, donc est de la forme Sw" par ce qui précède.

Alors DD(Sw",s,s',r) $/=_1$ $\lambda x'\lambda z'\lambda x\lambda y\lambda zz$(DD(w"),w",s,s',r)

Les nouvelles réductions strictes possibles consistent soit :

à continuer à normaliser DD(w")s,s',r ou w", soit à appliquer une λ-conversion sur x'. Ce dernier cas seul est important, et on obtient $\lambda z'\lambda x\lambda y\lambda zz$ (w",s,s',r) . En poursuivant le même type de raisonnement, on se ramène à $\lambda zz(r)$, puis à r, qui par hypothèse est dans B. C.Q.F.D.

Démonstration du théorème

Dans ce qui suit, nous considérerons des termes a,b, sur lesquelles des translations auront été opérées. Nous noterons $\underline{\alpha}$ (éventuellement $\underline{\alpha}$, β), la suite des ind de a, $\underline{A}$ une suite de CR associée à $\underline{\alpha}$ (éventellement $\underline{A}$,B), $\underline{\rho}$ la suite des types des variables libres de a (éventuellement $\underline{\rho}$, σ), $\underline{c}$ une suite de termes de types respectifs $[\underline{\alpha}/h(\underline{A})]\underline{\rho}$ (resp. $\underline{c}$ et d, de types respectifs $[\underline{\alpha}/h(\underline{A})]\underline{\rho}$ et $[\underline{\alpha}/h(\underline{A})]\sigma$) sujets à la condition que $\underline{c}\in[\underline{\alpha}/\underline{A}]\underline{\rho}$, ou $\underline{c}\in[\underline{\alpha},\beta/\underline{A},B]\underline{\rho}$ (resp. $\underline{c}$,d $\in[\underline{\alpha}/\underline{A}]$ $(\underline{\rho},\sigma)$.

0) Une variable est RD : en effet $x[h(\underline{A}),c] = c\in[\underline{\alpha}/\underline{A}]\rho$ si c est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\rho$, le type de x étant ρ .

1) Si a est RD, λxa est RD.

Par hypothèse, pour tous $\underline{A}$,$\underline{c}$ et d, a $[h(\underline{A}),\underline{c},d]$ est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\tau$.

Le lemme 1 nous assure que $(\lambda xa)[h(\underline{A}),\underline{c}] = \lambda x$ (a $[h(\underline{A}),\underline{c},x]$) est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma\to\tau$.

2) Si a et b sont RD, a(b) est RD.

Par hypothèse, a $[h(\underline{A}),\underline{c}]$ est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma\to\tau$, et b $[h(\underline{A}),\underline{c}]$ est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma$. Il s'ensuit par le lemme 2, que a(b)$[h(\underline{A}),\underline{c}]$, qui n'est autre que a $[h(\underline{A}),\underline{c}]$ (b $[h(\underline{A}),\underline{c}]$) est encore dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\tau$.

3) Si a est RD, DTβa est RD.

Par hypothèse, a $[h(\underline{A}),h(B),\underline{c}]$ est dans $[\underline{\alpha},\beta/\underline{A},B]\tau$, pour tous $\underline{A}$, B et $\underline{c}$. D'où, par le lemme 3, (DTβ a) $[h(\underline{A}),\underline{c}]$ = DT β(a $[h(\underline{A}),\beta,\underline{c}]$) est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\Lambda\beta\tau$, vu que β n'apparaît pas libre dans $\underline{\rho}$, et que donc $[\underline{\alpha},\beta/\underline{A},B]\underline{\rho}=[\underline{\alpha}/\underline{A}]\underline{\rho}$.

4) Si a est RD, a$\{\tau\}$est RD.

Par hypothèse, a $[h(\underline{A}),\underline{c}]$ est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\Lambda\beta\tau$.

Donc (a$\{\tau\}$) $[h(\underline{A}),\underline{c}]$ = a $[h(\underline{A}),\underline{c}]\{\sigma[h(\underline{A})]\}$ est dans $[\beta,\underline{\alpha}/([\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma),\underline{A}]\tau$, soit $[\underline{\alpha}/\underline{A}]([\beta/\sigma]\tau)$ par le lemme 4 et le lemme de substitution.

5) 7)

$\bar{o}$,S,GD,RED sont RD. (car ils sont clos, et les lemmes 5 et 7)

6) REC $^{\underline{\sigma}}$ est RD .

Il suffit de montrer que REC$^{\sigma[h(\underline{A})]}$ est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\tau[\sigma]$, où τ désigne le type de REC$^{\beta}$. Mais le lemme de substitution nous assure que $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\tau[\sigma]$ = $[\underline{\alpha},\beta/\underline{A},([\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma)]\tau$. On applique alors le lemme <u>6</u> et on remarque que $[\underline{\alpha},\beta/\underline{A},([\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma)]\tau$ n'est autre que $[\beta/([\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma)]\tau$.

9) B$^{\sigma\tau}$ est RD.

Par le lemme 9, et par deux applications du lemme de substitution.

<u>REMARQUE</u> Dans la partie IV, on considère des variables spéciales, et des règles de réduction qui dépendent du <u>nom</u> des variables. Il n'est pas question de substituer quoi que ce soit pour de telles variables, qui doivent être traitées comme des constantes, ainsi que nous le verrons. Sans cette précaution, il va de soi que les raisonnements précédents sont complètement faux.

SECTION 3

THEOREME DE REDUCTIBILITE (ANNEXE)

Dans cette section, nous allons examiner les modifications plus ou moins évidentes à apporter aux sections 1 et 2, pour tenir compte de la somme, du produit, de l'existentiation de types, dans le cas où ces opérations sont considérées comme primitives.

Il nous faut tout d'abord étendre la notion de dégénérescence. Pour celà, nous dirons que, si b est a ou un dégénéré de a, $\pi^1 b$, $ST\alpha xcb$,

$H^{\sigma}a$, $\oplus xycdb$ sont encore des dégénérés de a.

La définition des QR_i, pour les nouveaux types envisagés est :

(QR 7) a est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma\times\tau$ ssi $\pi^1 a$ et $\pi^2 a$ sont respectivement dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma$ et $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\tau$.

(QR 8) a est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma+\tau$ ssi pour tout CR C et tous b et c respectivement dans $[\underline{\alpha},\gamma/\underline{A},C]\sigma\to\gamma$ et $[\underline{\alpha},\gamma/\underline{A},C]\tau\to\gamma$, $\oplus xyb(x)c(y)a$ est dans C.

(QR 9) a est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\bigvee\beta\tau$ ssi pour tout CR C et tout b dans $[\underline{\alpha},\gamma/\underline{A},C]\bigwedge\beta\tau\to\gamma$, $ST\beta xb\{\beta\}(x)a$ est dans C.

Il est à la fois évident et fastidieux d'étendre les lemmes de la section 1 à QR7-8-9.

Les lemmes de la section 2 trouvent un prolongement naturel en

Lemme 10

Si a est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma$ et si b est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\tau$, a $\otimes$ b est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma\times\tau$.

Démonstration

Par induction sur L(a,b), en remarquant que $\pi^1(a\otimes b)$ est simple.

Un rédion strict de $\pi^1(a\otimes b)$ est de la forme

- $\pi^1(a'\otimes b')$ avec $L(a',b') < L(a,b)$; alors par CR 5, a' et b' sont dans les mêmes CR que a et b, et on applique l'hypothèse d'induction.
- soit a' (ou b') avec a /= a' (b /= b'). Par CR 5, a' et b' sont dans les mêmes CR que a et b.

Lemme 11

Si a est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma\times\tau$, $\pi^1 a$ et $\pi^2 a$ sont respectivement dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma$ et $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\tau$.

Lemme 12

Si a_i est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma_i$, $\iota^i a_i$ est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma_1+\sigma_2$.

Démonstration

Soient $b_1=b$, $b_2=c$, C, comme dans QR 8. Comme $\oplus x_1 x_2\, b_1(x_1) b_2(x_2)\, \iota^i a_i$ est simple, on peut, par CR 4 se ramener à considérer ses rédions stricts, par induction sur $L(b_1(x_1), b_2(x_2), a_i)$:

- un rédion strict de la forme $\oplus x_1 x_2 d_1 d_2\, \iota^i a'_i$ est dans C, grâce à l'hypothèse d'induction.

- un rédion strict de la forme $d_i[a'_i]$, où d_i est un rédion de $b_i(x_i)$, a'_i un rédion de a_i, est dans C, à cause de CR 5 appliqué à d_i et a'_i, et des hypothèses sur b_i et a_i.

Lemme 13

Soient des termes $b_i[x_i]$, de type $[\underline{\alpha}/\underline{h}(\underline{A})]\tau$, $(i=1,2)$; on suppose que pour tout terme a_i dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma_i$, $b_i[a_i]$ est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\tau$; alors si a est un terme de $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\sigma_1+\sigma_2$, $\oplus x_1 x_2 b_1 b_2 a$ est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\tau$.

Démonstration

$b'=b(x_1)$ $c'=c(x_2)$

Soient $b=\lambda x_1 b_1$, $c=\lambda x_2 b_2$, $C=[\underline{\alpha}/\underline{A}]\tau$; le lemme 1 et le lemme de substitution nous assurent que a, b et C vérifient les conditions de QR 8. Donc $\oplus x_1 x_2 \overset{b'c'}{bc} a$ est dans C, et son rédion $\oplus x_1 x_2 b_1 b_2 a$ est encore dans C.

Les lemmes 14 et 15, très proches de 12 et 13 sont simplement énoncés :

Lemme 14

Si a est dans $[\underline{\alpha},\beta/\underline{A},B]\sigma$, $I^{h(B)}a$ est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\forall\beta\sigma$.

Lemme 15

Si pour tout CR B et tout a dans $[\underline{\alpha},\beta/\underline{A},B]\sigma$, $b\{h(B),a]$ est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\tau$, et si c est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\forall\beta\sigma$, $ST\beta xbc$ est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\tau$.

Le théorème de réductibilité s'étend ensuite sans difficulté aux systèmes contenant les nouvelles fcl dont nous venons de parler.

Avant de passer aux problèmes que pose l'ultra-réduction, il nous faut dire quelques mots des autres schémas fonctionnels.

Le type absurde, $\perp$, est sans complications; il suffit de poser $[\underline{\gamma}/\underline{A}]\perp = \mathrm{Can}_{\perp}$, car si a est AN, Ha est AN et simple, et donc dans tous les CR.

Pour traiter le cas du zéro, il nous suffit de rajouter à la définition des CR la clause

(CR 0) $\quad 0^{h(A)}$ est dans A.

(CR 0) est évidemment vérifiée par Can, car 0^{σ} n'admet qu'un nombre fini de rédions stricts, comme on s'en assure par induction sur σ . D'autre part (CR 0) est conservée par les QR_i; par exemple, la clause (QR 5) : il faut montrer que 0(a) est dans un certain CR A, pour tout a dans B, Soit 0' un rédion de 0; on montre par induction sur L(0',a) que 0'(a) est dans A. Comme ce terme est simple, il suffit de considérer ses rédions stricts; ce sont d'une part les 0"(a'), avec L(0",a') $<$ L(0',a), et, au cas où 0' commence par un λ , les 0", avec $0' \neq_1 \lambda x 0"$; mais alors 0" est un rédion de $0^{h(A)}$, et donc dans A, par (CR 0).

La fcl d'induction se traite dans le même esprit que REC. Avec les notations de I:sec5;5, supposons a dans $B(\bar{o})$, et $b[\rho](c)$ dans $B(S\rho)$, pour tous ρ d'ordre 0, et c dans $B(\rho)$. (B est un CR)

Par induction sur la complexité de τ , on montre que $\mathrm{IND}^{\tau}_{\alpha}$ ab est dans $B(\tau)$. On utilise une induction subordonnée sur L(a,b). Comme $\mathrm{IND}^{\tau}_{\alpha}$ ab est S, il suffit, comme à l'accoutumée, de considérer ses rédions stricts.

Or les rédions stricts de $\mathrm{IND}_{\alpha}^{\tau}ab$ sont de la forme

- $\mathrm{IND}_{\alpha}^{\tau}a'b'$ $\quad L(a,b) > L(a',b')$
- a' $\quad$ cas où $\tau=\bar{o}$; si a est dans $B(\bar{o})$, on applique CR 5.
- $b'[\rho](\mathrm{IND}_{\alpha}^{\rho}a'b')$ $\quad$ cas où $\tau=S\rho$; mais on peut appliquer l'hypothèse d'induction principale. C.Q.F.D.

LES ULTRA-REDUCTIONS

L'ultra-réduction crèe un problème nouveau en ce sens qu'elle réduit tellement l'ensemble des termes simples que (CR 4) n'a plus aucune utilité. Par exemple un terme de type disjonctif ne peut jamais être simple, car la succession de deux dégénérescences sur ce terme conduit à un dégénéré auquel s'applique immédiatement (UR 1).

Pour pouvoir préserver l'ensemble de nos résultats, il est nécessaire d'abord d'exclure dans la définition de la simplicité, toutes les dégénérescences utilisant $\oplus$,ST,H.

Pour la simplicité de l'exposition, nous supposerons, dans ce qui suit que le système dont nous parlons ne contient ni types disjonctifs ni types absurdes; nous étudierons donc uniquement (UR 2); les rapports de (UR 2) avec (UR 3) et (UR 1) seront donc volontairement passés sous silence. Mais il n'est pas difficile de se convaincre que l'essence de ces rapports est déjà contenue entièrement dans les rapports d'(UR 2) et d'(UR 2).

La relation $a \dashv b$ est définie par :

- $a=b$ si b ne commence pas par ST.
- $a \dashv c$ si b est $\mathrm{ST}\alpha xcd$.

Cette relation est donc décidable.

La relation $a =/ b$ est définie par

$a =/$ ssi il existe b', $b /= b'$, et $a -/ b'$.

Si b est AN, $a =/ b$ est donc décidable.

De manière évidente, $a =/ b$ ssi $a -/ b$ ou il existe b_1 , $b /=_s b_1$, et $a =/ b_1$. (*)

Nous rajouterons aux CR i la clause suivante, qui sert de règle d'appoint quand (CR 4) est insuffisant :

(CR' 4)

$ST\alpha xab$ est dans A si :

(i) b est AN

(ii) a est dans A

(iii) pour tout terme $I^{\tau}c$, tel que $I^{\tau}c =/ b$, $a[\tau,c]$ est dans A.

(*) La forme générale de $a =/ b$, pour un système avec les trois (UR i) serait :

- $a=b$ si a ne commence ni par $\oplus$, ni par ST, ni par H.
- $a -/ c$ si b est $ST\alpha xcd$.
- $a -/ c$ ou $a -/ d$ si b est $\oplus xycde$.
- $o=1$ si b est Hc.

$=/$ se définirait similairement.

Les clauses analogues à CR'4 diraient que pour que $\oplus xyabc$ et Hd soient dans A, il suffit que

(i) c et d soient AN

(ii) a et b sont dans A

(iii) pour tout $\amalg^1 e$ (resp. $\amalg^2 e$) tel que $\amalg^1 e =/ c$ (resp. $\amalg^2 e =/ c$), $a[e]$ (resp. $b[e]$) est dans A.

La formulation analogue à (CR"4) pour ces deux types s'en déduirait immédiatement. Notons, que dans le cas de f Hd, il faudrait de plus supposer que les fcl qui servent à former f sont AN, à cause de l'absence de (ii) et (iii).

Bien que parfaitement suffisant dans le cadre de cette section, le critère CR'4 se révèle malaisé à manier quand il s'agit d'arithmétiser le théorème de réduction. Aussi lui préfèrerons nous le critère

(CR"4) $f\ ST\alpha xab$ est dans A si

(i) b est AN

(ii) fa est dans A.

(iii) pour tout $I^{\tau}c \Rightarrow/ b$, $fa[\tau,c]$ est dans A.

où f représente soit - rien du tout (cas de CR' 4) - soit une dégénerescence (non nécessairement minimale). Dans la pratique, nous pourrons supposer que f est formé uniquement avec EXT,AP, π^{i}.

Pour une plus grande simplicité des démonstrations, nous supposerons que chaque réduction stricte est composé d'une et une seule règle stricte.

A chaque terme $f\ ST\alpha xab$, nous associerons son <u>quadrille</u>, c'est à dire la donnée des quatre entiers $n(f),L(a),N(a),L(f,b)$, où $n(f)$ est le nombre de dégénerescences symbolisées par f, $N(a)$ est le nombre de symboles de a. Les quadrilles sont ordonnés lexicographiquement.

<u>Lemme A</u>

Supposons que $ST\beta yde$ est AN, et soit $I^{\sigma}u =/ e$; alors $d[\sigma,u]$ est AN et $L(d[\sigma,u]) < L(ST\beta yde)$.

<u>Démonstration</u>

Soit e' tel que $e /= e'$ et $I^{\sigma}u -/ e'$. On raisonne par induction sur $L(e')$.

1- e' est $I^{\sigma}u$; alors $ST\beta yde' /=_{s} d[\sigma,u]$ et donc $L(d[\sigma,u])$ est strictement inférieur à $L(ST\beta yde')$ et donc à $L(ST\beta yde)$.

2- e' est $ST\gamma ze"v$; alors $ST\beta yde' /=_{s} ST\gamma z(ST\beta yde")v$; par hypothèse d'induction, $L(d[\sigma,u]) < L(ST\beta yde")$ et donc $L(d[\sigma,u]) < L(ST\beta yde')$.

<u>Lemme B</u>

Soit b le terme AN STβyde; soit $I^{\sigma}u$ =/ e , $I^{\tau}c$ =/ d $[\sigma,u]$. Alors $I^{\tau}c$ =/ b.

<u>Démonstration</u>

Soit e' tel que $I^{\sigma}u$ -/ e' avec e /= e' ; on raisonne sur N(e').

- si e' est $I^{\sigma}u$, comme STβyde' /= d$[\sigma,u]$, $I^{\tau}c$ =/ STβyde'.
- si e' est STγze"v, avec $I^{\tau}c$ =/ e", comme STβyde' /= STγz(STβyde")v, et que $I^{\tau}c$ =/ STβyde" par hypothèse, $I^{\tau}c$ =/ STβyde' .

<u>Lemme C</u>

Can$_{\rho}$ vérifie CR"4.

<u>Lemme D</u>

Soit le terme fSTαxab ; on suppose fSTαab, AN ; soit $I^{\tau}c$ =/ fSTαxab.
Alors soit $I^{\tau}c$ =/ fa, soit il existe $I^{\rho}v$ =/ b, et $I^{\tau}c$ =/ fa$[\rho,v]$.

<u>Démonstration de C et D</u>

Dans le cas de C, il faut montrer que si,

(i) b est AN

(ii) fa est AN

(iii) pour tout $I^{\tau}c$ =/ b , fa$[\tau,c]$ est AN , alors

fSTαxab est AN. Remarquons que (i) et (ii) assurent que fSTαxab possède ses rédions stricts; il nous suffit donc de montrer que tous les rédions stricts de ce terme sont AN, par induction sur son quadrille, qui est bien défini, à cause de (i) et (ii).

Dans le cas de D, si $I^{\tau}c$ =/ fSTαxab, soit $I^{\tau}c$ -/ fSTαxab, soit $I^{\tau}c$ =/ w, où w est un rédion strict de fSTαxab. La première possibilité n'est réalisable que si n(f)=o (en effet, f ne renferme pas de ST parmi ses dégénerescences), et alors $I^{\tau}c$ -/ a, soit $I^{\tau}c$ =/ a= fa. Il nous reste donc à examiner tous les rédions stricts de fSTαxab, par induction sur le quadrille de ce terme, qui est encore bien défini.

Pour chaque catégorie de rédions stricts, nous examinerons séparément C et D.

- f'ST xa'b', avec soit a $/=_s$ a' auquel cas L(a') $<$ L(a), ou a=a', et $L(b',f') < L(b,f)$. Dans les deux cas le quadrille diminue.

L. C : a',b',f' vérifient (i),(ii),(iii) à cause de la stabilité de AN par réduction. Donc $f'ST\alpha xa'b'$ est AN par hypothèse d'induction.

L. D : Si $I^{\tau}c$ =/ $f'ST\alpha xa'b'$, par hypothèse d'induction, soit $I^{\tau}c$ =/ $f'a'$ auquel cas $I^{\tau}c$ =/fa, soit il existe $I^{\rho}v$ =/ b', et $I^{\tau}c$ =/ $f'a'[\tau,v]$ soit $I^{\rho}v$ =/ b et $I^{\tau}c$ =/ $fa[\rho,v]$

- $gST\alpha xhab$ (f est gh, $n(h)=1$, $n(f)=n(g)+1$). Comme $n(g) < n(f)$, le quadrille de ce terme est strictement plus petit que celui de $fST\alpha xab$. (ha est encore AN, par les hypothèses)

L. C : (i),(ii),(iii) sont évidemment vérifiés par b,g,ha. Donc $gST\alpha xab$ est AN.

L. D : Si $I^{\tau}c$ =/ $gST\alpha xhab$, alors soit $I^{\tau}c$ =/ gha, soit il existe $I^{\rho}v$, $I^{\rho}v$ =/ b et $I^{\tau}c$ =/ $gha[\rho,v]$, par l'hypothèse d'induction. Mais f=gh.

- $fa[\rho,v]$ (b est $I^{\rho}v$) .

L. C : comme $I^{\rho}v$ =/ b, (iii) nous assure que $fa[\rho,v]$ est AN.

L. D : si $I^{\tau}c$ =/ $fa[\rho,v]$ alors D est évidemment vrai.

- $fST\beta y(ST\alpha xad)e$ (b est $ST\beta yde$) Remarquons que $L(e) \leqslant L(b)$, $N(e) < N(b)$ $L(d) \leqslant L(b)$, $N(d) < N(b)$, et donc C et D sont vrais pour $fST\alpha xad$ et $fST\beta y(ST\alpha xad)e$.(et aussi $fST\alpha xad[\sigma,u]$ pour $I^{\sigma}u$ =/ e, à cause du lemme A).

L. C : Pour montrer que $fST\beta y(ST\alpha xad)e$ est AN, il suffit de montrer que $f,e,ST\alpha xad$ vérifient (i),(ii), et (iii). (i) est vérifié car e est un sous-terme de b. Pour vérifier (ii) il suffit de montrer que f,d,a vérifient (i),(ii) et (iii) ; (i) est vrai car d est un sous-terme de b;(ii) est vrai car fa est AN par hypothèse;(iii) est vérifié car si $I^{\tau}c$ =/ d, $I^{\tau}c$ =/ b, et donc $fa[\tau,c]$ est AN. Pour montrer que $f,e,ST\alpha xad$ vérifient (iii), il suffit de vérifier que pour tout $I^{\sigma}u$ tel que $I^{\sigma}u$ =/ e, $fST\alpha xad[\sigma,u]$ est AN. Il suffit de montrer que $f,d[\sigma,u],a$ vérifient (i),(ii) et (iii); le lemme A nous assure que $d[\sigma,u]$ est AN, soit (i); (ii) est vérifié car fa est AN; enfin, si $I^{\tau}c =/ d[\sigma,u]$, alors par le lemme B, $I^{\tau}c =/ b$, et donc $a[\tau,c]$ est AN, soit (iii).

L. D : si $I^{\tau}c =/ fST\beta y(ST\alpha xad)e$, soit $I^{\tau}c =/ fST\alpha xad$ (1er cas) soit $I^{\tau}c =/ fST\alpha xad[\sigma,u]$ (second cas). Le premier cas se décompose en $I^{\tau}c =/ fa$ ou $I^{\tau}c =/ fa[\rho,v]$ pour $I^{\rho}v =/ d$ et donc $I^{\rho}v =/ b$. Le second cas se décompose en $I^{\tau}c =/ fa$ ou $I^{\tau}c =/ fa[\rho,v]$ pour $I^{\rho}v =/ d[\sigma,u]$, soit, d'après le lemme B, $I^{\rho}v =/ b$. C.Q.F.D.

Nous allons maintenant faire la construction des QR i avec la notion de candidat de réductibilité, à laquelle on a adjoint CR"4. QR 9 peut se mettre sous la forme plus commode :

(QR'9) a est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\forall\beta\sigma$, ssi a est AN et pour tout $I^{\tau}c =/ a$, on peut trouver un CR B tel que c soit dans $[\underline{\alpha},\beta/\underline{A},B]\sigma$. $(h(B) = \tau)$

Lemme E

CR 4 et CR"4 sont vérifiés par les QR i.

Démonstration

Pour CR 4, il n'y a lieu de vérifier que pour QR'9 : si a est simple, a ne commence ni par ST ni par I, et donc $I^{\tau}c =/ a$ ssi il existe w $I^{\tau}c =/ w$ et $a \mathrel{/=_s} w$. Si a possède tous ses rédions stricts, et si tous ses rédions stricts sont AN, a est AN; l'autre condition sur a vient de la remarque précédente.

Pour CR"4, nous distinguerons deux cas. D'abord QR 5,6,et 7. L'appartenance d'un terme d à un des ensembles définis par QR 5,6,7 est défini par une quantification universelle : pour toute dégénerescence minimale g dans un certain ensemble, gd est dans un ensemble C(g); C(g) est un CR par hypothèse. Soit maintenant f,a,b tels que

(i) b est AN

(ii) fa est dans B (B est l'ensemble défini par QR 5,6,7)

(iii) $fa[\tau,c]$ est dans B pour tout $I^{\tau}c =/ b$.

On en conclut que, si g est une dégénerescence minimale appartenant à l'ensemble utilisé pour définir B,

(i) b est AN

(ii) gfa est dans C(g)

(iii) gfa$[\tau,c]$ est dans C(g) pour tout $I^{\tau}c$ =/ b.

Soit, puisque C(g) vérifie CR"4

gfSTαxab est dans C(g), et, par définition de B, on conclut à fSTαxab est dans B.

Le cas de QR'9 est nettement différent. Supposons que

(i) b est AN

(ii) fa est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]V\beta\sigma$

(iii) fa$[\tau,c]$ est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]V\beta\sigma$ pour tout $I^{\tau}c$ =/ b.

D'après le lemme C,fSTαxab est AN, puisque b, fa, fa$[\tau,c]$ le sont.

Soit maintenant I^{ρ} v =/ ST xab . Par le lemme D, soit I^{ρ}v =/ fa, soit I^{ρ}v =/ fa$[\tau,c]$ pour $I^{\tau}c$ =/ b. Dans ces deux cas, (ii) et (iii) assurent l'existence de B tel que h(B)=ρ et v est dans $[\underline{\alpha},\beta/\underline{A},B]\sigma$.

A l'aide des résultats précédents, nous pouvons nous concentrer sur la vérification des lemmes 1-15, c'est à dire essentiellement sur les lemmes 14 et 15.

- Le lemme 14 est vérifié, car si c est dans $[\underline{\alpha},\beta/\underline{A},B]\sigma$, tout I^{ρ}v tel que I^{ρ} v =/ $I^{h(B)}_{c}$ est nécessairement de la forme $I^{h(B)}_{c'}$, avec c /= c', et donc c' est dans $[\underline{\alpha},\beta/\underline{A},B]\sigma$ par CR 5. D'autre part comme c est AN par CR 2, $I^{h(B)}_{c}$ est AN.

- Le lemme 15 est vérifié (c'est à dire que la formulation QR'9 est plus forte que QR 9) : soient b et c comme dans l'énoncé du lemme 15 .

(i) c est AN par CR 2.

(ii) b est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\tau$.(avec a=x, B=Can$_{\beta}$)

(iii) b$[\rho,v]$ est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\tau$ pour tout I^{ρ} v =/ c, (avec a=v, B= le CR considéré dans QR'9)

CR'4 assure alors que STα xbc est dans $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\tau$.

Il ne reste donc plus aucun obstacle à la démonstration du théorème de réductibilité pour les systèmes munis de la réduction la plus fine que nous ayons envisagée ici, c'est à dire l'ultra-réduction.

<u>THEOREME 2</u>

Tous les termes d'un quelconque système fonctionnel parmi ceux envisagés dans le première partie, sec.5, sont absolument normalisables.

<u>REMARQUE</u>

Il n'est pas difficile de s'assurer que (QR 9) et (QR'9) sont des définitions équivalentes, à priori, c'est à dire pour n'importe quel système fonctionnel, non nécessairement réductible : supposons que a vérifie (QR 9); soit C le CR correspondant à la définition (QR'9); alors le terme $b = DT\beta\lambda x(I^{\beta}x)$ vérifie les conditions de (QR 9) ce qui montre que $ST\beta x I^{\beta} x a$ est dans C. Ceci implique que a est AN. On peut alors remarquer que , si $I^{\tau}c \neq a$, d'après le lemme B, $I^{\beta}x\,[\tau, c] = I^{\tau}c \neq ST\beta x I^{\beta} x a$, d'où $I^{\tau}c$ est dans C.

Cependant, cette équivalence ne nous dispense pas d'utiliser (QR'9), car (QR 9) ne devient maniable que lorsque l'on dispose d'un C possédant exactement les propriétés du CR défini par (QR'9).

SECTION 4 : MODELES DES SYSTEMES FONCTIONNELS

Dans ce qui suit suit, F désigne un système fonctionnel contenant le schéma O.

1. Le type ()

Nous adjoignons à F un nouveau type primitif noté (). Les schémas associés sont les suivants :

V et F sont deux termes de type ()

Pour tout type σ, D^{σ} est un terme de type $((), \sigma, \sigma, \to \sigma)$.

et les règles de réduction s'énoncent

$$\frac{a \;/\!=_1 a'}{D(V,a,b) \;/\!=_1 a'} \qquad\qquad \frac{b \;/\!=_1 b'}{D(F,a,b) \;/\!=_1 b'}$$

Un terme de type () sera appelé énoncé (sans quantificateurs).

On vérifie simplement que V,F,D sont définissables dans OF_2 par :

$() = \Lambda\alpha(\alpha, \alpha \to \alpha)$

$V = DT\alpha\, \lambda x^{\alpha} \lambda y^{\alpha} \;\; x^{\alpha}$

$F = DT\alpha\, \lambda x^{\alpha} \lambda y^{\alpha} \lambda y^{\alpha}$

$D^{\sigma}(x^{()}, a^{\sigma}, b^{\sigma}) = x\{\sigma\}(a,b)$

(Comparer avec la construction similaire du lambda-calcul)

Mais nous désirons là encore considérer ces termes comme primitifs. Les ennuis qui résultent de l'existence de $O^{()}$ sont résolus par la règle :

$$O^{()} \;/\!=_1 V$$

La ~~théorème de~~ réductibilité pour les systèmes contenant aussi V, F et D est complètement évidente. (Par QR 2, il suffit de poser $[\underline{\alpha}/\underline{A}]() = Can_{()}$).

A partir de maintenant, et sauf mention expresse du contraire, nous supposerons tous les systèmes fonctionnels munis de () et des schémas associés. (La seule exception de taille est rencontrée en partie III : les systèmes fonctionnels isomorphes à des systèmes de déduction ne doivent évidemment pas contenir ()).

() permet de définir les opérations habituelles du calcul propositionnel classique. (Une formulation similaire est aussi possible avec o, mais techniquement désavantageuse)

On pose par exemple, pour a et b de type ()

$a \vee b \ = D(a,a,b)$

$a \wedge b \ = D(a,b,a)$

$\neg a \ = D(a,F,V)$ etc...

2. Définition des modèles

Supposons que nous disposions, pour chaque ordre R, d'un nouvel ensemble (de cardinal arbitraire) de nouvelles constantes, A_R, $A = \bigcup_R A_R$, $F[A]$ désigne le système d'objets formels (opérateurs, et fcl formelles) obtenus en substituant pour certaines ind. d'objets de F, et d'ordre R, des éléments de A_R. L'égalité de deux opérateurs formels est définie ainsi: si σ et τ sont de même ordre, ils n'utilisent qu'un nombre fini d'éléments de a, et nous pouvons remplacer ces éléments par des nouvelles ind. de même ordre; σ et τ seront alors égaux, suivant que les opérateurs σ' et τ' le seront ou non, modulo les (OR_i).

Supposons avoir un tel $F[A]$; pour chaque type formel clos σ de $F[A]$, soit B un ensemble de nouvelles constantes de type σ. On désigne par $F[A,B]$ le système d'objets formels dont les opérateurs sont les opérateurs formels de $F[A]$, et les fcl sont les objets formels obtenus par substitution dans une fcl formelle de nouvelles constantes de B pour une variable formelle de même type formel.

La réduction /= dans $F[A,B]$ est définie ainsi : si a est une fcl formelle, remplaçons toutes les nouvelles constantes par des nouvelles ind. et variables, et on obtient un objet a'; si alors a' /= c, en faisant la substitution inverse, on obtient un b qui est une fcl formelle, et par définition, a /= b. On obtient ainsi un ensemble de clauses inductives pour la réduction formelle dans $F[A,B]$. La réduction * formelle dans $F[A,B]$ est définie (entre termes formels clos) comme la réduction formelle qui ne fait intervenir que des termes formels clos.

On désignera en général par la notation $F_o[C]$ l'ensemble des opérateurs et fcl formels clos d'un $F[A,B]$.

Un <u>modèle</u> de F n'est rien d'autre qu'un couple (M,=*), où M est un $F_o[C]$ et =* une relation d'équivalence définie entre termes formels de M de même type formel, et qui vérifie les conditions :

(1) Si a=*b, alors t(a)=*t(b) (a et b de type formel σ, t de type formel $\sigma \to \tau$, quelconques dans M)

(2) Si a /=* b, alors a=*b (a et b dans M de même type formel)

(3) Si a est une fcl formelle de type (), alors a=*V ou a=*F .

(4) V≠*F

(5) Si a est de type formel existentiel, il exsiste I^σ b, a=*I^σ b

(6) Si a est de type formel disjonctif, il existe $\amalg^i$b, a=*$\amalg^i$b .

3. Exemples de modèles

Avec X=∅, M_o=$F_o[\emptyset]$ est l'ensemble des termes clos de F. M_o peut être muni canoniquement de l'équivalence $=_o$ définie par $a=_o b$ ssi a et b ont même forme normale. Le fait que $(M_o,=_o)$ soit un modèle de F est complètement évident. Remarquons cependant les points suivants qui illustrent les définitions précédentes :

- Le caractère de <u>modèle</u> de$(M_o,=_o)$ ne peut pas être prouvé élémentairement.
- Par contre, si on supprime les clauses 3),5) et 6), et si on définit $=_o$ de la manière (non élémentairement équivalente) suivante:"a $=_o$ b ssi il existe c, a /= c et b /= c", 1, 2 et 4 sont élémentairement vérifiés.

Nous rencontrerons d'autres modèles dans la section suivante et en quatrième partie.

4. Quelques définitions

4.1. Modèle extensionnel

Un modèle est <u>extensionnel</u> si il vérifie (pour des objets de type approprié)

- $a =^* b$ ssi $a(c) =^* b(c)$ pour tout c.
- $a =^* b$ ssi $a\{\tau\} =^* b\{\tau\}$ pour tout .
- $a =^* b$ ssi $\pi^i a = \pi^i b$ pour $i=1,2$.
- $a =^* b$ ssi $ST\alpha x a\{\alpha\}(x) a = ST\alpha x c\{\alpha\}(x) b$ pour tout c.

(La condition correspondante pour les types disjonctifs :

$\amalg^i a =^* \amalg^j b$ ssi $i=j$ et $a =^* b$ est conséquence des propriétés

de $=^*$; en effet, on doit doit avoir par <u>1</u> $\oplus xyVF \amalg^i a =^* \oplus xyVF \amalg^j b$, et par <u>4</u>, on en déduit $i=j$. Supposons $i=j=1$; alors $\oplus xyx0 \amalg^1 a =^* xyx0 \amalg^1 b$, d'où $a =^* b$; la condition sur les types existentiels ne semble pas pouvoir être améliorée en $I^\sigma a =^* I^\tau b$ ssi $\sigma = \tau$ et $a =^* b$, ni même en $I^\sigma a =^* I^\sigma b \longrightarrow a =^* b$.)

4.2. Modèle standard (ω-modèle)

Un modèle est <u>standard</u> ssi, pour tout a de type o, il existe n, $a =^* \bar{n}$.
D'autre part, une utilisation élémentaire de REC nous montre que si $n \neq m$, alors $\bar{n} \neq^* \bar{m}$, ce qui justifie la terminologie.

SECTION 5 : STRUCTURES HEO_n et HRO_n

Pour simplifier, nous nous plaçons d'abord dans le fragment de OF_2 qui n'utilise que $o, \rightarrow$, et $\wedge$.

1. Définition de HEO_2

Dans tout ce qui suit, nous supposons que la "parenthèse de Kleene" sur $\mathbb{N}$ a été définie de telle façon que 0 code la fonction identiquement nulle.

1.1. Types primaires

Un type primaire de HEO_2 est un couple $P=(A,\underline{=})$, où $0 \in A \subset \mathbb{N}$, $\underline{=}$ relation d'équivalence sur A. Le graphe de $\underline{=}$ n'est pas supposé récursif.

On posera $D_P = A \times \{P\}$, les éléments de D_P sont donc les couples (e,P), $e \in A$.

$=_P$, relation définie sur D_P est donnée par $(e,P) =_P (e',P)$ ssi $e \underline{=} e'$.

1.2. Types

Un type est une construction combinatoire obtenue à partir de $o, \rightarrow, \wedge$ et de types primaires, et sans variables libres.

A chaque type σ, on associe un couple $(D_\sigma, =_\sigma)$, avec $D_\sigma = A \times \{\sigma\}$ où $0 \in A \subset \mathbb{N}$, $=_\sigma$ relation d'équivalence sur D_σ. On en déduit une relation d'équivalence sur A, c'est à dire qu'un type est à peu de choses près (l'emploi de σ en lieu et place de $(A,\underline{=})$) un type primaire.

En particulier, un type primaire est un type.

1.2.1. Type o

On pose $D_o = \{(e,o);\ e \in \mathbb{N}\}$, $(e,o) =_o (e',o)$ ssi $e=e'$.

1.2.2. Type $\sigma \rightarrow \tau$

On pose $D_{\sigma\rightarrow\tau}$ = ensemble des couples $(e,\sigma\rightarrow\tau)$ tels que :

pour tous (e_1,σ) et (e_2,σ), $\{e\}\, e_i$ est défini, et $(\{e\} e_i, \tau) \in D_\tau$, et $(e_1,\sigma) = (e_2,\sigma)$ implique $(\{e\}\, e_1, \tau) =_\tau (\{e\}\, e_2, \tau)$.

On pose de même $(e,\sigma\rightarrow\tau) =_{\sigma\rightarrow\tau} (e',\sigma\rightarrow\tau)$ ssi pour tout (f,σ) dans D_σ, $(\{e\}\, f, \tau) =_\tau (\{e'\}\, f, \tau)$.

1.2.3. Type $\Lambda\alpha\sigma[\alpha]$

On pose $D_{\Lambda\alpha\sigma}$ = ensemble des $(e,\Lambda\alpha\sigma)$ tels que $(e,\sigma[P]) \in D_{\sigma[P]}$ pour tout type primaire P.

On pose de même $(e,\Lambda\alpha\sigma) =_{\Lambda\alpha\sigma} (e',\Lambda\alpha\sigma)$ ssi $(e,\sigma[P]) =_{\sigma[P]} (e',\sigma[P])$ pour tout type primaire P.

1.2.4. On vérifie simplement que l'ensemble d'entiers associé à D_σ contient 0, et que $=_\sigma$ est une équivalence.

2. <u>Interprétation de OF_2</u>

Si dans la définition du fragment de OF_2 qui nous intéresse, on adjoint :

- un nouveau type clos P pour chaque type primaire
- une constante (e,σ) pour chaque type clos du système ainsi étendu, dès que $(e,\sigma) \in D_\sigma$,

on obtient ainsi une définition de OFE_2.

Soit $t[\underline{\alpha},\underline{x}]$ un terme de OFE_2, de type $\sigma[\underline{\alpha}]$; on lui associe l'expression formelle $(t^*[\underline{x}],\sigma[\underline{\alpha}])$, obtenue ainsi :

- si t est une nouvelle constante, (e,σ), $t^*=e$
- si t est $x^{\sigma[\underline{\alpha}]}$, $t^* = x$ -
- si t est $0^{\sigma[\underline{\alpha}]}$, $t^* = 0$
- si t est uv, t* est $\{u^*\}v^*$
- si t est $u\tau$, t* est u*
- si t est $\lambda x^{\sigma[\underline{\alpha}]} u[\underline{x}]$, t* est obtenu comme suit : si on ne tient pas compte du fait que u* est construit en utilisant des variables qui ont un type en indice supérieur, u* est une expression de la forme $u^*[x,\underline{y}]$, construite à partir de variables et d'entiers au moyen de $\{\}$.

Soit T* l'indice du programme : $(e,\underline{f}) \mapsto u^*[e,\underline{f}]$. On pose $t^* = \{\ldots\{\{T^*\}y_1\}\ldots y_p\}$.

- si t est $DT\alpha\, u[\alpha]$, on pose $t^*=u^*$.
- si t est S, on lui associe l'indice du programme $e \mapsto e+1$.
- si t est REC , on lui associe e défini par le programme :

$f,g,0 \mapsto f$; $f,g,n+1 \mapsto \{\{g\} \{\{\{e\} f\} g\} n)\} n$.

Supposons que t soit un terme clos de OFE_2; alors $(t^*, \sigma) \in D_\sigma$.
Pour démontrer ce résultat, nous avons besoin de prouver un peu plus, comme pour le théorème de réductibilité :

supposons que $t[\underline{\alpha},\underline{x}]$ soit de type $\sigma[\underline{\alpha}]$, la suite $\underline{x}$ ayant pour types $\tau[\underline{\alpha}]$. Soit $\underline{P}$ une suite de types primaires, $\underline{e}$ une suite d'entiers telle que $(e_i, \tau_i[P_i]) \in D_{\tau_i[P_i]}$ pour i=1...n. Alors $(t^*[\underline{e}], \sigma[\underline{P}]) \in D_{\sigma[\underline{P}]}$.
La démonstration suit les grandes lignes du théorème de réductibilité.
Le seul point (un peu) délicat est le suivant : le cas de l'extraction.
Pour simplifier, nous supposons que t est clos. Par hypothèse, $(t^*, \Lambda\alpha\sigma)$ est dans $D_{\Lambda\alpha\sigma}$. Soit τ un type clos, $(D_\tau, =_\tau)$ les relations associées.
Soit $(A, \underline{=}) = P$ le couple formé de l'ensemble d'entiers associé à D_τ, et de l'équivalence sur A associée à $=_\tau$. Alors $(t^*, \sigma[P]) \in D_{\sigma[P]}$, et un argument élémentaire (analogue au lemme de substitution, mais plus simple) montre alors que $(t^*, \sigma[\tau]) \in D_{\sigma[\tau]}$.

Soit maintenant une réduction* (c'est à dire ne faisant intervenir que des termes clos) t /= t' (t et t' sont donc clos). On montre que $t^* = t'^*$; pour RA1, RA5, RA7, c'est évident.

Pour (RA 3), si $a^* = a'^*$, $b^* = b'^*$, alors $\{a^*\}(b^*) = \{a'^*\}(b'^*)$.

Pour (RA 5), remarquons d'abord que dans la définition de $(\lambda xa)^*$, la suite $\underline{y}$ est vide. Par définition, $\{(\lambda xa)^*\}(b^*) = a^*[b^*]$. Deux cas se présentent : a est clos; alors , par hypothèse d'induction, $a^* = a'^*$, et ces deux expressions ne contiennent pas x; il n'y a donc rien à prouver.
a n'est pas clos : par définition des réductions*, alors a est identique à a', et donc, puisque, par hypothèse $b^* = b'^*$, $a^*[b^*] = a^*[b'^*] = a'^*[b'^*]$.

Le cas de (RA 8) et (RA 9) est complètement évident à partir de la définition de REC* et du fait que, si t est clos, t* est un entier.

<u>REMARQUE</u>

Ce que nous venons de dire ne s'étend pas aux réductions qui ne sont pas des réductions*. Cependant, si on remplace l'énoncé que nous venons de prouver par : "Si $t=t'$, alors $t^* =_c t'^*$ (t et t' clos) le résultat subsiste même pour des réductions non *. La démonstration est laissée au lecteur.

3. Cas de OF_2 tout entier

Indiquons rapidement comment définir OF_2 sur les autres types

3.1. Type ()

par définition, $(e,())\in D_{()}$ ssi $e=0$ ou $e=1$, et $(e,()) =_{()} (e',())$ ssi $e=e'$.

3.2. Type $\sigma\times\tau$.

On suppose que l'on s'est donné de plus une fonction de pairage récursive surjective $\langle\ ,\ \rangle$ et ses inverses récursifs $(\ )_i$, et que $\langle 0,0\rangle=0$.

par définition $(e,\sigma\times\tau)\in D_{\sigma\times\tau}$ ssi $((e)_1,\sigma)\in D_\sigma$ et $((e)_2,\tau)\in D_\tau$.

et $(e,\sigma_1\times\sigma_2) =_{\sigma_1\times\sigma_2} (e',\sigma_1\times\sigma_2)$ ssi $((e)_i,\sigma_i) =_{\sigma_i} ((e')_i,\sigma_i)$ $i=1,2$.

3.3. Type $\sigma+\tau$.

Avec la même fonction de pairage, on pose

$(e,\sigma+\tau)\in D_{\sigma+\tau}$ ssi $(e)_2=0$ et $((e)_1,\sigma)\in D_\sigma$ ou $(e)_2=1$ et $((e)_1,\tau)\in D_\tau$.

De même, $(e,\sigma+\tau) =_{\sigma+\tau} (e',\sigma+\tau)$ ssi $(e)_2=(e')_2$ et $((e)_1,\rho) =_\rho ((e)_2,\rho)$
($\rho=\sigma$ si $(e)_2=1$, τ sinon)

3.4. Type $\bigvee\alpha\sigma$.

$(e,\bigvee\alpha\sigma)\in D_{\bigvee\alpha\sigma}$ ssi il existe P primaire, $(e,\sigma[P])\in D_{\sigma[P]}$.

$(e,\bigvee\alpha\sigma) =_{\bigvee\alpha\sigma} (e',\bigvee\alpha\sigma)$ ssi pour tout P et tout f tel que $(f,\bigwedge\alpha[\sigma\to P])\in D_{\bigwedge\alpha[\sigma\to P]}$, $(\{f\}e,P) =_P (\{f\}e',P)$.

REMARQUE

Dans le cas de HEO_2, on ne peut pas espérer que cette structure interprète (modulo un éventuel changement de définitions pour les types exsitentiels) $I^\sigma a=I^\tau b\to\sigma=\tau$ et $a=b$, car la cardinal des types primaires n'est pas dénombrable.

La définition de $t\to t^*$ dans ces cas est laissée au lecteur.

4. Enoncé des résultats

THEOREME 3

Soit M l'ensemble des termes clos de OFE_2, $=^*$ étant définie par $t=^*t'$ ssi

$(t^*, \sigma) =_\sigma (t'^*, \sigma)$. Alors $(M, =^*)$ est un <u>modèle extensionnel standard</u> de OF_2.

<u>Démonstration</u> : complètement évident.

5. Définition des HEO_n

Pour $n=1$, c'est un cas particulier.

Indiquons rapidement comment interpréter un opérateur d'ordre $(())$, par exemple : ce sera une fonction **extensionnelle** appliquant tout type sur un type. On commencera avec les opérateurs primaires de cet ordre : ce sont les fonctions extensionnelles qui appliquent tout type primaire sur un type primaire. La généralisation aux autres ordres et la démonstration de résultats similaires pour les HEO_n et OF_n est enfantine.

6. Définition des HRO_n

HRO_n est obtenu à partir de HEO_n en oubliant tout ce qui à trait à l'égalité dans les définitions inductives. Les types sont <u>ensuite</u> munis de l'égalité habituelle entre entiers. La démonstration que nous avons faite du fait que OFE_n est un modèle (c.a.d. $t =^* t' \to t^* = t'^*$) était précisément conçue pour s'adapter aussi dans ce cas.

La définition d'un modèle à partir de HRO_n est laissée au lecteur.

ANNEXE : UN CONTRE-EXEMPLE

Soit τ le type $\Lambda\alpha\alpha$, σ le type $\tau\to\tau$.

On considère le schéma J_ρ de type $\sigma\to\rho$, pour chaque type ρ, non nécessairement clos, avec les règles de réduction

$J_\sigma\ (a)\ /=_1\ a$

$J_\rho\ (a)\ /=_1\ 0 \qquad \text{si} \quad \rho \neq \sigma$

Pour chaque type clos ρ, J_ρ est en fait définissable.

Sa signification semble claire, et pourtant, il est impossible de considérer ce nouveau schéma uniformément, car celà contredit les propriétés d'absolue normalisabilité.

Soient en effet x^τ de type τ, $x^\tau\{\sigma\}$ de type σ, $x^\tau\{\sigma\}(x^\tau)$ de type τ, $\lambda x^\tau x^\tau\{\sigma\}(x^\tau)$ de type σ, $J_\beta\ (\lambda x^\tau x^\tau\{\sigma\}(x^\tau))$ de type β ; soit enfin c de type τ, $c = DT\beta J_\beta\ (\lambda x^\tau x^\tau\{\sigma\}(x^\sigma))$.

Essayons d'effectuer une réduction [illegible] de c (c) :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{c\{\sigma\}\ /=\ J_\sigma\ (\lambda xx\{\sigma\}(x)) \qquad J_\sigma\ (\lambda xx\{\sigma\}(x))\ /=\ \lambda xx\{\sigma\}(x)}{c\{\sigma\}\ /=\ \lambda xx\{\sigma\}(x)}}{c\{\sigma\}(c)\ /=\ \lambda xx\{\sigma\}(x)\ (c)} \qquad \lambda xx\{\sigma\}(x)\ (c)\ /=\ c\{\sigma\}(c)}{c\{\sigma\}(c)\ /=\ c\{\sigma\}(c)}$$

Comme la réduction a utilisé plusieurs règles strictes, on voit que $c\{\sigma\}(c)$ n'est pas absolument normalisable.

Remarquons, que, si on essaye de traiter J_ρ à l'aide des CR, nous n'arriverons à aucun résultat, car il nous faudrait essentiellement montrer que si a est dans la réductibilité (sans paramètres) de type σ, $J_\sigma(a) \in A$ pour tout CR A de type σ. Mais comme $J_\sigma\ (a)\ /=\ a$, celà revient à montrer que tous les CR contiennent la réductibilité sans paramètre de type σ, résultat qui est faux.

TROISIEME PARTIE

LE FORMALISME DE LA THEORIE DES ORDRES

SECTION 1 :

LE CALCUL DES PREDICATS D'ORDRE FINI

Le *calcul des prédicats intuitionniste d'ordre fini quelconque* est l'outil logique de base pour la formalisation de la théorie des ordres.

1. Le langage

Celui-ci a été décrit en détail dans la première partie; cependant, pour se conformer à l'usage, nous serons amenés à modifier nos notations. Les opérateurs d'ordre () seront appelés *énoncés*. Nous ne considèrerons pas o comme un énoncé. Par contre, $\perp$ sera un énoncé primitif. Les opérateurs d'ordre quelconque seront appelés *termes*. Pour des raisons évidentes, nous noterons A,B,C... les énoncés, T,U,V... les termes.

Les symboles $\lambda, \rightarrow, \chi, +, \bigvee, \bigwedge$, seront réecrits respectivement $\lambda, \rightarrow, \wedge, \vee, \exists, \forall$, Les indéterminées (c'est à dire les *variables* de la théorie) seront réecrites de la même manière.

Nous supposerons aussi l'existence d'un certain nombre de lettres de prédicat; une lettre de prédicat à deux places sera interprétée comme un terme d'ordre (0,0): il en sera ainsi du prédicat d'égalité =.

Les lettres de fonction à une place, par exemple le successeur S, seront interprétées par des objets d'ordre 1. Pour interpréter des lettres de fonction biplaces, il faudrait disposer d'un ordre spécial 1' etc..., ce qui peut se faire sans difficulté. Une manière plus classique (et plus simple) de procéder consiste à donner des clauses inductives du style "si T et U sont des termes d'ordre 0, T + U est un terme d'ordre 0", etc... On raisonne de même sur des lettres triplaces, tétraplaces,...

2. Le système de déduction

Il y a une infinité d'axiomatisations équivalentes pour la théorie qui nous occupe. Parmi elles, nous choisirons celle qui s'inspire de la déduction naturelle, développée par Prawitz.

Les déductions seront représentées sous forme d'arbre. Les nœuds de l'arbre seront des énoncés. Les sommets de l'arbre seront divisés en deux catégories : - les hypothèses barrées, ou annulées, et - les hypothèses non annulées, ou hypothèses. L'arbre possède un seul nœud terminal, qui en est la conclusion. Etant donné un arbre $\mathbb{D}$, si $A_1,\dots,A_n$ sont ses hypothèses, et B sa conclusion, nous dirons que $\mathbb{D}$ est une déduction de B sous les hypothèses $A_1,\dots,A_n$. L'existence d'une déduction $\mathbb{D}$ de B sous les hypothèses $A_1,\dots,A_n$ est équivalent à la démonstrabilité de $(A_1 \to \dots \to (A_n \to B) \dots)$.

2.1. $\qquad A$

est une déduction de A sous l'hypothèse A.

2.2. L'implication

2.2.1. D'une déduction de B sous les hypothèses $\mathbb{H}$ et $\underline{A}$, où $\underline{A}$ désigne un ensemble fini d'apparitions de l'énoncé A dans la déduction, nous construisons une déduction de $A \to B$ sous les hypothèses $\mathbb{H}$.

$$\dfrac{\begin{array}{c} \mathbb{H} \quad \underline{A} \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \to B}$$

Cette règle est une des trois règles qui suppose une annulation éventuelle d'hypothèses. Remarquons que, pour éviter toute ambiguité, il est nécessaire de relier les apparitions de A annulées par cette règle à la barre séparant B de $A \to B$, par exemple au moyen d'une indexation. Parmi les possibilités qu'offre cette règle, nous noterons les suivantes : $\underline{A}$ est vide; il reste des apparitions de A dans $\mathbb{H}$, ...

2.2.2. A partir de déductions de A et $A \rightarrow B$ sous les hypothèses reepectives $\mathbb{H}$ et $\mathbb{I}$, nous obtenons une déduction de B sous les hypothèses $\mathbb{H}, \mathbb{I}$.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathbb{H}\\ \vdots \\ A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathbb{I}\\ \vdots \\ A \rightarrow B\end{array}}{B}$$

2.3. La conjonction

2.3.1.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathbb{H}\\ \vdots \\ A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathbb{I}\\ \vdots \\ B\end{array}}{A \wedge B}$$

2.3.2.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathbb{H}\\ \vdots \\ A \wedge B\end{array}}{A} \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathbb{H}\\ \vdots \\ A \wedge B\end{array}}{B}$$

2.4. La disjonction

2.4.1.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathbb{H}\\ \vdots \\ A\end{array}}{A \vee B} \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathbb{H}\\ \vdots \\ B\end{array}}{A \vee B}$$

2.4.2.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathbb{H}\\ \vdots \\ A \vee B\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathbb{I}, \cancel{A}\\ \vdots \\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathbb{J}, \cancel{B}\\ \vdots \\ C\end{array}}{C}$$

2.5. L'universelisation

2.5.1.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathbb{H}\\ \vdots \\ A\end{array}}{\forall \alpha\, A}$$

2.5.1. est restreint par la condition : α n'est pas libre dans aucun des énoncés de $\mathbb{H}$.

2.5.2.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathbb{H}\\ \vdots \\ \forall \alpha\, A\end{array}}{A\,[T]}$$

T est évidemment supposé être un terme de même ordre que α .

2.6. Existentiation

2.6.1.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathbb{H}\\ \vdots\\ A[T]\end{array}}{\exists\alpha\, A}$$

2.6.2.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathbb{H}\\ \vdots\\ \exists\alpha\, A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi,\cancel{A}\\ \vdots\\ B\end{array}}{B}$$

Cette règle est évidemment sujette aux restrictions suivantes : α n'est libre ni dans Π , ni dans B.

2.7. Absurdité

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathbb{H}\\ \vdots\\ \perp\end{array}}{A}$$

<u>3. Démonstrations</u>

Si $\mathbb{D}$ est une déduction de B dont toutes les hypothèses ont été annulées, on dit que $\mathbb{D}$ est une <u>démonstration</u> de B.

<u>Exemple de démonstration</u>

Dans ce qui suit, nous désignerons par A un énoncé, par α une ind d'ordre R, par T le terme $\lambda\alpha A$; nous rappelons que $T\alpha$ a été identifié une fois pour toutes avec A. Nous désignerons par $\leftrightarrow$ la conjonction de deux implications réciproques

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{A}}{A\to A}\,2.2.1. \qquad \dfrac{\cancel{A}}{A\to A}\,2.2.1.}{A\leftrightarrow A}\,2.3.1.}{\forall\alpha(A\leftrightarrow A)}\,2.5.1.}{\exists\beta\forall\alpha(\beta\alpha\leftrightarrow A)}\,2.6.1.\ \text{(appliqué à T)}$$

cette démonstration prouve le "schéma de compréhension".

4. L'axiomatisation de Spector

Il peut être commode d'avoir en réserve une autre axiomatisation; celle qui suit est due essentiellement à Spector; elle est intéressante à cause de sa simplicité.

A1 $P \to P$

A2 Si Q, alors $P \to Q$ (schéma inutile, conséquence A5i,A8,A3)

A3 Si P et $P \to Q$, alors Q.

A4 Si $P \to Q$ et $Q \to R$, alors $P \to R$.

A5 (i) $P \wedge Q \to P$ (ii) $P \wedge Q \to Q$ (iii) $P \to P \vee Q$ (iv) $Q \to P \vee Q$

A6 Si $P \to R$ et $Q \to R$, alors $P \vee Q \to R$.

A7 Si $R \to P$ et $R \to Q$, alors $R \to P \wedge Q$.

A8 Si $P \wedge Q \to R$, alors $P \to (Q \to R)$

A9 Si $P \to (Q \to R)$, alors $P \wedge Q \to R$.

A10 $\perp \to P$.

B1 Si $Q \to P$, alors $Q \to \forall \alpha P$

B2 Si $P \to Q$, alors $\exists \alpha P \to Q$.

Dans B1 et B2, nous supposons que α n'est pas libre dans Q.

B3 $\forall \alpha P \to P[T]$

B4 $P[T] \to \exists \alpha P$

Il est très aisé de vérifier que l'axiomatisation de Spector est équivalente à l'axiomatisation présentée en 2., c'est à dire que les deux systèmes ont exactement les mêmes théorèmes.

SECTION 2 : LA THEORIE DES ORDRES

La théorie des ordres et ses sous-systèmes (analyse, arithmétique,...) sont obtenues par l'adjonction de nouveaux axiomes.

1. Axiomes pour l'égalité, le successeur, ...

Identité	$x=x$	
Egalité	$x=y \rightarrow (Px \rightarrow Py)$	
Successeur	$Sx \neq \bar{o}$	
	$Sx=Sy \rightarrow x=y$	
Addition	$x + \bar{o} = x$	(C 1)
	$x + Sy = S(x + y)$	(C 2)
Produit	$x \cdot \bar{o} = \bar{o}$	(C 3)
	$x \cdot Sy = x \cdot y + x$	(C 4)

Vu que tous les systèmes envisagés contiennent l'induction, il est plus simple de remplacer les axiomes d'identité et d'égalité par les suivants :

$\bar{o} = \bar{o}$ (C 5)

$Sx \neq \bar{o}$ $\quad$ $\bar{o} \neq Sy$ (C 6i) (C 6ii)

$Sx = Sy \leftrightarrow x = y$ (C 7)

2. Schéma d'axiomes d'induction

$$\frac{A[\bar{o}] \qquad A[x] \rightarrow A[Sx]}{A[t]} \qquad (D)$$

Remarques :

1) Si la théorie contient des variables pour les objets d'ordre (0), ainsi que le schéma de compréhension, l'induction peut être exprimée par l'unique axiome :

$$\forall \alpha \ \forall y \ (\alpha \bar{o} \ \wedge \forall x \ (\alpha x \rightarrow \alpha Sx) \rightarrow \alpha y)$$

2) Dans un système ne comportant pas de schéma de compréhension (c'est à dire essentiellement l'arithmétique) il est préférable d'adjoindre (D) aux règles des systèmes de déduction exposées en section I, 2. , avec la restriction que x n'est libre dans aucune hypothèse de la déduction de $A[x] \to A[Sx]$.

3. L'axiome du choix

Pour l'interprétation des fonctions de plusieurs variables en tant que fonction d'une variable (c'est à dire par un objet d'ordre 1), il suffit de disposer d'une fonction de pairage $x,y \mapsto x_*y$, par exemple $x_*y = 2^x.3^y$; en général, on posera $f_x(y)=f(x_*y)$. L'axiome du choix peut alors s'énoncer

$$\forall x \exists f \ A[x,f] \to \exists g \forall x \ A[x,g_x] \qquad (AC_{01})$$

Remarquons que l'axiome du choix

$$\forall x \exists y \ A[x,y] \to \exists f \forall x \ A[x,f(x)] \qquad (AC_{00})$$

est conséquence de (AC_{01}).

(AC_{01}) n'a pas une grande force du point de vue de la théorie de la démonstration. La situation change radicalement si on ajoute le tiers exclu au système, ou, plus restrictivement l'axiome de Spector :

$$\forall x \neg\neg P(x) \longrightarrow \neg\neg \forall x P(x) \qquad (F)$$

En effet, on a $\forall x \ (A[x] \vee \neg A[x]) \to \forall x \exists y \ (A[x] \leftrightarrow y=\bar{o})$

Par (AC_{00}) on obtient

$$\forall x \ (A[x] \vee \neg A[x]) \qquad \exists f \forall x \ (A[x] \leftrightarrow fx=\bar{o})$$

Comme l'axiome (F) assure $\neg\neg\forall x \ (A[x] \vee \neg A[x])$, nous obtenons

$\neg\neg \exists f \forall x \ (A[x] \leftrightarrow fx=\bar{o})$, soit la double négation du schéma de compréhension.

4. Axiomes d'extensionalité

Si nous définissons l'égalité extensionnelle entre objets de même ordre

par $x =_0 y$ ssi $x=y$

$f =_1 g$ ssi $\forall x \ (fx = gx)$

$\alpha =_{(\underline{R})} \beta$ par $\forall \alpha_{R_1} \ldots \forall \alpha_{R_n} (\alpha \alpha_{R_1} \ldots \alpha_{R_n} \leftrightarrow \beta \alpha_{R_1} \ldots \alpha_{R_n})$

L'axiome d'extensionalité s'exprime par

$$\alpha =_R \beta \rightarrow (P[\alpha] \rightarrow P[\beta]) \qquad (E)$$

5. Le tiers-exclu

Le tiers exclu peut être adjoint aux systèmes, en vue d'obtenir un système classique.

$$A \vee \neg A \qquad (TE)$$

6. Interprétation du tiers-exclu

Pour les théories comme l'analyse ou l'arithmétique pour lesquelles l'axiome d'extentionalité est prouvable, on peut utiliser la traduction de Gödel-Kreisel. La situation se complique un peu quand on use des ordres supérieurs.

On définit deux transformations $^+$ et $^-$, qui coïncident sur tous les ordres, sauf sur l'ordre (), pour lequel A^- est exactement $\neg\neg A^+$.

Pour les ordres 0 et 1, $^+$ et $^-$ sont l'identité.

Pour les énoncés atomiques, qui sont tous de la forme $T\underline{U}$, $(TU)^+$ est défini comme $T^+\underline{U}^+$, et donc $(T\underline{U})^-$ est $\neg\neg T^+\underline{U}^+$.

Pour un énoncé quelconque, A^- est obtenu à partir de A en rajoutant sytématiquement une double négation devant les formules atomiques, et devant tous les connecteurs utilisés pour construire A à partir de ses sous-formules atomiques, les sous-formules atomiques ayant au préalable subi l'opération $^+$.

La transformation $^+$ est définie comme l'identité sur les variables et les constantes (comme =) de tous les ordres. Enfin, $(\lambda \underline{x} A)^+$ est défini comme $\lambda \underline{x} A^+$.

Lemme 1

$T^+[\underline{U}^+] = (T[\underline{U}])^+$ (l'égalité est ici l'égalité entre énoncés)

Le lemme 1 est une conséquence évidente des définitions. Remarquons qu'il n'est pas vrai si on remplace $^+$ par $^-$, par exemple si T est $\alpha^{()}$, $\underline{U}$ est $\beta^{()}$, et si on substitue β pour α, on a $(T[\underline{U}])^- = \neg\neg\beta$, mais $T^-[\underline{U}^-] = \neg\neg\neg\neg\beta$.

Lemme 2

Si T=U , alors $T^+=U^+$, et $T^-=U^-$. L'égalité est ici l'égalité donnée par les OR i)

Le lemme 2 est une conséquence évidente du lemme 1.

Lemme 3

Si A est prouvable, A^- est prouvable.

Démonstration

La démonstration est la même que pour la traduction habituelle; bien entendu, on utilise le lemme 2. Tous les axiomes donnés en 1.2.4. sont stables par l'interprétation, c'est à dire que leur interprétation reste prouvable. F^- est évidemment prouvable, et l'axiome F assure la prouvabilité de $(AC)^-_{01}$ à l'aide de (AC_{01}).

Remarquons que si on dispose de l'axiome d'extensionalité, il suffit d'avoir une traduction * qui vérifie $\vdash T=U \rightarrow T^*=U^*$, ou l'égalité est ici l'égalité extensionnelle.

THEOREME 1

Si A est prouvable à l'aide du tiers-exclu, dans un des systèmes envisagés, A^- est prouvable sans le tiers-exclu dans le même système. En particulier, la théorie avec le tiers-exclu est cohérente relativement à la théorie correspondante sans le tiers-exclu.

7. Interprétation de l'extensionalité

Nous voulons définir définir une traduction * telle que si A est prouvable à l'aide de (E), A* soit prouvable sans E.

Pour celà, il suffit de définir pour chaque ordre R un terme Ext_R

d'ordre (R), et de restreindre toutes les quantifications à Ext .

En particulier $\alpha =_{(\underline{R})} \beta$ devient

$$\forall \alpha_1 \ldots \forall \alpha_n \ (\mathrm{Ext}_{R_1}(\alpha_1) \wedge \ldots \wedge \mathrm{Ext}_{R_n}(\alpha_n) \rightarrow (\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_n \leftrightarrow \beta\beta_1 \ldots \beta_n) \ )$$

Pour les ordres 0,1,(), Ext est défini comme étant toujours vrai.

Pour l'ordre $(\underline{R})$, on définira $\mathrm{Ext}_{(\underline{R})}$ par

$$\mathrm{Ext}_{(\underline{R})}(\alpha) = \ldots \forall \alpha_i \forall \beta_i \ldots (\ \ldots \wedge \mathrm{Ext}_{R_i}(\alpha_i) \wedge \mathrm{Ext}_{R_i}(\beta_i) \wedge \alpha_i =_{R_i} \beta_i \wedge \ldots$$
$$(\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_n \rightarrow \alpha\beta_1 \ldots \beta_n) \ )$$

A* est donc défini comme l'énoncé obtenu à partir de A en restreignant toutes les quantifications à Ext.

Lemme 4

Si A est prouvable, alors A* est aussi prouvable.(A est clos, et nous ne supposons pas l'axiome d'extensionalité)

THEOREME 2

Si A est prouvable à l'aide de l'axiome d'extensionalité, A* est prouvable sans cet axiome, sous les hypothèses que toutes les variables libres de A* sont dans Ext. En particulier, l'axiome d'extensionalité est cohérent relativement à la théorie sans extensionalité.

7. Interprétation de l'induction

Si le système dont il s'agit possède des variables d'ordre (0), et la compréhension pour cet ordre, on peut définir N comme le plus petit ensemble d'entier contenant $\bar{o}$ et stable par successeur.

$$N(y) = \forall \alpha \ (\ \alpha \bar{o} \wedge \forall x (\ \alpha x \rightarrow \alpha S x \ ) \rightarrow \alpha y \ )$$

A chaque énoncé A, on peut associer un énoncé A^N obtenu en restreignant toutes les quantifications d'ordre 0 à N.

THEOREME 3

Si A est prouvable à l'aide de l'induction, A^N est prouvable sans induction; en particulier, l'analyse, la théorie des ordres avec induction sont cohérentes par rapport au système sans induction.

SECTION 3 : ELIMINATION DES COUPURES

Considérons un système de déduction naturelle comme ceux de la section 1, 2. ; une coupure dans une déduction est une étape inutile lors de l'écriture formelle de la démonstration. Pour rendre cette notion plus précise, nous aurons besoin de quelques définitions : les règles 2.2.1,2.3.1,2.4.1 ,2.5.1,2.6.1 , seront appelées introductions les règles 2.2.2,2.3.2,2.4.2,2.5.2,2.6.2,2.7 seront appelées éliminations. Parmi les prémisses d'une élimination nous en distinguerons une, appelée la prémisse principale : la premisse principale est celle dont le premier symbole importe pour pouvoir appliquer la règle.
Une coupure est la succession de deux règles, l'une étant une introduction, l'autre une élimination, la formule introduite par la première étant prémisse principale de la seconde. Notons qu'une coupure ne peut porter que sur deux règles se rapportant au même connecteur, car si la première règle est une $\mathcal{J}$-introd., sa conclusion, qui est premisse principale de la seconde, doit commencer par J, et donc la seconde règle est une $\mathcal{J}$-élim. ; en particulier, il n'y a pas de coupure (dans le sens précédent) dont la formule principale (c'est à dire la formule qui est à la fois conséquence de l'introduction, et prémisse principale de l'élimination) soit $\perp$, puisqu'il n'y a pas de $\perp$ -introd.

Il est toutefois intéressant de considérer une définition moins restrictive de la notion de coupure : nous dirons que la succession d'une élimination portant sur $\vee$, $\exists$, ou $\perp$, (2.4.2,2.6.2,2.7), et d'une élimination quelconque, la conséquence de la première étant prémisse principale de la seconde, constitue encore une coupure.

Si nous adjoignons au système la règle d'induction (D) de la section 2,2. , nous dirons encore qu'il y a coupure si le terme t de la conclusion est soit $\bar{o}$, soit de la forme Su. Pour éviter toute ambigüité, dans le cas où A ne renferme aucune apparition libre de x, il faut bien entendu supposer que t est uniquement déterminé par la règle, c'est à dire qu'il existe un mode de repérage entre les prémisses et la conclusion comportant la donnée explicite de t. La même remarque s'applique bien entendu pour 2.5.2 et 2.6.1 .

1. Isomorphisme entre déduction naturelle et systèmes fonctionnels

Cette idée est due essentiellement à Howard. A chaque déduction $\mathbb{D}$ d'un énoncé A sous les hypothèses $A_1,\dots,A_n$, nous pouvons associer un terme $h(\mathbb{D})$ de type A, dont les seules variables libres sont de type A_1 ou A_2 ... ou A_n . h sera un isomorphisme ssi on dispose pour la notion de déduction d'une notion d'égalité ou d'identification entre apparitions différentes d'une même hypothèse : considérons par exemple une déduction comportant deux apparitions de la même hypothèse A ; nous pouvons soit décider que ces deux hypothèses sont identiques, soit qu'elles sont différentes; nous pourrons pour représenter cette alternative, dans le premier cas, les relier entre elles par une ligne, dans le second ne pas les relier. Bien entendu, si nous avons opté pour le second cas il ne sera plus possible, ultérieurement, de procéder à une annulation simultanée des deux hypothèses, alors que, dans le premier cas, si on veut annuler une des hypothèses, il nous faudra aussi annuler l'autre.

La définition de h se fait par induction sur les déductions, supposées munies d'une identification entre hypothèses.

2.1.1 une déduction formée d'une hypothèse sera représentée par une variable de son type : $h(A) = x^A$; toutes les autres hypothèses qui sont des apparitions de A et qui apparaitront ultérieurement seront représentées par la même variable x^A ssi elles sont reliées à cette hypothèse.

2.2.1 si $\mathbb{D}$ est obtenue à partir de $\mathbb{D}'$ par introduction de $\rightarrow$,

$h(\mathbb{D})$ est $\lambda x^A h(\mathbb{D}')$ sous réserve que les apparitions annulées de A aient été représentées par x^A.

2.2.2 si $\mathbb{D}$ est conséquence de $\mathbb{D}'$ et $\mathbb{D}''$ par $\to$-élim., $h(\mathbb{D})$ est $h(\mathbb{D}'')(h(\mathbb{D}'))$.

2.3.1 si $\mathbb{D}$ est conséquence de $\mathbb{D}'$ et $\mathbb{D}''$ par $\wedge$-introd., $h(\mathbb{D})$ est $h(\mathbb{D}') \otimes h(\mathbb{D}'')$.

2.3.2 si $\mathbb{D}$ est conséquence de $\mathbb{D}'$ par la i-ième $\wedge$-élim., $h(\mathbb{D})$ est $\pi^i h(\mathbb{D}')$.

2.4.1 si $\mathbb{D}$ est conséquence de $\mathbb{D}'$ par la i-ième $\vee$-introd, $h(\mathbb{D})$ est $\amalg^i h(\mathbb{D}')$.

2.4.2 si $\mathbb{D}$ est conséquence de $\mathbb{D}', \mathbb{D}'', \mathbb{D}'''$ par $\vee$-élim., $h(\mathbb{D})$ est $\oplus x^A y^B h(\mathbb{D}'')h(\mathbb{D}''')h(\mathbb{D}')$, x^A et y^B représentant les hypothèses annulées.

2.5.1 si $\mathbb{D}$ est conséquence de $\mathbb{D}'$ par $\forall$-introd portant sur α, $h(\mathbb{D})$ est $DT\alpha\, h(\mathbb{D}')$.

2.5.2 si $\mathbb{D}$ est conséquence de $\mathbb{D}'$ par $\forall$-élim portant sur T, alors $h(\mathbb{D})$ est $h(\mathbb{D}')\{T\}$

2.6.1 si $\mathbb{D}$ est conséquence de $\mathbb{D}'$ par $\exists$-introd portant sur T, alors $h(\mathbb{D})$ est $I^T h(\mathbb{D}')$

2.6.2 si $\mathbb{D}$ est conséquence de $\mathbb{D}'$ et $\mathbb{D}''$ par $\exists$-élim, alors $h(\mathbb{D})$ est $ST\alpha x^A \mathbb{D}'' \mathbb{D}'$, où x^A représente les hypothèses annulées.

2.7 si $\mathbb{D}$ est conséquence de $\mathbb{D}'$ par $\perp$-élim, $h(\mathbb{D})$ est $H^A(h(\mathbb{D}'))$

(D) si $\mathbb{D}$ est conséquence de $\mathbb{D}'$ et $\mathbb{D}''$ par (D), portant sur t, $h(\mathbb{D})$ est $IND^A x^O h(\mathbb{D}')h(\mathbb{D}'')t$.

Réciproquement, on peut associer à toute fcl d'un système fonctionnel ne contenant que les schémas que nous venons d'utiliser une déduction avec identification d'hypothèses et une seule; nous ne le ferons pas, puisqu'il suffit seulement de lire les clauses qui précèdent à l'envers.

2. Réduction des coupures

La notion de réduction des coupures est exactement la notion que l'on obtient en transportant la notion de réduction (en fait d'ultra-réduction) pour un système fonctionnel par le biais de l'isomorphisme h^{-1}, dans le système des déductions. Ce transfert est rendu possible par le fait que h identifie les coupures et les termes fonctionnels susceptibles de subir une réduction stricte ne se terminant pas par une règle conservative. En particulier h identifie les <u>déductions</u> <u>sans coupures</u> et les fcl normales.

Nous noterons <u>conv</u> la notion tranportée correspondant à $/=$.

Nous pouvons écrire mécaniquement :

$\mathbb{D}$ conv. $\mathbb{D}$

si $\mathbb{D}$ conv. $\mathbb{D}'$ et $\mathbb{D}'$ conv. $\mathbb{D}''$, alors $\mathbb{D}$ conv $\mathbb{D}''$.

si $\mathbb{D}_1 \ldots \mathbb{D}_n$ conv. respectivement $\mathbb{D}'_1 \ldots \mathbb{D}'_n$, et si $\mathbb{D}$ est obtenue à partir de $\mathbb{D}_1 \ldots \mathbb{D}_n$ par application d'une règle R, alors $\mathbb{D}$ conv. $\mathbb{D}'$, où $\mathbb{D}'$ est la déduction obtenue à partir de $\mathbb{D}'_1 \ldots \mathbb{D}'_n$ en utilisant R.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\cancel{A}\\ \vdots\\ B\end{matrix}}{A \to B} \qquad \begin{matrix}\vdots\\ A\end{matrix}}{B} \qquad \text{conv.} \qquad \begin{matrix}\vdots\\ A\\ \vdots\\ B\end{matrix}$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A_1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots\\ A_2\end{matrix}}{A_1 \wedge A_2}}{A_i} \qquad \text{conv.} \qquad \begin{matrix}\vdots\\ A_i\end{matrix}$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A_i\end{matrix}}{A_1 \vee A_2} \qquad \begin{matrix}\cancel{A}_1\\ \vdots\\ B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\cancel{A}_2\\ \vdots\\ B\end{matrix}}{B} \qquad \text{conv.} \qquad \begin{matrix}\vdots\\ A_i\\ \vdots\\ B\end{matrix}$$

$$\cfrac{\cfrac{\overset{\vdots}{A[T]}}{\exists\alpha A} \qquad \overset{\cancel{A}}{\overset{\vdots}{B}}}{B} \qquad \text{conv.} \qquad \begin{matrix}\vdots\\ A[T]\\ \vdots\\ B\end{matrix}$$

$$\cfrac{\cfrac{\overset{\vdots}{A}}{\forall\alpha A}}{A[T]} \qquad \text{conv.} \qquad \overset{\vdots}{A[T]}$$

$$\cfrac{\overset{\vdots}{A[\bar{o}]} \qquad \overset{\vdots}{A[x]\to A[Sx]}}{A[\bar{o}]} \qquad \text{conv.} \qquad \overset{\vdots}{A[\bar{o}]}$$

$$\cfrac{\overset{\vdots}{A[\bar{o}]} \qquad \overset{\vdots}{A[x]\to A[Sx]}}{A[St]} \qquad \text{conv.} \qquad \cfrac{\cfrac{\overset{\vdots}{A[\bar{o}]} \qquad \overset{\vdots}{A[x]}\; A[Sx]}{A[t]} \qquad \overset{\vdots}{A[t]\to A[St]}}{A[St]}$$

$$\cfrac{\cfrac{\overset{\vdots}{A\vee B} \quad \overset{\cancel{A}}{\overset{\vdots}{C}} \quad \overset{\cancel{B}}{\overset{\vdots}{C}}}{C} \qquad \vdots\cdots\vdots}{D}\,E \qquad \text{se convertit en :}$$

$$\cfrac{\overset{\vdots}{A\vee B} \qquad \cfrac{\overset{\cancel{A}}{\overset{\vdots}{C}} \quad \vdots\cdots\vdots}{D}\,E \qquad \cfrac{\overset{\cancel{B}}{\overset{\vdots}{C}} \quad \vdots\cdots\vdots}{D}\,E}{D}$$

$$\cfrac{\cfrac{\overset{\vdots}{\exists\alpha A} \qquad \overset{\cancel{A}}{\overset{\vdots}{B}}}{B} \qquad \vdots\cdots\vdots}{D}\,E \qquad \text{conv.} \qquad \cfrac{\overset{\vdots}{\exists\alpha A} \qquad \cfrac{\overset{\cancel{A}}{\overset{\vdots}{B}} \quad \vdots\cdots\vdots}{D}\,E}{D}$$

$$\cfrac{\cfrac{\overset{\vdots}{\bot}}{A} \qquad \vdots\cdots\vdots}{D}\,E \qquad \text{conv.} \qquad \cfrac{\overset{\vdots}{\bot}}{D}$$

(Dans les trois derniers schémas, E désigne une élimination arbitraire, les pointillés $\vdots \cdots \vdots$ sont d'éventuelles branches secondaires, c'est à dire des déductions des prémisses secondaires, ou non principales)

3. Nomenclature des systèmes utilisés

Tous les systèmes considérés contiendront l'ordre O. Si nous voulons indiquer qu'un système contient aussi l'ordre 1, nous adjoindrons la lettre s dans son écriture symbolique.

L'indice 1 signifiera que la quantification sur des objets (et donc aussi que l'écriture de ces objets, car sans quantifications il se comportent comme des constantes) d'ordre (), ou surtout d'ordre (R) est impossible.

Pour définir la signification de l'indice n ($n \geq 1$), il suffit de dire que les quantifications sont restreintes à des ordres dont la profondeur ne dépasse n-2, la définition de la profondeur donnée en I.5.9. étant prolongée par

$PF(0)=PF(1)=-1$, étant bien entendu, que si la lettre s n'est pas utilisée pour dénoter le système, les ordres contenant 1 ne sont pas utilisés.

PC dénotera le calcul des prédicats, IPC le calcul des prédicats avec la règle (D). Ainsi PC_1 sera le calcul des prédicats du premier ordre, PC_2 le calcul des prédicats du second ordre avec des variables d'ensembles, sPC_1 le calcul des prédicats du second ordre avec des variables de fonctions, PC_ω le calcul des prédicats d'ordre fini.

HA sera le système obtenu à partir de IPC en adjoignant les axiomes (C 1) ... (C 7). Ainsi HA_1 sera l'arithmétique de Heyting, HA_2 la théorie des "species" (l'analyse), HA_ω la théorie des ordres.

SA_n sera le système obtenu à partir de sHA_n par adjonction des schémas (F) et (AC_{01}). Pour $n<\omega$, SA_n et HA_{n+1} sont donc équicohérentes, et HA_ω et SA_ω sont aussi équicohérentes. SA_1 est exactement le système Σ_2 de Spector.

L'indice supérieur ^{c} dénotera l'adjonction de TE au système.

L'indice supérieur (i) signifiera que nous avons affaire à un <u>sous-système fini</u> d'une des théories envisagées.(on suppose n fini)

De manière similaire à la définition de I.5.9., nous considérons un ensemble fini OP d'opérateurs, c'est à dire de termes et d'énoncés, et nous construisons la clôture OP' de OP sous les opérations de changement de nom pour les variables (indéterminées) libres, et de substitution réciproque. Le sous-système fini est alors obtenu en restreignant les $\forall$-élim et $\exists$-introd à des T dans OP', les (D) à des A dans OP', les applications de (F) et AC_{01} à des énoncés de OP'.

4. Théorème d'élimination des coupures

THEOREME 4

Les systèmes de déduction PC_n, IPC_n, sPC_n, $sIPC_n$, $PC_n^{(i)}$, $IPC_n^{(i)}$, $sPC_n^{(i)}$, $sIPC_n^{(i)}$ possèdent la propriété de convertibilité forte, c'est à dire que toutes les suites de conversions se terminent; en particulier, dans ces systèmes, toute démonstration se convertit en une démonstration sans coupure.

Le théorème n'est qu'une réénonciation des résultats généraux de la seconde partie.

SECTION 4 : LE SCHEMA DE REFLEXION

Dans ce qui suit, nous désignerons par K le calcul des prédicats intuitionniste de la théorie des ordres, sans l'égalité, (mais avec les symboles $=,+,.,S,\bar{o}$), avec, pour les ordres autres que O, les règles de $\forall$-élim. et $\exists$-introd restreintes au cas où T est une variable.

Ce calcul vérifie évidemment la propriété d'ultra-réduction, qui implique la propriété de la sous-formule : une démonstration de A peut être construite qui n'utilise que des sous-formules de A, où, par sous-formule, on entend :

- Si A est atomique, A lui-même
- Si A est $B \wedge C$, $B \vee C$, $B \rightarrow C$, les sous-formules de A sont A et les sous formules de B et/ou de C.
- Si A est $\exists xB$, $\forall xB$, où x est d'ordre O, les sous-formules de A sont A et toutes les sous formules des énoncés $B[t]$ où t est un terme d'ordre O quelconque.
- Si A est $\exists XB$, $\forall XB$, les sous formules de A sont A et les sous-formules de B . (l'ordre de X est distinct de O)

De plus, tout ce raisonnement peut être mené à bien par une induction jusqu'à ω^3, et donc formalisable dans l'arithmétique de Heyting.

Etant donné qu'il s'agit là d'un résultat très connu de Gentzen, nous ne ferons pas la démonstration.

Si, dans la définition des sous formules, nous remplaçons la troisième clause par la quatrième, nous obtenons une définition inductive des <u>sous-formules vraies</u>. Les sous-formules vraies sont en nombre fini, pour chaque énoncé A.

Soit maintenant KA la théorie obtenue par adjonction à K des axiomes de Peano, y compris l'induction sur sur tous les énoncés.

(En fait il suffit de se placer dans une théorie KA^n, dont le langage est restreint de telle manière que les seuls ordres supérieurs considérés sont ceux qui servent à construire A)

Considérons maintenant l'ari~~th~~métisation de la notion de terme, d'énoncé de K, dans KA. Nous ne considèrerons que les termes construits à partir d'un nombre fini (~~métamat~~iquement) de variables libres.

thème/

Pour les termes, nous disposons de fonctions numériques $\underline{\bar{o}}$, $\underline{S}$, $\underline{x}_i$, $\underline{+}$, $\underline{\cdot}$, et de clauses inductives définissant la notion de terme de rang 0 dans KA.

L'interprétation de la notion de terme est donnée dans KA par la définition inductive :

$V(\ \underline{\bar{o}}\ ) = \bar{o}$

$V(\ \underline{S}t\ ) = S(V(\ t\ )$

$V(\ \underline{x}_i\ ) = y_i$ (y_i est une variable de KA de rang 0 associée injectivement à l'objet $\underline{x}_i$)

$V(\ t \underline{+} u\ ) = V(\ t\ ) + V(\ u\ )$

$V(\ t \,\underline{\cdot}\, u\ ) = V(\ t\ ) \cdot V(\ u\ )$

Si on désigne par $\underline{\bar{x}}$ l'objet défini inductivement par

$\underline{\bar{o}} = \underline{\bar{o}}$; $\underline{\overline{(Sx)}} = \underline{S\bar{x}}$, il est rapidement vérifié par induction sur x, que $V(\ \underline{\bar{x}}\ ) = x$.

De même que nous avons associé injectivement des variables aux expressions $\underline{x}_i$ de rang 0, nous pouvons étendre cette association aux rangs supérieurs. Ainsi, nous pourrons parler simultanément de $\ulcorner A \urcorner$, qui est un entier, et qui n'a pas de variable libre, et de A qui est un énoncé, et qui, à ce titre peut en avoir.

<u>Lemme 1</u>

Pour chaque ensemble fini d'énoncés $(B_1,\dots,B_n,B)$, on peut démontrer dans KA que $Ded_K(\ulcorner B_1 \urcorner(x_1,\dots,x_m),\dots,\ulcorner B_n \urcorner(x_1,\dots,x_m);\ulcorner B \urcorner(x_1,\dots,x_m))$ implique $(B_1(V(x_1),\dots,V(x_m)) \rightarrow \dots(B_n(V(x_1),\dots,V(x_m)) \rightarrow B(V(x_1),\dots,V(x_m)))$ où $x_1,\dots,x_m$ varient parmi les arithmétisations de termes de rang 0.

Schéma de démonstration

Comme le théorème de forme ultra-normale est formalisable dans KA, on peut raisonner par induction sur la longueur d'une déduction, en considérant séparément le nombre fini métamathématiquement des dernières règles possibles, les hypothèses d'induction étant similaires à l'énoncé à démontrer, et $B_1,\dots,B_n,B$ étant remplacées par des sous-formules vraies qui sont en nombre fini, si on ne tient pas compte des répétitions. D'autre part, les termes qui sont substitués peuvent être supposés ne dépendre que d'un nombre fini de variables, dépendant des variables (en nombre fini) qui servent à construire $x_1,\dots,x_m$, et des variables libres et muettes de $B_1,\dots,B_m,B$.

Par exemple, supposons m=n=o; $\mathrm{Ded}(\;;\ulcorner\exists zB\urcorner)$ ($\exists z$ B clos) implique l'existence d'un terme x clos tel que $\mathrm{Ded}(\;;\ulcorner B\urcorner(x))$. L'hypothèse d'induction sur la longueur des déductions nous assure que $\mathrm{Ded}(\;;\ulcorner B\urcorner(x)) \to B(V(x))$, et on obtient $\mathrm{Ded}(\;;\ulcorner\exists zB\urcorner) \to \exists x \ulcorner B\urcorner(V(x))$, et donc $\mathrm{Ded}(\;;\ulcorner\exists zB\urcorner) \to \exists zB$.

Lemme 2

Soit KB une extension de KA, KC un sous-système fini de KB; pour chaque énoncé A (dépendant d'une seule variable libre de rang 0), on peut montrer dans KB que $(\ulcorner \vdash_{KC} \ulcorner A\urcorner(x)\urcorner) \to A(V(x))$

Démonstration

Soit C la conjonction des clôtures universelles des axiomes propres de KC. Alors $KB \vdash (\ulcorner\vdash_{KC}\ulcorner A\urcorner(x)\urcorner) \to (\ulcorner\vdash_K \ulcorner C \to A\urcorner(x)\urcorner)$; d'après le lemme 1, $KB \vdash (\ulcorner\vdash_K \ulcorner C \to A\urcorner(x)\urcorner) \to (C \to A(V(x)))$, et comme $KB \vdash C$, on en déduit le résultat annoncé.

THEOREME 5 (Réflexion)

Sous les hypothèses du lemme 2, on a

$KB \vdash (\forall x \ulcorner\vdash_{KC}\ulcorner A\urcorner(\underline{x})\urcorner) \to (\forall x\, A(x))$

Démonstration

En effet, $(\forall x \ulcorner\vdash_{KC}\ulcorner A\urcorner(\underline{x})\urcorner) \to (\forall x\, A(V(\underline{x})))$ est démontrable dans KB d'après le lemme 2. D'autre part, $V(\underline{\bar{x}}) = x$ est un théorème de KB.

REMARQUE

La démonstration du lemme 1 utilise, pour chaque énoncé A un nombre fini d'axiomes d'induction dont la complexité croît avec celle de A.

Par contre, elle n'utilise pas de schéma de compréhension. On retrouve ainsi le résultat qui assure que l'induction n'est pas finiment axiomatisable à partir de certains cas d'induction et de compréhension, car si $IPC_n^{(i)}$ est un sous-système fini de IPC_n, la réflexion ne peut être prouvée dans $IPC_n^{(i)}$, à cause de l'impossiblité de prouver $\vdash_{IPC_n^{(i)}} \ulcorner\bot\urcorner \to \bot$ dans $IPC_n^{(i)}$; or ceci est précisément prouvable dans $IPC_n^{(j)}$, le système obtenu en ajoutant un axiome d'induction.

SECTION 5 : DEMONSTRATION DU THEOREME DE REDUCTIBILITE POUR LES SOUS-SYSTEMES FINIS

Nous désignerons dans ce qui va suivre, par $F^{(i)}$ un sous-système fini d'un des systèmes fonctionnels de I.5.9., ou de III.3.3. .

Il nous faut essayer de formaliser la démonstration globale de la réductibilité pour $F^{(i)}$ dans un certain système formel dont le choix est loin d'être indifférent.

1. Faisceaux

Un faisceau partant de a est un ensemble fini de réductions finies partant de a, toutes de longueur non nulle, chaque réduction étant considérée comme suite de réductions strictes. On exige de plus que toute réduction finie soit comparable avec un des éléments du faisceau, c'est à dire est soit incluse dans un élément du faisceau, soit un prolongement d'un de ses éléments. Nous demandons enfin que dans chaque élément du faisceau, qui est une suite $a_o,\ldots,a_{n+1}$ avec $a_o=a$, $a_i /=_s a_{i+1}$, $a_o,\ldots,a_n$ possèdent leurs rédions stricts.
Si de plus, dans chaque élément $a_o,\ldots,a_{n+1}$ du faisceau, $a_o,\ldots,a_n$, sont simples, on dira que la faisceau est simple.

De manière évidente, l'énoncé "$\mathbb{F}$ est un faisceau (simple) partant de a" est récursif en $\mathbb{F}$ et a.

L'énoncé "a est AN" peut se mettre sous la forme Σ_1^o : il existe un faisceau partant de a dont les terminaux sont normaux. (Les terminaux d'un faisceau sont les éléments a_{n+1} de ses constituants $a_o,\ldots,a_{n+1}$)

Il est aisément démontré que si tous les terminaux d'un faisceau partant de a sont AN, a est AN.

(CR 4) est avantageusement reformulé en :

Si a admet un faisceau simple dont tous les terminaux sont dans A, a est dans A.

La notion de faisceau nous permet de réduire considérablement le nombre d'inductions utilisées; par exemple, la stabilité de CR 4 par QR 5 est démontrée au moyen du théorème :

Soient un faisceau simple $\mathbb{F}$ partant de a, et b un terme AN; il existe un faisceau simple $\mathbb{F}(b)$ partant de a(b) dont les terminaux sont de la forme a'(b'), a' étant un terminal de $\mathbb{F}$, b' un rédion de b.

Par des considérations similaires, on peut formaliser les lemmes suivants de la seconde partie : Le lemme 1 de la section 1, les lemmes 1, 2,3,4,5,6,7,8,10,11,12,13,14,15 des sections 2 et 5. Par exemple le lemme 1 est conséquence de l'unique théorème :

Etant donnés les termes AN a et b, il existe un faisceau simple partant de $\lambda x a(b)$ et dont les terminaux sont de la forme a'[b'], a' et b' étant des rédions respectivement de a et de b.

De même, les lemmes A-E ne nécessitent qu'un nombre fini d'axiomes. Quant au lemme 9, nous y reviendrons plus spécialement plus tard.

2. Formalisation de la réductibilité pour un système sans B

Pour obtenir le théorème de réductibilité, nous utilisons, en plus des lemmes déjà cités, qui ne nécessitent qu'une axiomatisation finie :

- des schémas de compréhension : pour appliquer les lemmes 4,6,14.
- des inductions pour montrer la réductibilité de REC quand on ne dispose pas d'ordres supérieurs (il faut alors démontrer le lemme 6 séparément pour chaque type), et de $\mathrm{IND}_{\alpha}^{\tau}$ ab.

Mais la finitude de $F^{(i)}$ intervient précisément ici : nous avons besoin d'un nombre infini de compréhensions, inductions, pour chaque QR correspondant à un opérateur de OP'; mais, par le lemme de substitution, ces compréhensions et ces inductions peuvent être obtenues directement à partir d'un nombre fini d'entre elles, celles correspondant à OP. Nous avons donc un système fini dans lequel on peut démontrer séparément que chaque fcl est AN :

THEOREME 6

Pour chaque sous sytème fini

$OF_n^{(i)}, OFA_n^{(i)}, PC_n^{(i)}, IPC_n^{(i)}, sPC_n^{(i)}, sIPC_n^{(i)}$,

il existe une démonstration globale de réductibilité dans HA_n (et donc dans un $HA_n^{(j)}$), c'est à dire qu'on peut prouver l'énoncé " tous les termes du système $OF_n^{(i)}$..., sont absolument normalisables".

3. Systèmes contenant B

Le résultat se complique du fait que la démonstration utilise le tiers exclu. Dans SA_n, l'axiome du choix classique

$$\forall x \neg\neg \exists y A(x,y) \rightarrow \neg\neg \exists g \forall x A(x,g_x)$$

est dérivable à partir de (F) et AC_{01}, et en particulier, l'axiome du choix dépendant que nous avons utilisé.

Pour les sous-systèmes finis, nous pourrons ainsi démontrer dans SA_n que tous les termes de $OFB_n^{(i)}$ sont $\neg\neg$ AN.

Il est certainement possible d'améliorer ce résultat, soit

- en construisant dans SA_n un modèle de la Bar-récursion
- en essayant de reformuler la démonstration, par exemple en trouvant une clause CR_x qui assurerait le raisonnement par induction sur l'ensemble bien fondé des fcl qui servent à calculer B.

En l'absence de ce genre de résultat, nous convenons d'ajouter le principe de Markov à SA_n (voir V,sec.6), afin que l'analogue du théorème 6 pour $OFB_n^{(i)}$ et SA_n soit toujours valide.

SECTION 6 : FONCTIONS RECURSIVES PROUVABLES

Soit T une théorie contenant l'arithmétique; une fonction récursive f, représentée par un numéro e, est dite récursive-prouvable dans T si $T \vdash \forall x \exists y\, T_1(\bar{e},x,y)$, T_1 étant le prédicat de Kleene.

Soit F un système fonctionnel; les <u>fonctions</u> de F sont les fonctions récursives dont le numéro e est défini par $f(\bar{n}) \,/\!=\, \overline{\{e\}n}$, $\{\,\}$ étant les "Kleene brackets", l'équation devant être vérifiée pour tout n, et f désigne un objet de type $(o \to o)$, clos.

THEOREME 7

Les fonctions des systèmes OF_n, OFA_n, sont récursives prouvables dans HA_n, celles de OFB_n sont récursives prouvables dans SA_n.

Démonstration

Soit par exemple f dans OF_n ; alors f est aussi dans un $OF_n^{(i)}$, ce qui montre que la réductibilité de tous les $f(\bar{n})$ peut être prouvée dans un $HA_n^{(j)}$, soit dans HA_n. Mais la réductibilité globale de tous les $f(\bar{n})$ est équivalente à $\forall x \exists y\, T_1(e,x,y)$, où e est le numéro attaché à f. C.Q.F.D.

ANNEXE A : LE SYSTEME U

Nous allons décrire rapidement un système formel U qui peut par certains côtés apparaître comme une généralisation naturelle de la théorie des types. Nous montrons tout de suite que ce système est incohérent.

Les conséquences de ce résultat sont exposées à la fin de cette annexe et dans l'annexe suivante.

1. Description du système U

1.1. Les types de U sont les types de F_2, avec de plus le type primitif (), et sans o.

1.2. Les termes de U sont les fcl construites à l'aide des schémas de F_2 (sauf ceux concernant le type o) et des schémas

1.2.1. $\perp$ est un terme de type ().

1.2.2. si A et B sont de type (), $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ sont de type ().

1.2.3. si A est de type (), et si x est une variable de type σ, $\forall x^{\sigma} A$ et $\exists x^{\sigma} A$ sont des termes de type ( ).

1.2.4. si A est de type (), et si α est stratifiable dans A, (α est une ind., c'est à dire est d'ordre ()) , $\exists \alpha A$ et $\forall \alpha A$ sont des termes de type ().

Les termes de type () seront encore appelés énoncés.

Les termes sont munis de l'égalité définie par les (RA i), les règles associées aux schémas supplémentaires 1.2.i étant conservatives.

Par le théorème de réductibilité, l'égalité entre termes est bien définie.

1.3. Déductions

Les règles de déduction sont les règles ordinaires d'élimination et d'introduction définies en section 1.

Nous allons maintenant raisonner dans U.

2. Egalité dans U

$$x^{\sigma} = y^{\sigma} =_d \forall z^{\sigma\to()} (z(x) \longleftrightarrow z(y))$$

L'égalité a les propriétés d'une relation d'équivalence; de plus, si x = y, alors T(x)=T(y).

3. Ordres sans torsion(OST)

Soit σ un type. On considère le type $L(\sigma) =_d (\sigma, \sigma\to()) \times (\sigma, \sigma\to())$.

Un objet a de ce type est un OST ssi

3.1. $\pi^1 a$ (noté $\equiv_a$) est une équivalence, soit

$$x \equiv_a y \to x \equiv_a x \qquad (1)$$

$$x \equiv_a y \to y \equiv_a x \qquad (2)$$

$$(x \equiv_a y \wedge y \equiv_a z) \to x \equiv_a z \qquad (3)$$

3.2. $\pi^2 a$ (noté $<_a$) est un ordre strict de même domaine, soit

$$x <_a y \to (x \equiv_a x \wedge y \equiv_a y) \qquad (4)$$

$$\neg(x <_a x) \qquad (5)$$

$$(x <_a y \wedge y <_a z) \to (x <_a z) \qquad (6) \qquad (*)$$

3.3. $\pi^2 a$ est sans torsion, c'est à dire que deux segments initiaux isomomophes sont déterminés par des éléments égaux.

Pour formaliser ceci, nous avons besoin de quelques définitions :

soit a de type $L(\sigma)$, b de type $L(\tau)$, censés être des OST.

Une fonction de a dans b est un objet de type $(\sigma, \tau\to())$ tel que

$$f(x,y) \wedge x \equiv_a x' \wedge y \equiv_b y' \to f(x',y') \qquad (7)$$

$$(f(x,y) \wedge f(x,y')) \to (x \equiv_a x \to y \equiv_b y') \qquad (8)$$

$$x \equiv_a x \to \exists y\ f(x,y) \qquad (9)$$

Si on note $D(a) = \lambda x\ x \equiv_a x$

(7),(8), et (9) expriment que la restriction de f à $D(a) \times D(b)$ est un graphe fonctionnel.

(*) il faut aussi $x \equiv_a y \wedge x' \equiv_a y' \wedge x <_a y \to x' <_a y' \qquad (6')$

En fait, nous demanderons que f soit croissante :

$$(x <_a x' \wedge f(x,y) \wedge f(x',y')) \rightarrow y <_b y'. \quad (10)$$

Nous noterons Mor(a,b,f) la conjonction de (7),(8),(9),(10).

Soit $f^{-1} = \lambda xyf(y,x)$; Isom(a,b,f) signifiera que

$$\mathrm{Mor}(a,b,f) \wedge \mathrm{Mor}(b,a,f^{-1}). \quad (11)$$

Le <u>segment</u> S(a,x) est défini par

$$\pi^1 S(a,x) = \lambda yz(z <_a x \wedge y =_a z) \quad (12a)$$

$$\pi^2 S(a,x) = \lambda yz(z <_a x \wedge y <_a z) \quad (12b)$$

La dernière condition sur OST s'énonce

$$\mathrm{Isom}(S(a,x),S(a,x'),f) \wedge D(a,x) \wedge D(a,x') \rightarrow x =_a x' \quad (13)$$

OST(a) est donc la conjonction de (1)(2)(3)(4)(5)(6)(13)(6').

<u>Proposition 1</u>

Soit a tel que OST(a), et soit x dans D(a), c'est à dire tel que D(a,x); alors $\neg$ Isom(a,S(a,x),f)

<u>Démonstration</u>

Soit f tel que Isom(a,S(a,x),f), et soit y dans D(S(a,x)) tel que f(x,y). Alors $y <_a x$ par définition.

On vérifie que Isom(S(a,x),S(b,y),f) où b est S(a,x); comme la transitivité de la notion de segment est aisément prouvée, il vient Isom(S(a,x),S(a,y),f), d'où par (13) $x =_a y$, une contradiction.

<u>Proposition 2</u>

Si OST(a) et D(a,x), alors OST(S(a,x)).

Evident.

Dans la suite, nous noterons $\mathrm{OST}^{\sigma}(a)$ pour dire que a est un OST de type $L(\sigma)$.

4. Univers des ordres sans torsion (UO)

UO est objet de type$\left(\bigvee\alpha\ L(\alpha)\right) \rightarrow ()$. Par définition

$$UO(a) \ =_d \ \exists\alpha\ \exists b^{L(\alpha)}\ \left[OST^{\alpha}(b) \wedge a=I^{\alpha}(b)\right] \qquad (14)$$

En fait UO n'est que le domaine d'un OST qui est défini par

$$a \equiv_o b \ =_d \ \exists\alpha\exists f\ \exists c\ \exists c'(OST(c) \wedge OST(c') \wedge a=Ic \wedge b=Ic' \wedge Isom(c,c',f))$$

$$a <_o b \ =_d \ \exists\alpha\exists f\ \exists c\ \exists c'\ \exists x\ (OST(c) \wedge OST(c') \wedge a=Ic \wedge b=Ic' \wedge D(c',x) \wedge$$
$$\wedge\ Isom(c,S(c',x,f)\quad)$$

Donc UO n'est défini par "il existe un type α et un OST^{α} tel que a les représente", etc...

En théorie des ensembles, UO, $\equiv_o$, $<_o$ seraient respectivement, l'"ensemble" des ordres sans torsion, l'isomorphisme entre ordres, et la relation d'ordre entre les ordres.

Soit L_o le type $\bigvee\alpha\ L(\alpha)$.

Proposition 3

$\equiv_o \otimes <_o$ est dans $OST^{L(L_o)}$

Démonstration

(1) est vérifié, à cause de Isom(c,c,Id) où Id est défini par

$Id(x,y) =_d x \equiv_c y$.

(2) est vérifié à cause de $Isom(c,c',f) \rightarrow Isom(c',c,f^{-1})$

(3) est vérifié à cause de $Isom(c,c',f) \wedge Isom(c',c'',g) \rightarrow Isom(c,c'',h)$ avec $h(x,y) =_d \exists z\ f(x,z) \wedge g(z,y)$. On notera encore $h=g \circ f$.

Le fait que h est un isomorphisme est évident à prouver.

(4) se vérifie comme (1)

(5) est vrai, car si Isom(c,S(c,x),f) et x dans D(c), alors $\neg$ OST(c), par la proposition 1.

(6) vient de $Isom(c,S(d,x),f) \wedge Isom(d,S(e,y),g) \rightarrow Isom(c,S(e,z),g \circ f)$ avec z tel que $g \circ f(x,z)$

(6') est obtenu sans difficulté

REMARQUE IMPORTANTE

La démonstration précédente utilise implicitement le fait suivant : si on doit se servir deux fois de suite d'un b dans UO, au séin d'une même démonstration (exemple : montrer que $\neg(b <_0 b)$) on peut utiliser les deux fois le même $I^\alpha c$, avec l'hypothèse $b = I^\alpha c$.(Dans le contexte précis de la démonstration que nous avons faite, bien entendu, car il n'y a aucun moyen autre que celui que nous donne la démonstration de contradiction de U d'inférer par exemple $I^\sigma c = I^\sigma c' \rightarrow c=c'$, et même ceci ne nous avance guère, car nous ne pouvons exprimer dans le langage de U un énoncé qui voudrait dire "si $I^\sigma c$ et $I^{\sigma'} c'$ sont égaux, alors σ et σ' sont égaux (nous n'avons pas d'égalité entre types), et c et c' sont égaux ".

Dans la démonstration qui précède, l'étape implicite de raisonnement que nous avons signalée correspond aux points (3) (les deux apparitions de y (5) (le x) (6) (le y) (6') (x et y) . La même étape sera utilisée dans la fin de la démonstration, c'est à dire la proposition 4.

Comme le raisonnement est chaque fois le même, examinons par exemple en détail la vérification de (5) :

Nous montrons d'abord le résultat suivant :

si $I^\sigma c = I^{\sigma'} c'$, alors Isom(c,c',f), pour un certain f :

Soit A(z) l'énoncé $ST\beta y(\exists f \mathrm{Isom}(c,y,f))\, z$ (les types de y et f ont été omis); alors $A(I^\sigma c)$ est démontrable, f étant dans ce cas l'identité; par définition de l'égalité, on en déduit $A(I^{\sigma'} c')$, et en réduisant, on obtient le résultat annoncé.

Si maintenant $b <_0 b$, on en déduit $I^\sigma c$, $I^{\sigma'} c'$, avec $I^\sigma c = I^{\sigma'} c'$, ce qui veut dire que c et c' sont isomorphes, ainsi qu'un isomorphisme de c sur un segment de c'; par composition des isomorphismes, on obtient un isomorphisme de c' sur un de ses segments, ce qui est absurde. Tous les autres cas sont similaires, c'est à dire qu'on choisit c,c' qui sont isomorphes et l'on compose ensuite les isomorphismes.

Pour vérifier que $<_o$ est sans torsion, nous avons besoin de la

Proposition 4

Soit a dans OST^{σ} ; f_a définie par

$f_a(x,y) =_d D(a,x) \wedge y =_o I^{\sigma}(S(a,x))$

est un isomorphisme de a sur S(UO,Ia) où UO dénote par abus de notation

$=_o \otimes <_o$.

Supposons avoir démontré la proposition 4.

Alors, si Isom(S(UO,Ia),S(UO,Ib),f) , il vient Isom(a,b,f_b^{-1}o f o f_a),

d'où Ia $=_o$ Ib .

Démonstration de la proposition 4

f_a et f_a^{-1} vérifient (7) de manière évidente, car S(a,x) et S(a,x')

sont isomorphes ssi x $=_a$ x' par (13).

f_a vérifie (8) par définition; de même (9) est évidemment vérifié par f_a.

(10) est vérifié, car, si x $<_a$ x', Id est un isomorphisme de

S(a,x) sur S(S(a,x'),x)=S(a,x).

D'autre part, $I^{\sigma}(S(a,x)) <_o$ Ia de manière évidente, et donc f_a est

un morphisme.

Pour voir que f_a^{-1} vérifie (13) remarquons que si g est un

isomorphisme de S(a,x) sur un segment S(a,y) de S(a,x'), alors

x $=_a$ y et comme y $<_a$x', x $<_a$ x'.

f_a^{-1} vérifie (8), car si S(a,x) et S(a,x') sont isomorphes, x$=_a$x'.

Enfin, f_a^{-1} vérifie (9), car si Iz $<_o$ Ia, il existe un isomorphisme

de z sur un S(a,x), et donc Iz est atteint par f_a.

C.Q.F.D.

5. Paradoxe

THEOREME 8

Le système U est contradictoire.

Soit $I \overset{L}{\circ} UO$. D'après la proposition 3, on a $UO(I \overset{L}{\circ} UO)$.
D'après la proposition 4, on a $Isom(UO, \mathfrak{S}(UO, I \overset{L}{\circ} UO, f_{UO}))$, en contradiction avec la proposition 1.

6. Commentaires

Ce paradoxe s'inspire évidemment des paradoxes classiques de Russell et Burali-Forti.

Il est très simple de montrer à l'aide de U que l'ancien système de Martin-Löf est incohérent. Depuis, Martin-Löf en a donné une version plus courte adaptée à son ancien système.

Il est possible que le système U^{-} construit comme U, mais sans quantifications sur les types soit cohérent.

Notons, pour les applications, que le fragment de U qui n'utilise que les quantifications universelles, $\rightarrow$, DT, EXT, λ, AP, et $\perp$ est incohérent. (à cause des traductions).

ANNEXE B : MODELES EXTENSIONNELS CONTENANT L'EGALITE

Soit M un modèle d'un des systèmes OF_1, OF_2.

Un objet E de M, de type $(\sigma,\sigma\rightarrow())$ est une fonction caractéristique de l'égalité si $E(a,b)=^*V \rightarrow a=^*b$. (FCE)

Un objet E de M, de type $\bigwedge\alpha\,(\alpha,\alpha\rightarrow())$ est une fonction caractéristique universelle de l'égalité (FCUE) ssi $E\tau$ est une FCE pour tout τ.

On dira qu'un modèle M extensionnel contient la FCE ssi pour tout τ, M contient la FCE de type τ.

THEOREME 9

Si M est un modèle extensionnel de OF_1 contenant la FCE, M peut être transformé par des méthodes élémentaires en un modèle de la théorie des ordres.

THEOREME 10

Il n'y a pas de modèle extensionnel de OF_2 contenant la FCUE.

Le théorème 10 est conséquence de la proposition :

Proposition

Si M est un modèle extensionnel de OF_2 contenant la FCUE, alors M peut être transformé élémentairement en un modèle de U.

Démonstration

(On montre d'abord la proposition, dont le théorème 10 est un corollaire, modulo le théorème 8, et l'examen de la démonstration de la proposition nous donne le théorème 9)

A chaque objet de U, on associe un objet de OF_2' de même type, où OF_2' désigne le système obtenu à partir de OF_2 en ajoutant la constante E de type $\bigwedge\alpha\,(\alpha,\alpha\rightarrow())$:

$(\perp)^*=F$; $(A\rightarrow B)^*=A^*\rightarrow B^*$; $(DT\alpha\, a)^*=DT\alpha\, a^*$; $(a\,\tau)^*=a^*\tau$; $(\lambda xa)^*=\lambda xa^*$; $x^*=x$; $(a(b))^*=a^*(b^*)$.

$(\forall xA)^*=E\tau\,(\lambda xA,\lambda xV)$ (τ est le type de λxA); $(\forall\alpha A)^*=E\tau\,(DT\alpha\,A,DT\alpha\,V)$ (τ est le type de $DT\alpha\,A$).

(Il suffit de donner une traduction de ce fragment de U).

On vérifie immédiatement que, si $a \,/\!= b$ (la réduction dans U), alors $a^* \,/\!= b^*$, de même pour les réductions $*$. (1)

Par induction sur les démonstrations de U, on montre que, si A est un théorème de U, et si C est une suite d'objets de M substitués pour les variables et ind. libres de A^*, $A^*[C] =^* V$:

Le seul cas non évident est celui des quantifications; traitons par exemple celui de $\forall xA$:

Si, par hypothèse $B^*[C] \rightarrow A^*[a,C] =^* V$ pour tous a et C, deux cas se présentent ; pour une suite C fixée :

1) $B^*[C] =^* F$ alors $B^*[C] \rightarrow E\tau(\lambda xA^*[x,C], \lambda xV) =^* V$

2) $B^*[C] =^* V$; alors $A^*[a,C] =^* V$ pour tout a; en particulier, par extensionalité, $\lambda xA^*[x,C] =^* \lambda xV$, et par définition de E,

$$B^*[C] \rightarrow E\tau(\lambda xA^*[x,C], \lambda xV) =^* V .$$

Réciproquement, $E\tau(\lambda xA^*[x,C], \lambda xV) \rightarrow A^*[t^*[C], C] =^* V$, car si $E\tau(\lambda xA^*[x,C], \lambda xV) =^* V$, $\lambda xA^*[x,C] =^* \lambda xV$, et donc $A^*[t^*[C],C] =^* V$.

On en déduit par le théorème 8 que $(\perp)^* = V$, contrairement à notre hypothèse.

Dans le cas de OF_1 (théorème 9), on prend la partie de la démonstration précédente qui s'adapte. Il faut de plus faire quelques aménagements pour le type o : on pose $(\bar{o})^* = *$, $(S)^* = S$ $(=)^* = E^o$.

Il faut alors montrer de plus que les axiomes de l'égalité et du successeur sont satisfaits; pour l'églité c'est évident. On a évidemment $Sa \neq^* \bar{o}$ dans M, à cause de F définie par $F\bar{o} = V$, $FSx = F$. Enfin, à l'aide de P défini par $P\bar{o} = \bar{o}$, $PSx = x$, on voit que si $Sa =^* Sb$, $PSa =^* PSb$, d'où $a =^* b$. C.Q.F.D.

---

(1) Un argument simple montre que dans un modèle extensionnel, non seulement on a $a \,/\!=^* b \rightarrow a =^* b$, mais aussi $a \,/\!= b \rightarrow a =^* b$.

QUATRIEME PARTIE

NOTIONS DE VALIDITE

SECTION 1 : VERITE DANS UN MODELE

Soit F un système fonctionnel contenant O, $\mathbb{M}$ un modèle de F. On rappelle qu'un énoncé (sans quantificateurs) est un terme de F de type ().

Si a est un énoncé de F, on dira que a est **vrai** dans $\mathbb{M}$ ssi pour toute suite C d'objets (opérateurs et fcl) de $\mathbb{M}$, tel que $a[C]$ soit clos, $a[C] =^* V$.

1. Propriétés de la vérité dans un modèle

M 1 Si a est vrai dans $\mathbb{M}$, et si b est obtenu à partir de a par susbstitutions, (translation), b est vrai dans $\mathbb{M}$.

M 2 Tout exemple de tautologie est vrai dans M.

M 3 Si a et $a \rightarrow b$ sont vrais dans $\mathbb{M}$, alors b est vrai dans $\mathbb{M}$.

M 4 Etant donnés a,t,u, il existe v tel que $a(t) \wedge a(u) \leftrightarrow a(v)$ soit vrai dans $\mathbb{M}$. (Avec $v=D(a(t),u,t)$)

M 5 Soit a(y) un énoncé ne dépendant pas de α et x, si $a(I^{\alpha}x)$ est vrai dans M, a(t) est vrai dans M.

M 6 Soit a(z) un énoncé ne dépendant pas de x et y; si $a(\mu^1 x)$ et $a(\mu^2 x)$ sont vrais dans M, alors a(t) est vrai dans M.

Toutes ces propriétés sont des conséquences évidentes de la définition d'un modèle.

2. Propriétés de M_o

Nous utiliserons la vérité dans M_o dans deux cas particuliers :

- pour l'interprétation de la thèse de Church, c'est à dire pour les OFA_n.
- pour l'interprétation de l'axiome de Spector, c'est à dire pour les OFB_n.

Dans ce dernier cas, il peut être plus simple, au lieu de se placer dans $(M_o,=_o)$, de se placer dans $(M_o,=_1)$, où $a=_1 b$ est défini par :

$a =_1 b$ (a et b de type σ) ssi pour tout T de type $(\sigma \rightarrow o)$ $T(a)=_o T(b)$.

$(M_o,=_1)$ est évidemment aussi un modèle.

Une reformulation précise du lemme 8 de la section 2 de la seconde partie est la suivante :

Si a et b sont de type $(o \to \sigma)$, et si, pour tout n, $a(\bar{n}) =_1 b(\bar{n})$, alors $a =_1 b$, c'est à dire que dans le cas de la Bar-récursion, $(M_o, =_1)$ est un modèle standard qui vérifie une certaine condition d'extensionalité.

La démonstration est laissée au lecteur. Dans l'interprétation de l'axiome de Spector, nous n'utilisons que des cas particuliers de ce résultat , et nous donnons une démonstration pour ces cas particuliers.

3. Validité intentionnelle faible

Soit a un énoncé de F. On dit que a est <u>valide</u> (pour la validité intentionnelle faible) si a est vrai dans tous les modèles de F.

Immédiatement, on voit que la VIF vérifie les analogues de M 1...M 6.

Nous allons maintenant caractériser VIF au moyen des réductions.

SECTION 2 : DEFINITION DES $\mathbb{L}$-REDUCTIONS

Pour caractériser VIF au moyen du calcul, nous avons besoin d'un certain nombre de définitions combinatoires. Dans ce qui suit on pourra supposer que le système ne contient pas GD, RED et B. Nous supposerons de plus que les types disjonctifs sont absents. Le cas des types disjonctifs (ces types sont presque sans intérêt pour l'interprétation fonctionnelle) sera rapidement évoqué plus loin.

1. lvar et mvar, lind et mind

Pour chaque ordre R, nous diviserons l'ensemble des ind. d'ordre R en deux classes infinies, les lind et les mind d'ordre R.

Nous exigeons qu'une lind ne soit jamais muette. Un opérateur sera <u>semi-clos</u> si toutes ses mind sont muettes, ou, d'une manière équivalente si toutes ses ind libres sont des lind.

Si σ est un type semi-clos, nous diviserons les variables de type en deux classes infinies, les lvar et mvar de type σ. Si σ n'est pas semi-clos, toutes les variables de type σ sont des mvar.

Une fcl sera <u>semi-close</u> ssi

(1) toutes ses mind sont muettes

(2) toutes ses mvar sont muettes

Dans la suite, nous considèrerons essentiellement des opérateurs et des fcl semi-clos. Remarquons que le type d'une fcl semi-close est semi-clos.

La distinction mind/lind, mvar/lvar, n' évidemment aucun sens profond; il s'agit essentiellement d'une distinction technique.

2. Les deux notions de normalité; termes clefs

Nous allons introduire de nouvelles lind et lvar dans ce qui suit; quoi qu'il en soit, la donnée des règles de réduction de la première partie ainsi que des règles pour V,F,D, détermine sans ambiguïté, quel que soit l'ensemble des indéterminées et des variables utilisées, un concept de normalité, que nous appelerons normalité ancien style. (NAS) Ainsi un terme est NAS ssi il ne contient aucun sous-terme de la forme mentionnée en première partie (sec 3 et 5) et de la forme D(V,a,b), D(F,a,b).

Toujours indépendemment de l'ensemble des lind et lvar considérées, nous pouvons formuler le concept de normalité nouveau style (NNS).

Un terme sera NNS ssi

1) il est NAS

2) Il n'admet pas de sous-terme semi-clos de type () distinct de V ou F.

3) Il n'admet pas de sous-terme semi-clos de type existentiel ne commençant pas par le symbole I.

En particulier les termes NNS semi-clos de type () sont exactement V et F. Par contre, $\lambda x^{()} x^{()}$ est NNS, car son sous-terme $x^{()}$ n'est pas semi-clos (c'est une mvar).

Toujours indépendemment de l'ensemble des variables et ind utilisées, nous pouvons formuler le concept de terme clef. Un terme clef est un terme a qui vérifie les propriétés :

1) a est NAS.

2) a n'est pas NNS.

3) Tous les sous-termes stricts de a sont NNS.

Un terme clef est donc semi-clos, et de type () ou de type existentiel. En effet, puisque a est NAS, mais pas NNS, il doit violer la clause 2) ou la clause 3) de NNS. Mais la clause 3) de"terme clef" assure que le sous-terme dont il est question en NNS2 ou NNS3 ne peut pas être strict; il s'agit donc de a, qui est donc semi-clos, de type existentiel ou (), ne commençant pas par I, et distinct de V et F...

Par exemple, une lvar de type () ou existentiel est un terme clef.

3. Notion de rang

Les termes/de rang o seront les termes/construits en utilisant des ensembles infinis d'ind (mind et lind) indexées supérieurement par leur ordre, et des ensembles infinis de variables (mvar et lvar) indexées supérieurement par leur type, comme en 3.

/et opérateurs /et opérateurs

NAS,NNS,"terme clef" sont donc définis sans ambiguïté pour le rang o.

Supposons avoir défini les termes et opérateurs de rang n. NAS,NNS, "termes clefs" sont automatiquement définis pour les objets de rang n.

Pour chaque terme clef de rang n, a, de type $V\alpha^R\sigma$, on introduit une nouvelle lind d'ordre R et de rang n+1, α_a^R , et une nouvelle lvar de type $\sigma[\alpha_a]$ et de rang n+1, Y_a , ainsi que des nouvelles mvar pour tous les nouveaux types qui se trouvent ainsi définis, ces mvar étant de rang n+1. Les opérateurs de rang n+1 et les termes de rang n+1, sont les objets construits à l'aide des ind et variables de rang ne dépassant pas n+1, et utilisant au moins une ind ou une variable de rang n+1.

Remarquons que le rang de a n'est jamais plus petit que celui de son type.

Exemple : soit x une lvar de rang o (sans indice inférieur), de type $V\alpha V\beta\sigma[\alpha,\beta]$; alors x est un terme clef; Y_x est alors une lvar de type $V\beta\sigma[\alpha_x,\beta]$ et de rang 1; comme Y_x est un terme clef de type existentiel Y_{Y_x} est une lvar de type $\sigma[\alpha_x,\alpha_{Y_x}]$ et de rang 2.

Nous appellerons les termes et opérateurs semi-clos de rang o termes et opérateurs élémentaires.

Nous dirons qu'un terme a (resp. un opérateur σ) dépend d'une lvar x ou d'une lind α , ssi x (ou α) est utilisée dans l'écriture formelle de a (resp. σ). Par exemple Y_x dépend de x.

4. Valuations. Nouvelles réductions

Un terme clef de type () sera qualifié de "bivalent".

Une valuation $\mathbb{L}$ est une application de l'ensemble des termes clefs bivalents dans $\{1,2\}$.

Nous poserons $V_1=V$, $V_2=F$.

Pour chaque valuation $\mathbb{L}$, nous définissons le concept de $\mathbb{L}$-réduction, ou réduction modulo $\mathbb{L}$.

Toutes les règles énoncées pour les réductions sont des règles de $\mathbb{L}$-réduction. ($\mathbb{L}$ est fixé) De plus, nous avons les règles

$(\mathbb{L}_1)$	$a \ /{=}_1\ I^{\alpha_a} Y_a$	(mod $\mathbb{L}$)	(a clef, de type ex.)
$(\mathbb{L}_2)$	$a \ /{=}_1\ V_{\mathbb{L}(a)}$	(mod $\mathbb{L}$)	(a clef, de type ())

Ainsi, si x est une lvar bivalente, nous aurons

$$x \ /{=}_1\ V \quad \text{si} \quad \mathbb{L}(x) = 1$$

$$x \ /{=}_1\ F \quad \text{si} \quad \mathbb{L}(x) = 2$$

La restriction de la notion de valuation aux seuls termes clefs assure immédiatement la propriété de Church-Rosser pour la $\mathbb{L}$-réduction.

5. Théorème de $\mathbb{L}$-forme-normale

THEOREME 1

Pour chaque valuation $\mathbb{L}$, tous les termes sont absolument normalisables (nouveau style). En particulier, tout terme admet une forme normale (nouveau style) pour la $\mathbb{L}$-réduction.

Démonstration

Nous modifions la définition de la simplicité comme suit : un terme est simple ssi aucun de ses dégénérés n'admet de $\mathbb{L}$-réduction stricte se terminant par une règle stricte autre que ($\mathbb{L}_1$) ou ($\mathbb{L}_2$). Remarquons que cette définition nous permet de mener à bien la démonstration du théorème de réductibilité pour tout ce qui ne concerne pas ($\mathbb{L}_1$) ou ($\mathbb{L}_2$). Bien entendu, les lvar et les lind, dont la signification dépend de la valuation $\mathbb{L}$, doivent être traitées comme des <u>constantes</u>.

Pour obtenir le théorème 1, nous ajouterons aux CR la condition :

(CR 8) Sous réserve de (CR 1), tout terme clef est dans A.

Il nous faut montrer la non-contradiction de (CR 8) avec les autres conditions, il suffit donc de prouver que Can vérifie CR 8, en d'autres termes le

<u>Lemme 1</u>

Un terme clef est AN

<u>Démonstration</u>

Par induction sur le type de a.

1) le type de a est (); alors le seul rédion strict de a est $V_{\mathbb{L}(a)}$, qui est normal.

2) le type de a est $\bigvee\alpha\sigma$; alors le seul rédion strict de a est $I^{\alpha_a} Y_a$, qui est AN, par hypothèse, vu que le type de Y_a contient moins de symboles (en ne comptant pas ceux utilisés en indice d'opérateurs) et que Y_a est soit clef, soit NNS.

Nous avons aussi la propriété

<u>Lemme 2</u>

x^{τ} (x est une lvar) est dans tout CR de type τ.

<u>Démonstration</u>

Car x est soit clef (CR 8), soit SN (CR 3).

Pour terminer, il nous suffit de montrer que

L'introduction de ($\mathbb{L}_1$) et ($\mathbb{L}_2$) ne contredit pas la stabilité par QR i et QR'i des (CR i).

Or (CR 1),(CR 2),(CR 5) ne seront évidemment pas contredits.

(CR 4) Par exemple type implicationnel : par hypothèse a est simple, tous ses rédions stricts a' vérifient (QR 5); tous les rédions stricts de a(b) sont soit de la forme a'(b'), soit de la forme c, auquel cas a(b) était clef, et donc a(b) est QR par CR 8.

(CR'4) n'utilise pas la notion de simplicité, et est donc inchangé.

(CR 8) est évident pour le type (), puisque la définition est alors Can . Pour un type existentiel, en utilisant (QR'9), il suffit de montrer que, si a est clef, a est normal (Lemme 1), et que pour tout $I^{\tau}b$ =/ a b est dans un certain CR (voir définition); mais, si $I^{\tau}b$ =/ a, soit $I^{\tau}b$ -/ a, ce qui signifie que a est de la forme STαxcd; comme a est clef, d est NNS, et comme d est semi-clos, il commence par I; alors a n'est pas NAS. Sinon, $I^{\tau}b$ =/ $I^{\alpha_a}Y_a$, soit $\tau=\alpha_a$, Y_a /= b , et donc b est donc bien dans un CR $[\underline{\alpha},\tau/\underline{A},B]\,\sigma$, avec B=Can$_{\alpha_a}$.

<u>REMARQUE</u> Comme il résulte de nos conventions, α_a étant une constante, $[\underline{\alpha}/\underline{A}]\,\alpha_a$ est toujours Can$_{\alpha_a}$.

<u>N.B.</u> Les objets (types et termes semi-clos) de rang supérieur doivent être entendus uniquement comme des <u>intermédiaires de calcul</u>. En particulier, quand on parle de modèle de F, il n'est pas nécessaire que ce type de construction ait une interprétation dans M (au sens strict, il ne sauraient en avoir, puisque ce ne sont pas des objets clos). Il est cependant aisé de montrer que, si on donne une interprétation aux lvar et lind élémentaires à l'aide d'objets de M, il existe (en général plusieurs) des prolongements de cette interprétation aux lvar et lind non élémentaires. Voir démonstration du théorème 2.

SECTION 3 : VALIDITE INTENTIONNELLE FAIBLE ET $\mathbb{L}$-REDUCTIONS

1. Prolongement d'une valuation

Soit $\mathbb{L}$ une valuation; pour chaque énoncé semi-clos, on définira $\mathbb{L}(a)$ comme étant 1 ou 2, suivant que a /= V ou a /= F (mod. $\mathbb{L}$). Cette définition est compatible avec la définition déjà donnée sur les énoncés clés.

2. Résultat principal

THEOREME 2

Soit a un énoncé élémentaire; alors a est VIF ssi pour toute valuation $\mathbb{L}$, $\mathbb{L}(a)=1$.

Démonstration

1) Supposons a VIF; soit $(M,=_{\mathbb{L}})$ le couple de l'ensemble des termes semi-clos de F, et de l'équivalence $a=_{\mathbb{L}}b$ ssi a et b ont même forme normale. Alors $(M,=_{\mathbb{L}})$ est un modèle de F, et par hypothèse $a =_{\mathbb{L}} V$, d'où $\mathbb{L}(a)=1$. (On obtient le fait que $a =_{\mathbb{L}} V$ en subsituant pour les variables et ind libres de a, x,y... les objets x,y... de M).

2) Soit a un énoncé élémentaire tel que $\mathbb{L}(a)=1$ pour tout $\mathbb{L}$.

Soit M un modèle de F, et C une suite d'objets de M correspondant aux variables et ind. libres de a. Soit $=_M$ l'égalité du modèle. Nous allons construire une valuation $\mathbb{L}^C$ telle que b /= c (mod. $\mathbb{L}^C$) $b^C =_M c^C$, où b^C et c^C sont des objets de M construits de telle façon que si d est élémentaire et dépend des mêmes variables que a, $d^C=d[C]$.

Pour celà, on posera en général, pour b clef $\mathbb{L}^C(b)= i$ ssi $b^C=_M V_i$, et l'application $b \to b^C$, étant définie comme une translation, qui, à tout terme semi-clos de F associe un terme de M de la façon suivante :

pour une variable ou ind élémentaire non dans C, on choisit un objet de M quelconque.

si b est clef de type existentiel, soit $I^\sigma c$ tels que $b^C =_M I^\sigma c$. On pose alors $(\alpha_b)^C = \sigma$, $(Y_b)^C = c$. La vérification de la propriété annoncée est évidente. En particulier, puisque a /= V (mod. $\mathbb{L}^C$), $a^C = a[C] =_M V$.

L'axiome du choix utilisé en apparence pour $b \to b^C$ peut être éliminé en remarquant qu'il suffit de définir cette opération sur un nombre fini d'éléments. [voir th. 3]

3. Applications

THEOREME 3

L'ensemble des a tels que a soit VIF est récursif.

Démonstration

Soit a un énoncé semi-clos; pour chaque valuation particulière $\mathbb{L}$, a se $\mathbb{L}$-réduit en V ou en F. Pour effectuer cette $\mathbb{L}$-réduction particulière, nous n'utilisons qu'un nombre fini de règles ($\mathbb{L}_2$), et donc un nombre fini de valeurs de $\mathbb{L}$. Une valuation n'est rien d'autre qu'une branche infinie d'un arbre binaire, dont les niveaux correspondent aux termes clefs. Ce qui précède montre que les branches finies sont suffisantes pour décider la valeur de a. Par Brouwer-König (théorème de l'eventail) il existe un certain niveau n tel que si on possède la valeur d'un $\mathbb{L}$ arbitraire sur les n premiers termes clefs, on sait calculer la $\mathbb{L}$-forme normale de a. Ceci nous donne évidemment une méthode de décision, d'où le théorème.

THEOREME 4 (Interpolation universelle)

Soit a un énoncé élémentaire, $\underline{X}$ une suite de lvar et lind élémentaires. On peut trouver b élémentaire ne dépendant pas de $\underline{X}$ et tel que VIF$\models a \to b$ et tel que pour tout c ne dépendant pas de $\underline{X}$, et tel que VIF$\models a \to c$, on ait VIF$\models b \to c$.

Démonstration

Considérons l'arbre fini qui sert à calculer a. Nous diviserons les niveaux en deux groupes : ceux qui correspondent aux termes clefs ne dépendant pas de $\underline{X}$, et les autres.

A toute valuation finie définie uniquement sur le premier groupe, associons 1 si la valeur de a sur toutes ses extensions au second groupe est 1, 2, sinon.

Si il existe un b élémentaire tel que b possède cette table de vérité, il est clair que b fait l'affaire.

Or, si t est un terme clef bivalent, comme on a évidemment $\mathbb{L}(t)=\mathbb{L}(t)$, il suffit de construire b ainsi : pour chaque valuation finie $\mathbb{L}$ définie sur le premier groupe, on associe le terme $t_{\mathbb{L}}=$ conjonction des t'_i pour t_i terme clef du premier groupe, $t'_i=t_i$ si $\mathbb{L}(t_i)=1$, $t'_i=t_i$ sinon. Alors $\mathbb{L}'(t_{\mathbb{L}})=1$ ssi $\mathbb{L}'$ prolonge $\mathbb{L}$. On définit alors b comme la disjonction des $t_{\mathbb{L}_i}$ pour les $\mathbb{L}_i$ définies sur le premier groupe, et telles que la valeur choisie pour b soit 1.

Il reste à remarquer que si b n'est pas élémentaire, on peut le remplacer par un terme élémentaire équivalent pour toutes les valuations : si b dépend de α_a et Y_a (a de rang maximum), soit b' obtenu en remplaçant α_a par α, Y_a par y, et soit $b''=ST\alpha\, yb'a$.

Le passage de b à b" diminue strictement le nombre d'objets de rang maximum, et le théorème est donc prouvé.

<u>COROLLAIRE 1</u>

Tout énoncé admet une forme normale conjonctive élémentaire.

<u>COROLLAIRE 2</u>

Pour chaque valuation finie $\mathbb{L}$, il existe $t_{\mathbb{L}}$ élémentaire tel que $\mathbb{L}'(t_{\mathbb{L}})=1$ ssi $\mathbb{L}\subset\mathbb{L}'$.

<u>4. Axiomatisation de VIF</u>

Si a et b sont deux énoncés élémentaires, on note $a =_{AS} b$ l'égalité des formes normales ancien style de a et b.

Considérons les axiomes et règles :

(VIF 1) $\dfrac{a =_{AS} b \qquad a}{b}$

(VIF 2) $\dfrac{a(V) \qquad a(F)}{a(b)}$

(VIF 3) V

(VIF 4) $\dfrac{a \qquad a \to b}{b}$

(VIF 5) $\dfrac{a(I^{\alpha} x)}{a(t)}$ (a ne dépend pas de α et x).

écrites uniquement pour des énoncés ç termes et opérateurs élémentaires.

Il va de soi que si l'énoncé a est dérivable à l'aide de ces règles, a est VIF.

Nous allons maintenant établir la réciproque .

A chaque lvar ou lind, on associe une lvar ou lind élémentaire, ainsi qu'une infinité de nouveaux axiomes :

x, α de rang o : $x'=x$, $\alpha'=\alpha$, pas de nouvel axiome. Si a est de rang o, a' est défini par a'=a.

α_a, Y_a, de rang n+1; on pose $(\alpha_a)'=\beta$, $(Y_a)'=y$, β et y étant de nouvelles variables associées injectivement à a. Les nouveaux axiomes sont tous les $p(a') \leftrightarrow p(I^{\beta} y)$, pour p élémentaire. Si b est de rang n+1, b' est défini ainsi : pour chaque variable et ind de rang n+1 α, x apparaissant dans b, on fait la substitution $\alpha \to \alpha'$, $x \to x'$. On obtient un c de rang au plus n, et on pose b'=c'. Soit A la conjonction des nouveaux axiomes introduits.

Pour chaque valuation $\mathbb{L}$, soit de plus $B_{\mathbb{L}}$ l'ensemble des axiomes p' pour $\mathbb{L}(p)=1$, $\neg p'$ pour $\mathbb{L}(p)=2$.

On montre par induction sur la longueur d'uhe $\mathbb{L}$-réduction de d semi-clos de type (), que $A, B_{\mathbb{L}} \vdash d'$ si $\mathbb{L}(d)=1$, $A, B_{\mathbb{L}} \vdash \neg d'$ sinon :

1) d est V ou F par VIF 3, on a $\vdash V$, et par VIF 1 $\vdash \neg F$.

2) d est clef si $\mathbb{L}(d)=1$, $B_{\mathbb{L}} \vdash d'$, sinon $B_{\mathbb{L}} \vdash \neg d'$, par définition de $B_{\mathbb{L}}$.

3) d se réduit en e par substitution pour un sous-terme u, d'un sous-terme v tel que $u \neq_1 v$ (ancien style); alors $d =_{AS} e$, d'où $d' =_{AS} e'$ et aussi $d' =_{AS} e'$; par VIF 1 et l'hypothèse d'induction vérifiée par e, on obtient le bon résultat.

4) d se réduit en e par substitution pour u clef de type (), de V ou F. Alors d' est p'(u'), e' est $p'(V_i)$. Par exemple, i=1; l'hypothèse d'induction sur u montre que $A, B_{\mathbb{L}} \vdash u'$, et $A, B_{\mathbb{L}} \vdash p'(V)$; mais $\vdash V \to p'(V)$ et $\vdash$ p'(F→p'(F) sont prouvables sous les mêmes axiomes, d'où, par VIF 2, $A, B_{\mathbb{L}} \vdash u' \to p'(u')$, et VIF 4 $A, B_{\mathbb{L}} \vdash p'(u')$. Même raisonnement si i=2.

5) d se réduit en e par substitution pour u de $I^{\alpha_u} Y_u$.
Alors d' est p'(u'), et e' est $p'(I^{\beta} y)$. Il y a justement un des axiomes de A qui exprime l'équivalence de ces énoncés. Il suffit de voir que, par VIF 1, 2, 3, et 4, on peut faire les raisonnements tautologiques habituels, ce qui est évident.

En conclusion, si a est élémentaire et VIF, pour chaque $\mathbb{L}$, on a

$$A , B_{\mathbb{L}} \vdash a$$

En fait, on n'utilise qu'un nombre fini de tels A et de $B_{\mathbb{L}}$, et remarquons, que, puisque nous n'avons pas utilisé (VIF 5), le théorème de dédution va être vérifié. On élimine alors les $B_{\mathbb{L}}$ de la façon standard coutumière, c'est à dire qu'on considère deux valuations finies $\mathbb{L}$ et $\mathbb{L}'$ qui ne diffèrent que sur b, et on a : $A, B_{\mathbb{L}''} \vdash b' \to a$ et $A, B_{\mathbb{L}''} \vdash \neg b' \to a$, où $\mathbb{L}''$ est la partie commune de $\mathbb{L}$ et $\mathbb{L}'$, d'où $A, B_{\mathbb{L}''} \vdash a$, etc....

Finalement, on obtient $A \vdash a$, et la démonstration n'a pas utilisé VIF 5, c'est à dire qu'on en déduit $\vdash A' \to a$, où A' est une conjonction finie d'éléments de A.

Soient, dans A', Y et β correspondant à un u de rang maximum. Nous avons dans A' un certain nombre d'axiomes de la forme $p'(a') \leftrightarrow p'(I^{\beta} y)$, et si on désigne leur conjonction par C, celle des A' restants par A", on a: $\vdash C[I^{\beta} y] \wedge A''[I^{\beta} y] \to a$; d'où $\vdash C[u'] \wedge A''[u'] \to a$. C[u'] est démontrable par les VIF i, et donc $\vdash A''[u'] \to a$; en remarquant que A"[u'] fait encore partie des axiomes A, on obtient un procédé pour éliminer A.

En résumé on peut énoncer le

THEOREME 5

Un énoncé élémentaire a est VIF ssi il est prouvable à partir des axiomes et règles (VIF i).

SECTION 4. CAS DES TYPES DISJONCTIFS

L'adjonction des types disjonctifs nécessite les adaptations suivantes des définitions :

NNS : on exige de plus que tous les sous-termes semi-clos de type disjonctif commencent par ι^1 ou ι^2.

Nouvelles variables : pour a de type disjonctif clef de rang n, on introduit deux nouvelles lvar de rang n+1, Y_a^1 et Y_a^2, de type respectif σ et τ, si a est de type $\sigma + \tau$.

Termes clefs bivalents : termes clefs de type () ou disjonctif.

Une valuation $\mathbb{L}$ associe donc une valeur 1 ou 2 à tout terme clef de type () ou disjonctif. On énonce

$$(\mathbb{L}_3) \qquad a \;/\!=_1\; {}^{\mathbb{L}(a)} Y_a^{\mathbb{L}(a)} \qquad \text{(a clef de type disjonctif)}$$

Axiomatisation :

On adjoint la règle

$$\text{(VIF 6)} \qquad \frac{a(\iota^1 x) \qquad a(\iota^2 y)}{a(t)} \quad \text{(x et y non libres dans a).}$$

Toutes les propriétés des sections 2 et 3 s'étendent canoniquement dans ce cas.

Techniquement, elles peuvent présenter une plus grande difficulté dans leur vérification, car il existe des termes (non élémentaires) qui ne sont pas $\mathbb{L}$-rédions de termes élémentaires, et ce, pour tout $\mathbb{L}$, par exemple tout terme dépendant à la fois d'un Y_a^1 et d'un Y_a^2.

Nous ne faisons aucune démonstration dans le cas de ces types, à cause du rôle de second plan qu'ils jouent dans l'interprétation fonctionnelle.

SECTION 5 : VALIDITE INTENTIONNELLE

<u>Dans ce qui suit, nous supposons que le système F contient la récursion. Tous les opérateurs, termes, sont supposés élémentaires.</u>

1. Définition de VI

On dit que B est valide intentionnellement ssi on peut trouver un énoncé A et un terme t de type o tels que

$$\mathrm{VIF} \models A\,[t,\bar{o}\,] \rightarrow B \qquad (1)$$

$$\mathrm{VIF} \models A\,[\bar{o},z] \qquad (2)$$

$$\mathrm{VIF} \models A\,[x,Sz] \rightarrow A\,[Sx,z] \qquad (3)$$

x et z étant deux nouvelles lvar de type o.

Par la stabilité de VIF par substitution, on peut toujours supposer que t ne dépend pas de variables et d'ind non dans B, et que λxzA a la même propriété.

2. Propriétés de VI

VI satisfait les propriétés suivantes :

<u>Q 1</u> si a est VIF, a est VI.

(On prend A=V, $t=\bar{o}$)

En particulier, VIF vérifie M2, M4, M5.

<u>Q 2</u> VI est stable par Modus Ponens

Supposons que A,t,B d'une part, A',t',B C d'autre part satisfassent (1) (2) et (3). Alors $A''[x,z] = A[x,z] \wedge A'[x,z]$, $t''=D(A[t,\bar{o}],t',t)$, et $B \wedge B \rightarrow C$ vérifient (1),(2) et (3). Il en résulte que A",t",C satisfont (1),(2) et (3).

<u>Q 3</u> VI est stable par translation.

En effet, si A,t,B satisfont (1),(2) et (3), A*,t*,B* les satisfont, à cause de M1.

<u>Q 4</u> Si $B[y']$ ne dépend pas de β et y, et si $B[I^{\beta}y]$ est VI, $B[c]$ est VI.

<u>Démonstration</u>

Soient $A[\beta,y]$ $t[\beta,y]$, $B[I^{\beta}y]$ qui vérifient (1),(2),(3).

Soient $A' = ST\beta yAc$, $t' = ST\beta ytc$, $c' = ST\beta yI^{\beta}y\ c$.

Alors $A',t',B\ c'$ vérifient (1),(2) et (3) par M5.

Mais $B[c] \leftrightarrow B[c']$ est VIF, car si $c \neq I^{\tau}d$ (mod $\mathbb{L}$), $c' \neq I^{\tau}d$.

<u>Q 5</u> Si $B[y]$ ne dépend pas de y' et y'', et si $B[\iota^1 y']$ et $B[\iota^2 y'']$ sont VI, $B[c]$ est VI.

Q5 se démontre comme Q4.

<u>Q 6</u> VI est stable par induction, c'est à dire que si

$VI \models B[\bar{o},y]$, $VI \models B[x,fxy] \to B[Sx,y]$

alors $VI \models B[x,y]$. (y de type quelconque, f est une fcl)

<u>Démonstration</u>

1) D'abord, nous réduisons Q 6 au cas y est de type o, fxy=Sy.

Soit q(x,z,y) défini par récursion par :

$q(x,\bar{o},y) = y$; $q(x,Sz,y) = f(x,q(Sx,z,y))$

Alors $VI \models B[\bar{o},q(\bar{o},z,y)]$

$VI \models B[x,f(x,q(Sx,z,y))] \to B[Sx,q(Sx,z,y)]$

d'où si $B'[x,z]$ est $B[x,q(x,z,y)]$.

$$VI \models B'[\bar{o},z] \qquad (4)$$

$$VI \models B'[x,Sz] \to B'[Sx,z] \qquad (5)$$

et, si nous avons la stabilité de VI pour B' sous la forme

$$VI \models B'[x,\bar{o}] \qquad (6)$$

nous en déduisons $VI \models B[x,q(x,\bar{o},y)]$ soit $VI \models B[x,y]$.

2) Supposons donc que B vérifie (4) et (5). Il nous faut montrer que B vérifie (6).

Soit $C[x,z]$ la conjonction de (4) et (5) c'est à dire

$$C[x,z] = B[\bar{c},z] \wedge (B[x,Sz] \to B[Sx,z])$$

et v et w définis par récursion comme

$v\bar{o}z = \bar{o}$; $vSxz = D(C[x,z], vxSz, x)$

$w\bar{o}z = z$; $wSxz = D(C[x,z], wxSz, z)$

Alors $C[vx\bar{o}, wx\bar{o}] \to B[x,\bar{o}]$ est VI, car (7)

$C[v\bar{o}z, w\bar{o}z] \to B[\bar{o},z]$ est VIF et

$(C[vxSz,wxSz] \to B[x,Sz]) \to (C[vSxz,wSxz] \to B[Sx,z])$ est aussi VIF, car

2.1) Si $C[x,z]$ est vrai $C[vxSz,wxSz]$ est rédion de $C[vSxz,wSxz]$; si nous notons par E ce dernier énoncé, nous avons à vérifier

$(E \to B[x,Sz]) \to (E \to B[Sx,z])$, soit

$E \to (B[x,Sz] \to B[Sx,z])$, mais le côté droit de cette implication est vrai si $C[x,z]$ l'est.

2.2) Si $C[x,z]$ est faux, $C[vSxz,wSxz]$ se réduit en $C[x,z]$ qui est faux; l'implication est encore vraie.

Comme $C[x,z]$ est VI par Q 2, et Q 1, $C[vx\bar{o},wx\bar{o}]$ est VI par Q 3, et donc par (7) et Q 2, $B[x,\bar{o}]$ est VI. Ceci termine la preuve.

<u>Q 7</u> VI est non contradictoire

<u>Démonstration</u>

Supposons VIF $\models$ $A[t,\bar{o}]$ (8)

VIF $\models$ $A[\bar{o},z]$ (9)

VIF $\models$ $A[x,Sz] \to A[Sx,z]$ (10)

On peut supposer $A[t,\bar{o}]$ clos, et donc que $t=\bar{n}$.

Mais pour tous p et q, $A[\bar{p},\bar{q}]$ se réduit en V, par induction sur p.

(Base: 9 et 11 ; induction : 10 et 11).

THEOREME 6

Si $T(x_1,\ldots,x_p)$ est un prédicat primitif récursif tel que $VI \models T$ (dans le système OF_n), alors $HA_n \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_p T(x_1,\ldots,x_p)$.

Démonstration

En effet soient A,t,T, vérifiant (1),(2),(3). Soit $HA_n^{(i)}$ un scus-système fini dans le quel on peut prouver

(+) La réductibilité de A et t

(++) Que la formule T de HA_n représente bien la fcl T

Alors, pour chaque suite $n_1,\ldots,n_p$, $T\bar{n}_1\ldots\bar{n}_p$ se réduit en vrai, et comme la démonstration utilise, outre (+), une induction élémentaire, en utilsant (++), on voit que $T\bar{n}_1\ldots\bar{n}_p$ est prouvable dans $HA_n^{(i)}$ pour toute suite $(n_1,\ldots,n_p)$, on peut, puisque ce schéma de démonstration est récursif primitif, et donc représentable dans HA_n, appliquer le schéma de réflexion.

3. Propriétés négatives de VI

Q 8 VI est récursivement énumérable non récursif

Il est assez facile de montrer ceci directement, mais Q8 résulte simplement du fait que la réciproque du théorème 6 est vraie, ce que nous verrons plus loin.

Q 9 VI ne vérifie pas l'interpolation forte.

Démonstration

Soit T(x,y) un prédicat récursif primitif tel que $\{n/T(x,\bar{n})$ est VI$\}$ ne soit pas récursif. Soit U(y) un interpolant à gauche universel pour T par rapport à x.

Soit n tel que $VI \models T(x,\bar{n})$; alors, $VI \vdash E(y,\bar{n}) \rightarrow T(x,y)$, où E est le prédicat d'égalité défini par récursion par

$E(\bar{o},Sz)=F$; $E(Sx,\bar{o})=F$; $E(\bar{o},\bar{o})=V$; $E(Sx,Sz)=E(x,z)$.(En effet, celà peut soit être vérifé directement, soit être considéré comme conséquence du théorème d'interprétation fonctionnelle (Partie 5), qui assure alors que VI satisfait les énoncés :

$E\ (x,x)$

$E\ (x,y) \wedge P(x) \rightarrow P(y)$)

Alors $VI \models E(y,\bar{n}) \rightarrow U(y)$, d'où $VI \models U(\bar{n})$, soit $U(\bar{n})$-/= V

Si $T(x,\bar{n})$ n'est pas VI, comme $VI \models U(y) \rightarrow T(x,y)$, et donc $VI \models U(\bar{n}) \rightarrow T(x,\bar{n})$, $U(\bar{n})$ ne peut pas se réduire en V, d'où $U(\bar{n})$ /= F .

Mais alors $\{n/\ VI \models T(x,\bar{n})\} = \{n/U(\bar{n})$ /= V$\}$ et est donc récursif, ce qui est une contradiction.

4. Axiomatisation de VI

VI peut être axiomatisé à l'aide : des axiomes et règles de VIF, et de Q6 : en effet, tout énoncé VI peut être obtenu dans cette axiomatique; réciproquement, les axiomes et règles susmentionnés sont vérifiés par VI (Q 1,Q 2,Q 4,Q 5,Q 6).

SECTION 6 : NOTIONS DE VALIDITE

On appelle <u>notion de validité</u> tout ensemble K d'énoncés élémentaires satifaisant les conditions :

1) Si a est VIF, $a \in K$.

2) Si a et $a \to b \in K$, alors $b \in K$.

3) Si $a \in K$ et si a' est obtenu à partir de a par translation, $a' \in K$.

Si K est une notion de validité, on notera $K \models a$ pour $a \in K$.

EXEMPLES

VIF, VI sont des notions de validité. Si M est un modèle, la vérité dans M est une notion de validité.

<u>Principales notions de validité utilisées par la suite</u> (partie V)

1) Systèmes contenant GD et RED ou B : vérité dans $(M_o, =_o)$.

2) Systèmes sans récursion : VIF

3) Systèmes OF_n, OF_n^+ : VI

Dans les applications il est bon de remarquer que M_o satisfait non seulement les règles de VIF, mais aussi celles de VI.(Voir partie VI, sec 2).

ANNEXE : ELIMINATION DES ZEROS

Le résultat que nous allons établir nous permettra, du moins dans certains cas particuliers importants de passer de la solution d'un problème utilisant la fcl 0, a une solution ne l'utilisant pas.

1. Equations

Une équation est un énoncé élémentaire $A[x,y,\underline{Z}]$. Une solution de cette équation est la donnée d'un terme a, ne dépendant pas de la variable y, mais pouvant dépendre d'autres lvar et lind, tel que

$$\mathrm{VIF} \models A[a,y,\underline{Z}]$$

$\underline{Z}$ désigne une suite finie de lvar et lind, telle que $x,y,\underline{Z}$ soit la suite des lvar et lind libres de A.

Dans quelle mesure peut on supposer que l'existence d'une solution implique l'existence d'une solution ne dépendant que de $\underline{Z}$?

Nous supposons pour la suite l'existence d'un opérateur clos de chaque ordre. Par une substitution appropriée, nous obtenons immédiatement l'existence d'une solution ne dépendant que des lind de A.

Si nous disposons de plus d'un terme sans variable de chaque type, par exemple au moyen du zéro, un certain nombre de substitutions nous permet d'obtenir une solution sous la forme annoncée.

Aussi, dans la suite, nous supposerons nous placer dans un système fonctionnel ne contenant pas le zéro.

2. Transformation !

Bien que la méthode exposée ci-après soit parfaitement générale, il est plus simple de se placer dans un système n'admettant pas d'opérateurs dont l'ordre contient 0 ou 1.

Pour chaque ordre, nous définissons un opérateur Q :

$Q(\alpha) = \alpha$ si l'ordre de α est ().

$Q(\alpha) = \bigwedge \beta_1^{R_1} \ldots \bigwedge \beta_n^{R_n} \; (Q(\beta_1) \to \ldots \to (Q(\beta_n) \to Q(\alpha\beta_1 \ldots \beta_n)) \ldots)$

A chaque opérateur σ, nous allons associer un opérateur $\sigma!$ de même ordre; nous supposerons que $\perp$ ne figure pas parmi les types primitifs. $\alpha ! = \alpha$;

$o! = o$; $(\sigma \to \tau)! = (\sigma! \to \tau!)$; $(\sigma \times \tau)! = (\sigma! \times \tau!)$; $(\sigma \vee \tau)! = (\sigma! + \tau!)$

$(\lambda\beta_1 \ldots \beta_n \sigma)! = (\lambda\beta_1 \ldots \beta_n \; \sigma!)$; $(\sigma\tau_1 \ldots \tau_n)! = \sigma! \; \tau_1! \ldots \tau_n!$

$(\bigvee\alpha \tau)! = (\bigvee\alpha \; \tau!)$

$(\bigwedge\alpha \tau)! = \bigwedge\alpha \; (Q(\alpha) \to \tau!)$

Ainsi, si un opérateur est construit sans utiliser $\bigwedge$, il est inchangé par ! .

Lemme 1

A chaque opérateur σ, on sait associer un terme $q(\sigma)$ de type $Q(\sigma!)$, dont les seules variables libres sont de type $Q(\alpha)$ pour tous les α libres dans σ.

Démonstration :

$q(o) = \bar{o}$; $q(\sigma \to \tau) = \lambda x^{\sigma!} q(\tau)$ (x est une variable qui n'apparaît pas dans $q(\tau)$) ; $q(\sigma \times \tau) = q(\sigma) \otimes q(\tau)$; $q(\sigma + \tau) = \amalg^1 q(\sigma)$; $q(\alpha) = x^{Q(\alpha)}$.

$q(\lambda\beta_1 \ldots \beta_n \sigma) = DT\beta_1 \ldots DT\beta_n (\lambda x^{Q(\beta_1)} \ldots \lambda x^{Q(\beta_n)} q(\sigma))$;

$q(\sigma\tau_1 \ldots \tau_n) = q(\sigma)\{Q(\tau_1)\} \ldots \{Q(\tau_n)\} \; (q(\tau_1)) \ldots (q(\tau_n))$

$q(\bigvee\alpha \tau) = I^{\underline{o}} q(\tau[\underline{o}])$, où $\underline{o}$ désigne l'opérateur clos obtenu de mantiére canonique pour chaque ordre, à l'aide de o et λ.

$q(\bigwedge\alpha \tau) = DT\alpha \, \lambda x^{Q(\alpha)} \; q(\tau)$.

Lemme 2

A chaque fcl a de type σ, on sait associer une fcl a! de type $\sigma!$, dépendant uniquement des ind de a, et dont les variables libres sont

- les $x^{\tau!}$ où x^{τ} est libre dans a.
- les $y^{Q(\alpha)}$ pour α libre dans a.

Démonstration

Nous poserons :

$(\mathrm{REC}^{\tau})! = \mathrm{REC}^{\tau!}$; $(B^{\sigma\tau})! = B^{\sigma!\tau!}$; $\bar{o}! = \bar{o}$; $S! = S$; $GD! = GD$;

$RED! = RED$.

$(x^{\tau})! = x^{\tau!}$ (nous supposons bien entendu que si x est une mvar, $x^{\tau!}$ est encore une mvar, et réciproquement; de même pour les ind.)

$(a(b))! = a!(b!)$; $(\lambda xa)! = \lambda x!a!$;

$(a \otimes b)! = a! \otimes b!$; $(\pi^{i}a)! = \pi^{i}a!$;

$(\amalg^{i}a)! = \amalg^{i}a!$; $(\oplus xyabc)! = \oplus x!y!a!b!c!$;

$(I^{\sigma}a)! = I^{\sigma!}a!$; $(ST\alpha xa)! = ST\alpha\, x!a!$;

$(DT\alpha\, a)! = DT\alpha\lambda x^{Q(\alpha)}a!$; $(a\{\tau\})! = a\{\tau!\}\ (q(\tau))$

Lemme 3

Dans un système fonctionnel sans GD ni RED, $a \mathrel{/=} b$ (AS) implique $a! \mathrel{/=} b!$.

Démonstration évidente

Si $\mathbb{L}$ est une valuation, $\mathbb{L}!$ sera la valuation définie par $\mathbb{L}!(a) = \mathbb{L}(a!)$, pour tout a clef bivalent; bien entendu, il nous faut alors prolonger ! aux rangs supérieurs, ce qui est fait, en posant $(\alpha_a)! = \tau$, $(Y_a)! = b$ si $a! \mathrel{/=}_{\mathbb{L}} I^{\tau}b$, et $(Y^{i}_{a})! = b$ si $a! \mathrel{/=}_{\mathbb{L}} \amalg^{i}b$, et $(Y^{j}_{a})! = q(\tau)$ pour $j \neq i$, et τ est le type de Y^{j}_{a}.

Lemme 4

Si $a \mathrel{/=}_{\mathbb{L}!} b$, alors $a! \mathrel{/=}_{\mathbb{L}} b!$, dans un système sans GD ni RED.

3. Elimination des zéros (le système ne contient pas GD et RED)

THEOREME 7

Si $A[x,y,\underline{Z}]$ est un énoncé de F_1, et si $A[x,y,\underline{Z}]$ admet une solution a, il admet aussi une solution a' ne dépendant que de $\underline{Z}$.

Démonstration

En effet, $A\$ = A$ puisque A est dans F_1.

Si $VIF \models A[a, y, \underline{Z}]$, alors $VIF \models A[a!, y, \underline{Z}]$. Soit $\underline{X}$ la suite des lvar de a distinctes de $\underline{Z}$; $\underline{X}!$ est alors la suite des lvar de a! distinctes de $\underline{Z}! = \underline{Z}$; soit $a' = [\underline{X}! / q(\underline{\tau})]\, a!$, où $\underline{\tau}$ est la suite des types de $\underline{X}$.

Le nom d'élimination des zéros donné aux résultats de l'annexe correspond au fait, que, pour l'interprétation fonctionnelle, où nous demandons que certaines équations soient résolues en ne dépendant pas de variables non utilisées dans l'énoncé de l'équation, le zéro est nécessaire pour que cette exigence soit toujours satisfaite. Cependant, pour les systèmes contenant la stratification universelle (et ce sont les seuls qui nécessitent un zéro primitif), on pourra toujours ajouter une lvar x de type $\Lambda\alpha\alpha$, en admettant que la solution dépende aussi de x. Si maintenant, nous avons une solution dépendant de x pour un problème récursif primitif (formulé dans VI ou dans VIF), le théorème 7 nous permet d'éliminer x de la solution, et donc, par exemple les caractérisations des fonctions récursives prouvables de la cinquième partie sont encore vraies pour les systèmes sans 0; de même, dans la section 3 de la sixième partie, on pourra supposer B et t construits sans l'aide du zéro.

ANNEXE B : MODELES DES SYSTEMES FONCTIONNELS ET THEORIE DES MODELES

Nous allons montrer rapidement en quel sens la notion de modèle que nous avons utilisée n'est autre que la notion bien connue de la théorie des modèles.

1. Réduction **

En II.4., nous donnions la définition de la réduction * dans un système fonctionnel auquel on avait adjoint de nouvelles constantes. Revenons un instant sur cette définition : si nous avions décrit cette réduction en nous contentant de dire que nous avons adjoint de nouvelles constantes, sans règles spécifiques pour ces constantes, il aurait pu se produire la situation suivante : soit par exemple a une nouvelle constante de type . Alors GD(a) est un terme clos, mais nous ne disposons pas de règle de réduction pour a (car a n'a pas été numéroté); alors que, si nous disons qu'il faut remplacer a par une nouvelle variable x, il résulte des définitions de II.4. que GD(a) est normal, et, a fortiori, normal *.

De même, dans le cas de B, si Brstuvw est un terme clos, w étant une nouvelle constante, les définitions de II.4. nous disent que ce terme doit être considéré comme normal (et donc normal*), alors que si nous n'avions pas pris la précaution de passer par l'intermédiaire des termes avec variables libres, il faudrait considérer ce terme comme non normal.

Définition Soient a et b deux termes (non nécessairement clos) d'un système F. On dit que a se réduit** en b (a /=**b) ssi a' /=* b', où a' et b' sont obtenus à partir de a et b par substitution de nouvelles constantes pour les variables et ind libres de a et b, la réduction * ayant été définie comme en II.4. .

2. Axiomatique associée à un système fonctionnel

Soit F un système fonctionnel parmi ceux que nous avons étudiés. Nous allons décrire (succintement) un langage L(F) à plusieurs catégories d'objets.

1) (En général) une infinité de catégories distinctes, correspondant à chaque ordre R. En particulier, le langage contient une catégorie spéciale pour les types. (<u>Type</u>)

2) Une catégorie pour les fonctionnelles. (<u>Fonc</u>)

Chaque catégorie d'objets est munie d'une relation binaire d'égalité. On a de plus un symbole fonctionnel unaire Type, tel que si a est un objet du genre fonctionnelle, Type(a) est objet du genre type.

Tous les objets de F (opérateurs et fcl) non nécessairement clos, sont supposés être des termes de F, dans la catégorie d'objets appropriée.

<u>Axiomes</u>

1) Axiomes standard pour l'égalité : on écrit suffisemment d'axiomes pour s'assurer que la substitution dans un objet (resp. un énoncé) de b pour un a tel que a=b, donne un objet égal (un énoncé équivalent), et que a=a, ceci pour chaque catégorie d'objets. En particulier, on aura les axiomes

$$\forall \sigma,\tau \in \underline{\mathrm{Type}} \quad \forall abT \quad (\mathrm{Type}(a)=\mathrm{Type}(b)=\sigma \wedge \mathrm{Type}(T)=\sigma\to\tau \wedge a=b \longrightarrow T(a)=T(b) \quad)$$

et de même, le schéma, pour chaque σ et chaque ordre R

$$\forall ab\, \beta^R \quad (\mathrm{Type}(a)=\mathrm{Type}(b)=\Lambda\alpha^R\sigma \wedge a=b \rightarrow a\{\beta^R\}= b\{\beta^R\} \ )$$

2) Axiome d'unicité du type (cas particulier de 1))

$$\forall ab \in \underline{\mathrm{Fonc}} \quad a=b \longrightarrow \mathrm{Type}(a)=\mathrm{Type}(b) \ ;$$

3) Axiomes associés aux règles de réduction :

Pour l'égalité entre opérateurs (règles OR_i) on écrit un certain nombre d'axiomes, dont certains sont dans 1), les axiomes importants étant :

$$\lambda \underline{\alpha}\sigma(\underline{\beta}) = \sigma[\beta] \quad \text{et} \quad (\forall \underline{\alpha} \ \sigma[\underline{\alpha}]=\tau[\underline{\alpha}] \ ) \rightarrow \lambda\underline{\alpha}\sigma[\underline{\alpha}] = \lambda\underline{\alpha}\,\tau[\underline{\alpha}] \quad .$$

On écrit d'autre part les axiomes correspondant à la réduction ** : ainsi, pour le λ , $\lambda xa(y)=a[y]$ et $y=y' \longrightarrow \lambda xy=\lambda xy'$ et pour DT , $DT\alpha\, a\{\beta\} =a[\beta]$ et $x=x' \longrightarrow DT\alpha\, x=DT\alpha x'$ (avec de plus les conditions sur les types, etc...)

De même, on écrirait $REC(x,y,\bar{o})=x$ et $REC(x,y,Sz)=y(REC(x,y,z),z)$.
Par contre, pour B, GD et RED, il faudra écrire une infinité d'axiomes, par exemple tous les $GD(a)=\bar{p}$ pour a <u>clos</u> de F, p étant le numéro de Gödel associé à a , etc...

4) Axiomes correspondant à VIF

On peut écrire les axiomes et règles suivants

$\forall x \quad Type(x)=() \rightarrow x=V \vee x=F$

$V \neq F$

$\forall x\sigma\tau \quad Type(x)=\sigma+\tau \rightarrow \exists y(Type\ (y)=\sigma \wedge x=\perp^1 y) \vee (Type(x)= \tau\ y \quad x=\perp^2 y)$

$\forall x \quad Type(x)=\forall\alpha^R\sigma \rightarrow \exists\beta^R\ \exists y \quad Type(y)=\sigma[\beta^R] \wedge x=I^\beta y$.

5) Axiomes purement logiques :

ceux du calcul à plusieurs sortes de variables, les règles d'élimination du $\forall$ et d'introduction du $\exists$ étant restreintes aux termes que nous avons considérés ici, c'est à dire les opérateurs et les fcl de F.

<u>3. Modèles</u>

Il est complètement évident que tout modèle de F (au sens de II.4.) est un modèle de la théorie associée, pourvu que l'on fasse la modification évidente qui consiste à prendre le quotient de M par =*.

Réciproquement, soit un modèle de la théorie associée à F. Nous en déduisons un modèle de F, au sens de II.4. après les quelques manipulations simples qui suivent :

- nouvelles constantes d'opérateurs : tous les opérateurs de M.
- nouvelles constantes de fcl : les couples (a,τ) où a est une fcl de M, τ est un type formel, bâti à l'aide des nouvelles constantes d'opérateurs (τ a donc une interprétation dans M, soit σ) et le type de a dans M est σ.
- =* entre deux expressions obtenues à l'aide des nouvelles constantes, et de même type, sera définie comme l'identité de leurs interprétations dans M.

Les deux transformations décrites ne sont pas réciproques l'une de l'autre. Cependant, si un énoncé a (défini par un terme de F de type ()) est vrai dans (M,=*), l'énoncé de la théorie associée ($\forall \underline{\alpha} \forall \underline{x}$ a=V), où $\underline{\alpha}$ et $\underline{x}$ sont les variables de a, est vrai dans le modèle de la théorie qu'on en déduit, et réciproquement. En particulier

THEOREME 8

a est VIF ssi ($\forall \underline{\alpha} \forall \underline{x}$ a=V) est un théorème de la théorie associée à F.

CINQUIEME PARTIE :

L'INTERPRETATION DE GÖDEL

SECTION 1 : L'INTERPRETATION DE GÖDEL ET SES VARIANTES

L'interprétation de Gödel associe à tout énoncé A de l'arithmétique, de l'analyse, de la théorie des ordres,..., une expression A* de la forme $\exists x^{\sigma} \forall y^{\tau}$ A' $[x,y,\underline{Z}]$, où A' est un énoncé élémentaire d'un système fonctionnel à préciser.

Une expression $\exists x \forall y$ A' $[x,y,\underline{Z}]$ est <u>valide</u> si, dans le système fonctionnel de référence, pour la notion ~~récursivement énumérable~~ de validité associée à ce système, (voir IV sec 6) ~~[illegible]~~, on peut trouver un terme élémentaire a, ne dépendant que de la suite $\underline{Z}$ des variables et indéterminées de A' autres que x et y, tel que

$$\vdash A' [a,y,\underline{Z}]$$

Par extension, nous considèrerons encore comme forme possible d'une interprétation fonctionnelle des expressions $\exists \underline{x} \; \forall \underline{y}$ A' $\underline{x},\underline{y},\underline{Z}$, où $\underline{x}$ et $\underline{y}$ sont des suites (peut être vides) de variables. Une telle expression est <u>valide</u> si on peut trouver une suite $\underline{a}$ de fcl élémentaires, ne dépendant que de $\underline{Z}$, et telle que

$$\vdash A' [\underline{a},\underline{y},\underline{Z}]$$

Si on dispose du produit de types (et nous supposerons que c'est le cas),on peut toujours ramener des expressions de la deuxième forme à des expressions de la première. Une suite vide de quantifications peut être remplacée par une quantification sur une variable qui n'apparaît pas dans A'. De même, l'expression $\exists x_1 \exists x_2 \exists \underline{x} \; \forall \underline{y}$ A' $[x_1,x_2,\underline{x},\underline{y},\underline{Z}]$ peut être remplacée par $\exists x' \exists \underline{x} \; \forall \underline{y}$ A' $[\pi^1 x' ; \pi^2 x' ; \underline{x},\underline{y},\underline{Z}]$. Si A'$[a_1,a_2,\underline{a},\underline{y},\underline{Z}]$ est valide, A'$[\pi^1 a' ; \pi^2 a', \underline{a},\underline{y},\underline{Z}]$ est valide par la substitution $a'_1 = a_1 \otimes a_2$ x' . La réciproque est obtenue au moyen de la substitution $a_i = \pi^i a'$.

Similairement, $A'\left[\underline{a},y_1,y_2,\underline{Y},\underline{Z}\right]$ et $A'\left[\underline{a},\pi^1 y',\pi^2 y',\underline{Z}\right]$ sont valides simultanément.

1. Les clauses inductives touchant à l'arithmétique, et aux connecteurs propositionnels et quantifications d'ordre O.

Dans la définition inductive de l'interprétation fonctionnelle, nous partirons d'interprétations déjà construites sous la première forme, pour aboutir à des expressions sous la deuxième forme. Ces expressions se ramènent alors canoniquement à la première forme par ce qui précède.

L'interprétation des variables d'ordre 0, et des termes d'ordre 0 se fait par eux mêmes, c'est à dire que chaque variable est interprétée par une variable de type o correspondante, que $\bar{o}$, S, +; ., en tant que symboles arithmétiques sont interprétés par les symboles fonctionnels correspondants.

(G 1) $(t=u)^*$ est $E(t,u)$

(G 2) $(\perp)^*$ est F.

Pour les autres clauses, supposons avoir construit

$A^* = \exists x^\sigma \forall y^\tau\, A'\left[x,y,\underline{Z}\right]$ et $\exists x^\sigma \forall y^\tau\, A'\left[x,y,z,\underline{Z}\right]$

$B^* = \exists x'^{\sigma'} \forall y'^{\tau'}\, B'\left[x',y',\underline{Z}\right]$

(les deux suites $\underline{Z}'$ et $\underline{Z}''$ correspondant à A' et B' ont été remplacées par leur réunion $\underline{Z}$)

(G 3) $(A \wedge B)^* = \exists x^\sigma \exists x'^{\sigma} \forall y^\tau \forall y'^{\tau'} \left(A'\left[x,y,\underline{Z}\right] \wedge B'\left[x',y',\underline{Z}\right] \right)$

(G 4) $(A \vee B)^* = \exists x^\sigma \exists x'^{\sigma'} \exists t^{()} \forall y^\tau \forall y'^{\tau'}$

$\left(\left(A'\left[x,y,\underline{Z}\right] \wedge t \right) \vee \left(B'\left[x',y',\underline{Z}\right] \wedge \neg t \right) \right)$

(G 5) $(A \to B)^* = \exists X'^{\sigma\to\sigma'} \exists Y^{\sigma,\tau'\to\tau} \forall x^\sigma \forall y'^{\sigma'}$

$\left(\left(A'\left[x,Y(x,y'),\underline{Z}\right] \right) \to \left(B'\left[X'(x),y',\underline{Z}\right] \right) \right)$

(G 6) $(\forall z A)^* = \exists X^{o\to\sigma} \forall z^o \forall y^\tau\, A'\left[X(z),y,z,\underline{Z}\right]$

(G 7) $(\exists z A)^* = \exists z^o \exists x^\sigma \forall y^\tau\, A'\left[x,y,z,\underline{Z}\right]$

2. Clauses inductives pour l'interprétation des quantifications d'ordre 1

L'ordre 1 est toujours représenté par le type $(o \to o)$. Ainsi, à chaque variable d'ordre 1, on associe injectivement une variable de type $(o \to o)$. Les constantes d'ordre 1, comme le successeur, ont une interprétation évidente dans le type $(o \to o)$.

L'interprétation des quantifications est donné essentiellement par (G 6) et (G 7) :

$$(\forall z^1 A)^* = \exists X^{(o\to o)\to\sigma} \forall z^{(o\to o)} \forall y^\tau A' [X(z), y, z, \underline{Z}]$$

$$(\exists z^1 A)^* = \exists z^{(o\to o)} \exists x^\sigma \exists y^\tau A' [x, y, z, \underline{Z}]$$

Si nous avions prévu des ordres 2,3,... , nous saurions étendre sans difficulté l'interprétation fonctionnelle à ces ordres.

3. Clauses inductives pour l'interprétation des opérations faisant intervenir les ordres supérieurs

N.B. Dans ce qui va suivre, l'interprétation d'un énoncé dépendra de son écriture, et deux énoncés égaux au sens des OR i n'auront pas nécessairement la même interprétation.

A chaque objet (énoncé ou terme d'ordre supérieur), nous allons associer une interprétation.

1-Les ordres R*

On définit R* par

$0^* = 1^* = ()^* = ()$

$(R_1, \ldots, R_n)^* = (R_1^*, R_1^*, R_2^*, R_2^*, \ldots, R_n^*, R_n^*)$

2- Les opérateurs T_R .

On pose

$T_0(\alpha^{()}, \beta^{()}) = o$

$T_1(\alpha^{()}, \beta^{()}) = (o \to o)$

$T_{()}(\alpha^{()}, \beta^{()}) = (\alpha, \beta \to ())$

si $R = (R_1, \ldots, R_n)$,

$$T_R(\alpha^{R^*}, \beta^{R^*}) = \Lambda\alpha_1^{R_1^*}\ \Lambda\beta_1^{R_1^*} \ldots \Lambda\alpha_n^{R_n^*}\ \Lambda\beta_n^{R_n^*}\ (T_{R_1}(\alpha_1, \beta_1) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \ldots \longrightarrow (T_{R_n}(\alpha_n, \beta_n) \longrightarrow (T_{()}(\alpha\alpha_1\beta_1\ldots\alpha_n\beta_n, \beta\alpha_1\beta_1\ldots\alpha_n\beta_n)))\ldots)$$

<u>REMARQUE</u>

Dans la pratique, il est plus simple de définir les T_R et les R^* ainsi :

$(R_1,\ldots,R_n)^*$ est $(R'_1,\ldots,R'_p)^*$, où $R'_1\ldots R'_p$ est la sous-suite de $R_1\ldots R_p$ obtenue en éliminant les R_i qui sont soit 0, soit 1.

La définition de $T_{(R_1,\ldots,R_n)}$ devient alors

$$T_R(\alpha^{R^*}, \beta^{R^*}) = \Lambda\alpha'^{R_1'^*}_1 \Lambda\beta'^{R_1'^*}_1 \ldots \Lambda\alpha'^{R_p'^*}_p \Lambda\beta'^{R_p'^*}_p\ (T_{R_1}(\alpha_1, \beta_1) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \ldots \longrightarrow (T_{R_n}(\alpha_n, \beta_n) \longrightarrow (T_{()}(\alpha\alpha'_1\beta'_1 \ldots \alpha'_p\beta'_p, \beta\alpha'_1\beta'_1\ldots\alpha'_p\beta'_p)))$$

Ainsi, par exemple, $T_{((),0)}(\alpha, \beta)$ sera donné par

$$\Lambda\alpha_1\Lambda\beta_1\ (T_{()}(\alpha_1, \beta_1) \to (0 \to (T_{()}(\alpha\alpha_1\beta_1, \beta\alpha_1\beta_1))))$$

L'interprétation de Gödel d'un énoncé, que nous avions définie sous forme d'une expression $\exists x^{\sigma}\ \forall y^{\tau}\ A[x,y,\underline{Z}]$, peut être identifiée à la donnée de deux types (σ et τ) et d'un terme élémentaire ($\lambda x \lambda y\ A[x,y,\underline{Z}]$) de type ($\sigma, \tau \to ()$), c'est à dire $T_{()}(\sigma, \tau)$.

Plus généralement, nous définirons l'interprétation fonctionnelle d'un objet d'ordre R comme la donnée de deux opérateurs d'ordre R^*, σ et τ , et d'une fcl de type $T_R(\sigma, \tau)$.

Les clauses (G 1)-(G 7) nous donnent une partie de la définition de l'interprétation; il nous reste à décrire la partie de cette interprétation correspondant aux ordres supérieurs.

A chaque variable X_i d'ordre R distinct de 0 ou 1, nous allons associer injectivement deux lind α et β distinctes, d'ordre R*, et une lvar G, de type $T_R(\alpha,\beta)$. (Dans le cas où R est 0 ou 1, c'est aussi ce que nous avons fait, à la différence que, dans ce cas, α et β sont totalement inutiles.)

(G 8) $(TU_1\ldots U_n)^*$ est donné par $(T)^*\{\sigma_1\}\{\tau_1\}\ldots\{\sigma_n\}\{\tau_n\}(U_1^*,\ldots,U_n^*)$, où (σ_i,τ_i) est associé à U_i; le couple associé à $TU_1\ldots U_n$ est évidemment $(\sigma\sigma_1\tau_1\ldots\sigma_n\tau_n,\ \tau\sigma_1\tau_1\ldots\sigma_n\tau_n)$, si (σ,τ) est associé à T.

REMARQUE :

Dans le même esprit que la remarque précédente, il suffit, avec les définitions simplifiées, d'associer à $(TU_1\ldots U_n)$ la fcl $(T)^*\{\sigma'_1\}\{\tau'_1\}\ldots\{\sigma'_p\}\{\tau'_p\}(U_1^*,\ldots,U_n^*)$ etc...

(G 9) $(\lambda X_1\ldots\lambda X_n\, A[X_1,\ldots,X_n])^*$ est donné par $DT\alpha_1 DT\beta_1\ldots DT\alpha_n DT\beta_n\,\lambda G_1\ldots\lambda G_n\,(A)^*$, où (α_i,β_i,G_i) est associé à la variable X_i. Si σ et τ sont les opérateurs associés à A, le couple d'opérateurs assocés à (G 9) est $(\lambda\alpha_1\lambda\beta_1\ldots\lambda\alpha_n\lambda\beta_n\sigma,\ \lambda\alpha_1\lambda\beta_1\ldots\lambda\alpha_n\lambda\beta_n\tau)$.

REMARQUE

Dans le même esprit que les remarques précédentes, il suffit de considérer $DT\alpha'_1 DT\beta'_1\ldots DT\alpha'_p DT\beta'_p\,\lambda G_1\ldots\lambda G_n\,(A)^*$, etc...

Il nous reste à interpréter les quantifications universelles et existentielles sur les variables d'ordre supérieur.

Supposons que $(A(X))^*$ soit $\exists\, x^{\sigma[\alpha,\beta]}\forall y^{\tau[\alpha,\beta]}A'\,[x,y,\alpha,\beta,G,\underline{Z}]$, où (α,β,G) est associé à la variable X.

Pour l'intelligibilité de ce qui suit, il est préférable de recourir à certains abus de notation.

- au niveau des opérateurs, si le sens est parfaitement clair, on peut employer les expressions $\lambda\alpha_1\ldots\alpha_n\sigma$, $\Lambda\alpha_1\ldots\alpha_n\sigma$, $V\alpha_1\ldots\alpha_n\tau$

respectivement pour $\lambda\alpha_1 \ldots \lambda\alpha_n \sigma$, $\Lambda\alpha_1 \ldots \Lambda\alpha_n \sigma$, $V\alpha_1 \ldots V\alpha_n \sigma$.

- Au niveau des fcl, nous pouvons nous permettre de semblables abus; ainsi, λxya , a(b,c), $DT\alpha\beta a$, $a\{\sigma,\tau\}$, respectivement pour $\lambda x \lambda ya$, a(b)(c) $DT\alpha DT\beta\, a$, $a\{\sigma\}\{\tau\}$, etc... l'abus de notation le moins immédiat concerne l'emploi de I et ST . Par $I^{\sigma\tau} a$, (a est de type $\rho[\sigma,\tau]$) nous entendons $I^{\sigma}(I^{\tau} a)$; par $ST\alpha\beta xab$ (x est de type $\rho[\alpha,\beta]$, a est de type ξ , b est de type $V\alpha\beta\rho[\alpha,\beta]$;) nous entendons la fcl de type ξ : $ST\alpha x' (ST\beta xax')b$ où x' est une nouvelle mvar de type $V\beta\rho[\alpha,\beta]$.

(G 10) $(\forall XA)^*$ est

$$\exists X^{\Lambda\alpha\beta\rho_1} \quad \forall Y^{V\alpha\beta\rho_2}\, ST\alpha\beta\, z\ (\ A'[\ X\{\alpha,\beta\}\ (\pi^2 z), \pi^1 z, \alpha, \beta, \pi^2 z, \underline{Z}\ ]\ )\ Y$$

(G 11) $(\exists XA)^*$ est

$$\exists X^{V\alpha\beta\rho_3} \quad \forall Y^{\Lambda\alpha\beta\rho_4}\, ST\alpha\beta\, z\ (\ A'[\ \pi^1 z, Y\{\alpha,\beta\}\ (z), \alpha, \beta, \pi^2 z, \underline{Z}\ ]\ )\ X$$

et ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 et ρ_4 sont donnés respectivement, si R est l'ordre de X, par

$$\rho_1 = T_R(\alpha,\beta) \mapsto \sigma$$
$$\rho_2 = \tau \times T_R(\alpha,\beta)$$
$$\rho_3 = \sigma \times T_R(\alpha,\beta)$$
$$\rho_4 = \sigma \times T_R(\alpha,\beta) \rightarrow \tau$$

Nous avons défini l'interprétation fonctionnelle indépendemment de la notion d'égalité entre énoncés; en fait, la situation est tout à fait identique à ce qui s'est passé pour les (QR i),(lemmes 1 et 2, seconde partie, section 1) :

<u>Lemme 1</u>

Supposons avoir associé à X le triplet (α, β, G), et soit $A'[\alpha, \beta, G, \underline{Z}]$ l'interprétation de A(X); si d'autre part l'interprétation associe au terme T (de même ordre que X), le triplet (σ, τ, T^*), $A'[\sigma, \tau, T^*, \underline{Z}]$ est l'interprétation de A(T) .

Lemme 2

Si A et A' sont des énoncés égaux au sens des OR i, ils ont même interprétation.

Il ne s'agit pas ici de démontrer ces lemmes, qui sont des propriétés structurales de nos constructions; ce type de résultat est toujours vrai dès que les constructions présentent un certain caractère d'uniformité. Une remarque cependant : le lemme 1 et le lemme 2 ne sont vrais à strictement parler que si on identifie les fcl qui ne diffèrent entre elles que par un nombre fini d'application des règles de réduction, pour le lambda et le DT; bien entendu, puisque ce genre d'identification ne fait appel en aucun cas aux règles de réduction dépendant des valuations, ceci ne changera strictement rien à la validité.

4. Variantes pour la conjonction et la disjonction

Dans les systèmes +, on peut proposer les variantes suivantes à (G 3) et (G 4) :

$$(A \wedge B)^{**} = \exists X \quad \forall Y \ \oplus yy'(A'[\pi^1 X, y, \underline{Z}])(B'[\pi^2 X, y', \underline{Z}])\ Y$$

$$(A \vee B)^{**} = \exists X \quad \forall Y \ \oplus xx'(A'[x, (\pi^1 Y)x, \underline{Z}])(B'[x', (\pi^2 Y)x', \underline{Z}])\ X$$

avec les types évidents pour X et Y. Cette variante est inspirée directement de (G 10) et (G 11).

SECTION 2

INTERPRETATION DE GÖDEL DE L'ARITHMETIQUE

Si A est un théorème de l'arithmétique, A* est valide dans tout système fonctionnel contenant le type o , et la récursion pour tous les types.

Démonstration

Nous allons prouver le résultat plus précis suivant : soit une déduction de l'arithmétique,

$$\begin{array}{c} A_1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad A_n \\ \vdots \\ A \end{array}$$

où les A_i sont les hypothèses (non nécessairement distinctes), et A est la conclusion; soient $A'_i \quad x_i, y_i, \underline{Z}$ et $A \quad x, y, \underline{Z}$ les matrices de leurs interprétations. On peut alors trouver des termes $t_1, \ldots, t_n, t$ tels que $(\; _i \quad A'_i \quad x_i, t_i, \underline{Z} \quad) \qquad A' \; t, y, \underline{Z}$ soit VI, les t_i ne dépendant que des x_i, de y et de $\underline{Z}$, t ne dépendant que des x_i et de $\underline{Z}$.

Remarque préliminaire

Il est toujours possible, de par les propriétés de la VI, d'identifier un certain nombre d'hypothèses entre elles, si elles correspondent à des énoncés identiques : par exemple, si les hypothèses A_1 et A_2 sont le même énoncé, on sait trouver un terme u_1 tel que l'équivalence soit VIF;

$A'_1 [x_1, t_1, \underline{Z}] \wedge A'_2 [x_2, t_2, \underline{Z}] \leftrightarrow A'_1 [x_1, u_1, \underline{Z}]$, si nous avons auparavent identifié x_1 et x_2 , par exemple en remplaçant toutes les apparitions de x_2 par des apparitions de x_1. Ce qui montre, que notre hypothèse de travail est encore vraie si $A_1, \ldots, A_n$ désignent uniquement des ensembles finis d'hypothèses identiques.

Nous raisonnerons par induction sur les déductions.

En fait, pour raccoucir les démonstrations, nous ne considérerons les hypothèses $A_1,\ldots,A_n$ que lorsque celles-ci sont strictement nécessaires à l'écriture des déductions; par exemple, le schéma d'induction

$$\frac{A[\bar{o}] \qquad A[x] \rightarrow A[Sx]}{\forall x\, A[x]}$$

avec hypothèses est conséquence de son cas particulier sans hypothèses.

<u>Première étape</u> les axiomes de Peano sauf l'induction

Dans le cours de l'étude de la VI, nous avons vu que ces axiomes sont valides.

<u>Seconde étape</u> le schéma d'induction.

Supposons que $A'[t,y,\bar{o},\underline{Z}]$ et $A'[X,uXy,x,\underline{Z}] \rightarrow A'[vX,y,Sx,\underline{Z}]$ soient VI; soient $u'=\lambda xu$; $v'=\lambda xv$. On pose $w=$ RECtv' ; alors w ne dépend que de $\underline{Z}$.

$A'[w\bar{o},y,\bar{o},\underline{Z}]$ est VI à cause de $w\bar{o}$ /= t; de même, $A'[wx,u'xw(x)y,\underline{Z}] \rightarrow A'[wSx,y,Sx,\underline{Z}]$ est VI. En conclusion, les propriétés de la VI nous assurent que

$$A'[wx,y,x,\underline{Z}]$$ est VI, ce qui montre que $(\forall xA(x))^*$ est valide.

<u>Troisième étape</u> les règles associées à l'implication, et les déductions formées d'une hypothèse.

Déductions formées d'une hypothèse : il faut trouver t et u tels que $A'[x,t,\underline{Z}] \rightarrow A'[u,y,\underline{Z}]$ soit VI; on pose t=y; u=x .

Introduction de $\rightarrow$:

Supposons que $\bigwedge_i A'_i [x_i, t_i, \underline{Z}] \rightarrow A' [t, y, \underline{Z}]$ soit VI.

Nous pouvons toujours nous ramener au cas où une hypothèse et une seule est annulée, soit en contractant plusieurs hypothèses, soit en adjoignant, pour la cas où aucune hypothèse ne serait annulée, une hypothèse supplémentaire $A_n [x_n, t_n, \underline{Z}]$, en choisissant $t_n = 0$.

Supposons donc que l'on annule A_n : il nous faut trouver t'_i $(i < n)$, u et t' tels que $\bigwedge_{i<n} A'_i [x_i, t'_i] \rightarrow (A'_n [x_n, ux_n y, \underline{Z}] \rightarrow A [t' x_n, y, \underline{Z}])$ soit VI. On prend $t'_i = t_i$, $u = \lambda x_n\, y t_n$, $t' = \lambda x_n t$; les deux derniers termes mentionnés ne dépendent que de $\underline{Z}$ et des x_i $(i < n)$.

Elimination de $\rightarrow$:

Supposons que $\bigwedge_i A'_i [x_i, t_i, \underline{Z}] \rightarrow A' [t, y, \underline{Z}]$ et que

$\bigwedge_j B'_j [y_j, u_j, \underline{Z}] \rightarrow (A' [x, uxy', \underline{Z}] \rightarrow B' [vx, y', \underline{Z}])$ soient VI.

En posant $u' = uty'$, $t'_i = t_i[u']$, $u'_j = u_j[t]$, il vient

$\bigwedge_i A'_i [x_i, t'_i, \underline{Z}] \rightarrow A' [t, u', \underline{Z}]$ et

$\bigwedge_j B'_j [y_j, u'_j, \underline{Z}] \rightarrow (A' [t, u', \underline{Z}] \rightarrow B' [vt, y', \underline{Z}])$, d'où

$(\bigwedge_i A'_i [x_i, t'_i, \underline{Z}] \wedge \bigwedge_j B'_j [y_j, u'_j, \underline{Z}]) \rightarrow B' [vt, y', \underline{Z}]$ est VI.

Remarquons que vt ne dépend pas de y', ce qui est suffisant, car toute autre dépendance fâcheuse dans les t'_i, u'_j, vt, peut toujours être éliminée au moyen de substitution closes ad hoc.

Quatrième étape : la conjonction

Introduction de $\wedge$:

Supposons que $\bigwedge_i A'_i [x_i, t_i, \underline{Z}] \rightarrow A [t, y, \underline{Z}]$ et

$\bigwedge_j B'_j [y_j, u_j, \underline{Z}] \rightarrow B [u, y', \underline{Z}]$ soient VI.

Alors

$(\bigwedge_i A'_i [x_i, t'_i, \underline{Z}] \wedge \bigwedge_j B'_j [y_j, u'_j, \underline{Z}]) \rightarrow (A' [\pi^1 v, \pi^1 y'', \underline{Z}] \wedge B' [\pi^2 v, \pi^2 y'', \underline{Z}])$

où v est $t \otimes u$, $t'_i [y''] = [y / \pi^1 y''] \, t_i$, $u'_j [y''] = [y' / \pi^2 y''] \, u_j$.

Elimination de $\wedge$.

Supposons que $\bigwedge_i A'_i[x_i,t_i,\underline{Z}] \to (A'[\overset{1}{\pi}v,\overset{1}{\pi}y,\underline{Z}] \wedge B'[\overset{2}{\pi}v,\overset{2}{\pi}y,\underline{Z}])$ soit VI. Alors, par exemple :

$$\bigwedge_i A'_i[x_i,t'_i,\underline{Z}] \to A'[\overset{1}{\pi}v,y',\underline{Z}] \text{ , avec } t'_i = [y/y'\otimes 0]\ t_i \text{ ,est VI.}$$

De même,

$$\bigwedge_i A'_i[x_i,t''_i,\underline{Z}] \to B'[\overset{2}{\pi}v,y'',\underline{Z}] \text{ , avec } t''_i = [y/0\otimes y'']\ t_i\text{, est VI.}$$

Cinquième étape : la disjonction

Introduction de $\vee$.

Supposons $\bigwedge_i A'_i[x_i,t_i,\underline{Z}] \to A'(t,y,\underline{Z}]$; alors

$\bigwedge_i A'_i[x_i,t_i,\underline{Z}] \to ((u \wedge A'[t,y,\underline{Z}]) \vee (\neg u \wedge B'[0,y',\underline{Z}])$ et

$\bigwedge_i A'_i[x_i,t_i,\underline{Z}] \to ((v \wedge B'[0,y',\underline{Z}]) \vee (\neg v \wedge A'[t,y,\underline{Z}])$ sont VI,

avec u=V, v=F. Il faut ensuite contracter y et y' en y", ce qui change t_i en t'_i, etc...

Elimination de $\vee$.

Comme d'habitude, nous nous ramenons au cas où une seule hypothèse est annulée. Supposons que

$$\bigwedge_i A'_i[x_i,t_i,\underline{Z}] \to (A'[t,y,\underline{Z}] \wedge u) \vee (B'[t',y',\underline{Z}] \wedge \neg u)$$
$$\bigwedge_j B'_j[y_j,u_j,\underline{Z}] \wedge A'[x,a,\underline{Z}] \longrightarrow C'[c,z,\underline{Z}]$$
$$\bigwedge_k C'_k[z_k,v_k,\underline{Z}] \wedge B'[x',b,\underline{Z}] \longrightarrow C'[d,z,\underline{Z}]$$

soient VI.

Soient $a' = [x/t]\ a$, $b' = [x'/t']\ b$,$c' = [x/t]\ c$, $d' = [x'/t']\ d$,

$t'_i = [y,y'/a',b']\ t_i$, $u'_j = [x/t]\ u_j$, $v'_k = [x'/t']\ v_k$.

Soit finalement e= D(u,c',d').

Alors $(\bigwedge_i A'_i[x_i,t'_i,\underline{Z}] \wedge \bigwedge_j B'_j[y_j,u'_j,\underline{Z}] \wedge \bigwedge_k C'_k[z_k,v'_k,\underline{Z}]) \longrightarrow$ $C'[e,z,\underline{Z}]$ est VI.

En effet, si u est vrai, $A'[t,a',\underline{Z}]$ est vrai si la conjonction E des (i),(j),(k) l'est; mais $A'[t,a',\underline{Z}] \to C'[c',z,\underline{Z}]$ est vrai sous la même hypothèse E, et comme alors e est c', on obtient bien le résultat désiré. Sinon, c'est $B'[t',b',\underline{Z}]$ qui est vrai sous l'hypothèse E; mais comme alors $C'[d',z,\underline{Z}]$ est vrai sous l'hypothèse E,

il suffit de remarquer que, si u est faux, e n'est autre que d'.
Par construction, e ne dépend pas de z.

<u>Sixième étape</u> : Absurdité

Supposons que $\bigwedge_i A'_i[x_i,t_i,\underline{Z}] \to F$ soit VI. Alors,
$\bigwedge_i A'_i[x_i,t_i,\underline{Z}] \to A'[0,y,\underline{Z}]$ est VI.

<u>Septième étape</u> : Quantification universelle

<u>Introduction du $\forall$</u> :

Supposons que $\bigwedge_i A'_i[x_i,t_i,\underline{Z}'] \to A'[t,y,z^o,\underline{Z}]$ soit VI.
Nous supposons que z n'est pas libre dans les hypothèses, c'est à dire n'est pas dans $\underline{Z}'$; on peut alors supposer $\underline{Z}=\underline{Z}'$. En posant $t'=\lambda zt$, on obtient $\bigwedge_i A'_i[x_i,t_i,\underline{Z}'] \to A'[t'(z),y,z,\underline{Z}]$.

<u>Elimination du $\forall$</u> :

Supposons que $\bigwedge_i A'_i[x_i,t_i,\underline{Z}] \to A'[t(z),y,z,\underline{Z}]$ soit VI, $\underline{Z}$ étant tel que z n'est pas dans $\underline{Z}$.(On peut toujours le supposer, puisque z est censé agir à la place d'une variable muette); soit u un terme de type o; alors $\bigwedge_i A'_i[x_i,t'_i,\underline{Z}] \to A'[t(u),y,u,\underline{Z}]$ est VI, avec $t'_i = [z/u]t_i$.

<u>Huitième étape</u> : Quantification existentielle :

<u>Introduction du $\exists$</u> :

Supposons que $\bigwedge_i A'_i[x_i,t_i,\underline{Z}] \to A'[t,y,u,\underline{Z}]$; alors l'interprétation de la $\exists$-introduction est évidente, puisqu'il n'y a rien à faire.

<u>Remarque</u> : évidemment, les interprétations de la $\forall$-élim et de l'$\exists$-introd nécessitent le lemme 1 de la section 1.

<u>Elimination du $\exists$</u> :

Supposons que $\bigwedge_i A'_i[x_i,t_i,\underline{Z}] \to A'[t,y,u,\underline{Z}]$ et
$\bigwedge_j B'_j[y_j,u_j,\underline{Z}] \wedge A'[x,v,z,\underline{Z}] \to C'[c,y',\underline{Z}]$. Nous supposons que z n'est pas dans $\underline{Z}$, ce qui est exactement ce qu'expriment les hypothèses

sur l'application de cette règle.

Soient $v' = [z/u]\ v$, $t'_i = [y/v']\ t_i$, $u'_j = [x,z/t,u]\ u_j$, $c' = [x,z/t,u]\ c$.

Alors $\bigwedge_i A'_i [x_i, t'_i, \underline{Z}] \rightarrow A' [t, v', u, \underline{Z}]$ et

$\bigwedge_j B'_j [y_j, u'_j, \underline{Z}] \wedge A' [t, v', u, \underline{Z}] \rightarrow C' [c', y', \underline{Z}]$ sont VI, et

donc

$(\bigwedge_i A'_i [x_i, t'_i, \underline{Z}] \wedge \bigwedge_j B'_j [y_j, u'_j, \underline{Z}]) \rightarrow C' [c', y', \underline{Z}]$ est VI.

<u>Neuvième étape</u> : Quantifications d'ordre 1

Ces quantifications se traitent exactement comme celles d'ordre 0.

<u>THEOREME 1</u>

Les systèmes PC_1, sPC_1, HA_1, sHA_1, sont interprétables dans les systèmes fonctionnels OFR_1, muni de VIF (pour les deux premiers), et OF_1, muni de VI, pour les derniers.

<u>Remarque</u>

Il est évident que pour n=1, le zéro est définissable, et que l'on peut donc remplacer OFR_1 et OF_1 par FR_1 et F_1.

En prolongeant la terminologie introduite en III.sec.6, nous dirons que les fonctions d'un système fonctionnel F sont <u>exactement</u> les fonctions récursives-prouvables d'une théorie T ssi

(1) Toutes les fonctions de F sont récursives-prouvables dans T.

(2) Si f est une fonction récursive-prouvable de T, son <u>graphe</u> est le même que celui d'une fonction de F.

<u>THEOREME 2</u>

Les fonctions de F_1 sont exactement les fonctions récursives-prouvables de HA_1 (resp. sHA_1).

Démonstration

Soit un théorème $\forall x \exists y\ T_1(e,x,y)$, et soit $\exists y \exists z \forall x \forall x'\ A(x,yx,zx,x')$ son interprétation. Le théorème 1 nous assure de l'existence de f et g clos tels que $VI \models A(x,fx,gx,x')$.

Soit maintenant e' la fonction qui, à n associe l'unique m tel que $T_1(e,n,m)$. Alors, si $f\bar{n} /= \bar{p}$, $e'n=p$; en effet, si $e'n \neq p$, $T_1(\bar{e},\bar{n},\bar{p})$ est prouvable , et donc interprétable; soit donc h tel que $VI \models A(\bar{n},\bar{p},x,hx)$; mais alors $VI \models A(n,p,gn,hgn)$ et $VI \models A(n,p,gn,hgn)$ ce qui est impossible.

Maintenant, en est obtenu comme $U(e'n)$; comme U est évidemment représentable dans F_1, il en résulte que la fonction f' donné par $f'x=Ufx$ est extensionnellement égale à e.

L'autre partie du théorème avait été démontrée en III.sec.6 .

EXTENSIONS PAR DEFINITION

Supposons que l'on puisse prouver dans HA_1 un énoncé de la forme $A \vee \neg A$, où A contient n variables libres d'ordre 0. On peut former une extension par définition de HA_1, en ajoutant une lettre de prédicats à n places p, et l'axiome

$$px_1 \ldots x_n \leftrightarrow A \quad . \quad (1)$$

La nouvelle théorie obtenue est conservative sur HA_1. De plus l'interprétation fonctionnelle s'étend aisément :

Puisque l'on peut prouver $A \vee \neg A$, on dispose d'un terme de type (), ne dépendant que de $x_1,\ldots,x_n$, que l'on notera, après λ-abstraction $p^*x_1 \ldots x_n$, tel que

(2) $VI \models (p^*x_1 \ldots x_n \wedge A'[t,y,x_1 \ldots x_n]) \vee (\neg p^*x_1 \ldots x_n \wedge \neg A'[x,ux,x_1 \ldots x_n])$

Si l'on interprète $px_1 \ldots x_n$ par $p^*x_1 \ldots x_n$ (avec des quantifactions inutiles), l'interprétation de (1) est exactement assurée par (2) .

En particulier, les prédicats récursifs primitifs comme T_1, etc... peuvent être utilisés dans une extension par définition, ce qui simplifie l'interprétation fonctionnelle.

On peut aussi former des extensions par définition à l'aide de lettres de fonction : supposons que

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \; T_n(\bar{e},x_1,\ldots,x_n,y) \quad \text{soit prouvable}$$

on peut introduire une nouvelle lettre de fonction f, avec l'axiome

$$T_n(\bar{e},x_1,\ldots,x_n,fx_1\ldots x_n) \qquad (3)$$

Par interprétabilité, on obtient f* tel

$$VI \models \quad T_n^*(\bar{e},x_1,\ldots,x_n,f^*x_1\ldots x_n) \qquad (4)$$

où T_n^* interprète T_n dans une extension par définition utilisant T_n comme lettre de prédicat.

Si on interprète f par f*, l'interprétation de (3) sera conséquence de (4).

D'autre part, comme l'énoncé décidable $x=U(y)$ peut être représenté dans une extension par définition par un prédicat p(x,y), et que l'on peut prouver $\forall x_1\ldots x_n \exists z \; p(z,fx_1\ldots x_n)$, la lettre de fonction g donnée par l'axiome supplémentaire

$$p(gx_1\ldots x_n,fx_1\ldots x_n) \qquad (6)$$

peut être interprétée par un g* vérifiant

$$p^*(g^*x_1\ldots x_n,f^*x_1\ldots x_n) \qquad (7)$$

Ceci montre que l'on peut adjoindre à HA_1 des lettres de prédicats correspondant aux énoncés décidables, ainsi que des lettres de fonction correspondant aux récursives-prouvables, et que l'interprétation fonxtionnelle s'étend alors canoniquement. En fait, elle se présente de manière plus simple.(Comparer l'interprétation de T_1 dans la demonstration du théorème 2, et celle de T_n donnée plus haut)

Des résultats similaires sont évidemment valables pour les autres théories qui ont une interprétation fonctionnelle.

SECTION 3 / INTERPRETATION DE L'AXIOME DE SPECTOR

Pour obtenir l'interprétation des sHA_n, il nous suffit d'interpréter (AC_{01}) et (F).

Nous nous plaçons dans la notion de validité définie comme la validité dans le modèle $M_\bullet$ des termes clos de OFB_n. Rappelons (II,sec.2,lemme 8) que si $A(u) \models V$, et si $u\bar{n}$ et $u'\bar{n}$ ont même forme normale pour tout n, alors $A(u') \models V$.

1. Interprétation de l'axiome du choix

Soit $A[x,f]$ un énoncé, $\exists z \forall t\ A'[z,t,x,f,\underline{Z}]$ son interprétation. En "oubliant" le $\underline{Z}$ superflu, l'interprétation de $\forall x \exists f\ A[x,f]$ devient $\exists g \exists z \forall x \forall t\ A'[zx,t,x,gx]$, tandis que celle de $\exists g \forall x\ A[x,g_x]$ est : $\exists g' \exists z \forall x \forall t\ A'[zx,t,x,g'_x]$.

Soit g' défini par $g'(w)=g((w)_1,(w)_2)$; il nous suffit de voir que

$$A'[zx_o,t_o,x_o,gx_o] \to A'[z_ox,t,x,g'_x] \text{ , avec } x_o=x,\ t_o = t,\ z_o = z.$$

Remplaçons x,z,t,gpar des termes clos (ainsi que $\underline{Z}$); alors

$A'[zx,t,x,gx] \to A'[zx,t,x,gx]$ se réduit en V , et comme $g'_x(\bar{n})$ et $g(x,\bar{n})$ ont même forme normale pour tout n,

$A'[zx,t,x,gx] \to A'[zx,t,x,g'_x]$ se réduit en V.

2. Interprétation de l'axiome (F).

Soit $\exists a \forall b\ P(x,a,b)$ l'interprétation de $A[x]$, x étant une variable de type o. Il nous faut écrire l'interprétation du cas de (F) correspondant à A.

Spector procède comme suit :

(1) $\forall x \neg\neg \exists a \forall b\quad P(x,a,b) \to \neg\neg \forall y \exists c \forall d\ P(y,c,d)$

(2) $\forall x B \exists a\quad P(x,a,B(a)) \to \neg\neg \exists C \forall yd\ P(y,Cy,d)$

(3) $\exists A \forall xB\ P(x,AxB,B(AxB)) \to \forall YD \exists C\quad P(YC,C(YC),DC)$

(4) $\forall AYD \exists xBC\quad P(x,AxB,B(AxB)) \to P(YC,C(YC),DC)$

la cinquième étape, l'interversion des quantificateurs, est omise.
Il nous faut donc trouver x,B,C en fonction de A,Y,D, de manière à ce que (4) soit vérifié.

Soit R(x,C) la condition

$$\exists B \{ P(x,AxB,B(AxB)) \to P(x,Cx,DC) \} \qquad (5)$$

Il nous suffit de trouver un C tel que R(YC,C) soit satisfait.

Remarque préliminaire

R satisfait la condition générale suivante

(SP) Etant donnés n, $C_0,\ldots,C_{n-1}$, f, soit l'ensemble des termes t_a

$t_a = \langle C_0,\ldots,C_{n-1},a,f(a,\overline{n+1}),\ldots,f(a,\overline{n+p}),\ldots \rangle$

On peut alors trouver a_o tel que $R(\bar{n},t_{a_o})$ soit satisfait, a_o s'exprimant sous la forme $a_o=G(\bar{n},\lambda z t_z)$, où G est une fcl de OFB_n.

Définissons en effet

$B_z^{f'}$ par $B_z^{f'}(a)=D(f'(a))$; si on définit maintenant

G par $G(z,f')=A(z,B_z^{f'})$, on trouve :

$$P(\bar{n},A(\bar{n},B_{\bar{n}}^{f'}),D(f'(a_o))) \to P(\bar{n},a_o,D(f'(a_o)))$$

avec $a_o=G(\bar{n},f')$.

Supposons que $f'=\lambda z t_z$. Alors $f'(a_o)=t_{a_o}$; soit $B_o=B_{\bar{n}}^{f'}$.

On a $P(\bar{n},A(\bar{n},B_o),D(t_{a_o})) \to P(\bar{n},a_o,D(t_{a_o}))$

Et comme par définition, $D(t_{a_o})=D(f'(a_o))=B_o(a_o)$ et que $a_o=G(\bar{n},f')=A(\bar{n},B_o)$ il vient :

$$P(\bar{n},A(\bar{n},B_o),B_o(A(\bar{n},B_o))) \to P(\bar{n},t_{a_o}(\bar{n}),D(t_{a_o}))$$

Pour interpréter (F), il nous suffit de résoudre l'équation

(6) R(YC,C)

pour une condition R arbitraire satisfaisant (SP).

Nous allons construire une fcl H qui exprime une approximation de la solution C de (6) à partir d'un segment initial donné de C. Bien entendu, puisque C n'est pas construit, il faudra se résigner à ce que H ne donne en fonction du segment $\langle C_0,\ldots,C_{n-1}\rangle$, qui la "meilleure" approximation de la solution définitive, dans le sens que la valeur de H sur un segment initial de la solution définitive C*, soit précisément C*.

Le point essentiel dans la construction de H est le suivant : supposons que H ait été construit pour tout segment $\langle C_0,\ldots,C_{n-1},a\rangle$, a variable, les C_i fixés. La valeur de H sur $\langle C_0,\ldots,C_{n-1}\rangle$ sera obtenue :

- en choisissant un a_0 particulier
- en prenant comme prolongement de $\langle C_0,\ldots,C_{n-1}\rangle$, le prolongement déjà calculé de $\langle C_0,\ldots,C_{n-1},a_0\rangle$.

H approximera la solution définitive C* dans le sens suivant :

si $\bar{p} \leqslant Y(H(\bar{p},\langle C_0,\ldots,C_{p-1}\rangle))$, alors $R(\bar{p}, H(\bar{p},C))$, (6)

<u>Définition de H</u>

si $Y(\langle C\bar{o},\ldots,C\overline{p-1}\rangle) < \bar{p}$ alors $H(\bar{p},C) = \langle C\bar{o},\ldots,C\overline{p-1}\rangle$

(6) est vérifié de façon évidente dans ce cas.

dans le cas contraire, on posera $H(\bar{p},C) = \langle C\bar{o},\ldots,C\overline{p-1},a_0,f(a_0,\overline{p+1}),\ldots\rangle$ avec $f(y,a)=H(\overline{p+1},\langle C\bar{o},\ldots,C\overline{p-1},a\rangle,y)$, et $a_0=G(p,\lambda z\, t_z)$, où t_z est défini comme dans l'énoncé de (SP), c'est à dire que $H(\bar{p},C)$ est t_{a_0}. Dans ce cas (6) est encore staisfaite. La possibilité de définir H dans OFB_n sera examinée plus loin.

Soit $C^* = H(\bar{0},\langle\rangle)$. Soit T une fcl arbitraire de OFB_n. Nous montrons par induction sur p, que $T(C^*)=T(H(\bar{p},\langle C^*;\bar{p}\rangle))$ pour tous T et p, t.q. $T(C^*)$ de zéro.

Si p=0, cela résulte du fait que $\langle C^*;\bar{0}\rangle(\bar{q})=0$ pour tout q.

Si p=n+1, deux cas se présentent

1) $Y(\langle C^*;\bar{n}\rangle) < \bar{n}$. Alors $T(C^*)=T(H(\bar{n},\langle C^*;\bar{n}\rangle))$ pour tout T par hypothèse.

Mais, comme $H(\bar{n}, C^*;\bar{n})(\bar{q}) = \langle C^*;\bar{n}\rangle(\bar{q})$ pour tout q, on obtient $T(C^*)=T(\langle C^*;\bar{n}\rangle)$ pour tout T. Si nous choisissons T comme étant l'application qui à C associe $Y(\langle C;\overline{n+1}\rangle)$, on doit avoir $Y(\langle C^*;\bar{p}\rangle)=T(C^*)=T(\langle C^*;\bar{n}\rangle) < \bar{n} < \bar{p}$.
(le fait que $T(\langle C^*;\bar{n}\rangle) < \bar{n}$ vient de ce que $\langle C^*;\bar{n}\rangle(\bar{q}) = \langle\langle C^*;\bar{n}\rangle ; \overline{n+1}\rangle)(\bar{q})$ pour tout q, et donc $T(\langle C^*;\bar{n}\rangle)=Y(\langle C^*;\bar{n}\rangle)$)

On en conclut que $H(\bar{p},\langle C^*;\bar{p}\rangle)=\langle C^*;\bar{p}\rangle$.

D'autre part, si T désigne la fcl : $T(C)=T'(C\bar{n})$, comme $T(C^*)=T(\langle C^*;\bar{n}\rangle)$, on en déduit $T'(C^*\bar{n})=T'(0)$ pour tout T'.

Comme, pour un T arbitraire, $T(C^*)=T(\langle C^*;\bar{n}\rangle)=T(\langle C^*;\bar{n},0\rangle)=T(\langle C^*;\bar{n},C^*\bar{n}\rangle)$ d'après ce qui précède, avec un T' convenable, et que $\langle C^*;\bar{n},C^*\bar{n}\rangle$ coïncide avec $\langle C^*;\bar{p}\rangle$ sur tout $\bar{q}$, on conclut finalement

$$T(C^*)=T(\langle C^*;\bar{p}\rangle)=T(\ H(\bar{p},\langle C^*;\bar{p}\rangle\ )).$$

2) $Y(\langle C^*;\bar{n}\rangle) \geqslant \bar{n}$. Par hypothèse, $T(C^*)=T(\ H(\bar{n},\langle C^*;\bar{n}\rangle))$ pour tout T.
On en déduit immédiatement que $T'(C^*\bar{n}) = T'(a_o)$ pour tout T'.
D'autre part $T(H(\bar{n},\langle C^*;\bar{n}\rangle))=T(\ H(\bar{p},\langle C^*;\bar{n},a_o\rangle))$, puisque $H(\bar{n},\langle C^*;\bar{n}\rangle)(\bar{q})$ et $H(\bar{p},\langle C^*;\bar{n},a_o\rangle)(\bar{q})$ ont même forme normale pour tout q.

Par un choix approprié de T', il vient

$$T(H(\bar{n},\langle C^*;\bar{n}\rangle))=T(\ H(\bar{p},\langle C^*;\bar{n},C^*\bar{n}\rangle\ )),$$ que l'on transforme aisément

en $$T(H(\bar{n},\langle C^*;\bar{n}\rangle))=T(\ H(\bar{p},\langle C^*;\bar{p}\rangle\ ))$$. On en déduit alors

$$T(C^*)=\ T(H(\bar{p},\langle C^*;\bar{p}\rangle))$$ pour tout T.

Soit $\bar{p}=YC^*$; comme $YC^*=Y(H(\bar{p},\langle C^*;\bar{p}\rangle))$, la condition (6) donne

$R(\bar{p},\ H(\bar{p},\langle C^*;\bar{p}\rangle\ ))$, ce qui est bien une solution de $R(YC,C)$.

Il nous reste à vérifier que H est définissable dans OFB_n.
Or H est défini par une équation de la forme

$$H(x,C) = \begin{cases} F(x,\langle C;x\rangle\ ) & \text{si}\quad Y(\langle C;x\rangle) < x \\ F'(x,\langle C;x\rangle,\lambda a H(Sx,\langle C;x,a\rangle\ )) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une telle définition est possible à cause de l'existence de f

$$f(x,C) = \begin{cases} E & \text{si}\quad Y(\langle C;x\rangle) < x \\ \lambda z \lambda u\ \ F'(z,u,\ \lambda a f(Sx,\langle C;x,a\rangle,Sz,\ \langle u;z,a\rangle\ ) & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $E = \lambda z \lambda u \ F(x, \langle u;x \rangle)$.

On peut alors définir H par

$H(x,C)=f(x,C,x,C)$.

Remarque

Nous avons supposé dans ce qui précédait que la fonction qui sert à fabriquer les suites finies utilisait le zéro de OFB_n. On peut, bien entendu, prendre n'importe quoi, par exemple le terme

$A(\bar{o},b)$, avec $b=\lambda y D(\lambda x^o y)$, à la place de O.

3. Enoncé des résultats

THEOREME 3

SA_n s'interprète dans OFB_n.

THEOREME 4

Les fonctions récursives prouvables de SA_n sont exactement les fonctions de OFB_n.

COROLLAIRE

Les graphes des fonctions récursives définies par des éléments de OFB_n sont définissables dans OF_{n+1}, et réciproquement.

SECTION 4 : INTERPRETATION DES QUANTIFICATIONS D'ORDRE SUPERIEUR

Il nous reste encore à examiner la stabilité de l'interprétation fonctionnelle par rapport aux quantifications d'ordre distinct de 0 ou 1.

1. Quantifications universelles

1.1. Introduction du $\forall$:

Supposons que $\bigwedge_i A'_i[x_i,t_i,\underline{Z}] \to A'[t,y,G,\underline{Z}]$ où G, de type $T_R(\alpha,\beta)$ est associé à une ind. γ^R qui n'est pas libre dans les A'_i. En particulier, G, α, β, ne sont pas dans $\underline{Z}$. En posant $t' = [G/\pi^2 z]\,t$ $t'_i = [y,G/\pi^1 z,\pi^2 z]\ t_i$, on obtient

$$\bigwedge_i A'_i[x_i,t'_i,\underline{Z}] \to A'[t',\pi^1 z,\pi^2 z,\underline{Z}]$$

Comme t ne dépend pas de variables dont le type contient α et β libres autres que G, en posant $u = DT\alpha\beta\lambda Gt$, on obtient

$$\bigwedge_i A'_i[x_i,t'_i,\underline{Z}] \to A'[u\{\alpha,\beta\}(\pi^2 z),\pi^1 z,\pi^2 z,\underline{Z}]$$

et, en posant $u_i = ST\alpha\beta z t'_i Y$

$$\bigwedge_i A'_i[x_i,u_i,\underline{Z}] \to ST\alpha\beta zA'[u\{\alpha,\beta\}(\pi^2 z),\pi^1 z,\pi^2 z,\underline{Z}]\ Y$$

ce qui est bien le résultat recherché.

1.2. Elimination du $\forall$:

Supposons que

$$\bigwedge_i A'_i[x_i,t_i,\underline{Z}] \to ST\alpha\beta zA'[t\{\alpha,\beta\}(\pi^2 z),\pi^1 z,\pi^2 z,\underline{Z}]\ Y$$

soit valide.

Soit (σ,τ,T^*) le triplet associé au terme T par (G 9); alors $(A[T])^*$ est $\exists x\,\forall y\ A'[x,y,T^*,\underline{Z}]$. En posant $t'_i = [Y/I^{\sigma\tau}y \otimes T^*]\ t_i$, il vient

$$\bigwedge_i A'_i[x_i,t'_i,\underline{Z}] \to ST\alpha\beta zA'[t\{\alpha,\beta\}(\pi^2 z),\pi^1 z,\pi^2 z,\underline{Z}]\,I^{\sigma\tau}(y\otimes T^*)$$

et donc

$$\bigwedge_i A'_i[x_i,t'_i,\underline{Z}] \to A'[t\{\sigma,\tau\}(T^*),y,T^*,\underline{Z}]$$

ce qui assure l'interprétabilité.

2. Quantifications existentielles

2.1. Introduction du $\exists$:

Supposons que $\bigwedge_i A'_i[x_i,t_i,\underline{Z}] \rightarrow A'[t,y,T^*,\underline{Z}]$ soit valide.

On suppose que le triplet (σ,τ,T^*) est associé au terme T.

Soit Y de type $\Lambda\alpha\beta\rho_4$ (voir définition (G 11)); on pose

$t'_i = [y/\ Y\{\alpha,\beta\}(v^*)]\ t_i$; avec $v^*=t \otimes T^*$

$$\bigwedge_i A'_i[x_i,t'_i,\underline{Z}] \rightarrow A'[t,Y\{\alpha,\beta\}(v^*),T^*,\underline{Z}] \quad \text{et donc}$$

$$\bigwedge_i A'_i[x_i,t'_i,\underline{Z}] \rightarrow ST\alpha\beta z\ A'[\pi^1 z,Y\{\alpha,\beta\}(z),\pi^2 z,\underline{Z}]\ u$$

avec

$$u = I^{\sigma\tau}\ t \otimes T^* = I^{\sigma\tau}\ u^*$$

2.2. Elimination du $\exists$:

Supposons que

$$\bigwedge_i A'_i[x_i,t_i,\underline{Z}] \rightarrow ST\alpha\beta\ z\ A'[\pi^1 z,Y\{\alpha,\beta\}(z),\pi^2 z,\underline{Z}]\ t$$

et que

$$\bigwedge_j B'_j[y_j,u_j,\underline{Z}] \wedge A'[x,u,G,\underline{Z}] \rightarrow C[v,y',\underline{Z}]$$

soient valides.

En posant $u'_j = [x,G/\pi^1 z,\pi^2 z]\ u_j$, $v' = [x,G\ /\ \pi^1 z,\pi^2 z]\ v$, etc...

$$\bigwedge_j B'_j[y_j,u'_j,\underline{Z}] \wedge A'[\pi^1 z,u',\pi^2 z,\underline{Z}] \rightarrow C[v',y',\underline{Z}]$$

Si nous posons maintenant

$$u''_j = ST\alpha\beta\ zu'_j t\ ;\ v'' = ST\alpha\beta\ zv' t\ ;\ u'' = DT\alpha\beta\lambda\ zu', \text{ il vient}$$

$$\bigwedge_j B'_j[y_j,u''_j,\underline{Z}] \wedge ST\alpha\beta zA'[\pi^1 z,u''\{\alpha,\beta\}(z),\pi^2 z,\underline{Z}]\ t \rightarrow C[v'',y',\underline{Z}]$$

Mais si t'_i est $[Y/u'']\ t_i$, on a d'autre part

$$\bigwedge_i A'_i[x_i,t'_i,\underline{Z}] \rightarrow ST\alpha\beta\ z\ A'[\pi^1 z,u''\{\alpha,\beta\}(z),\pi^2 z,\underline{Z}]\ t \quad , \text{et}$$

donc :

$$\bigwedge_i A'_i[x_i,t'_i,\underline{Z}] \wedge \bigwedge_j B'_j[y_j,u''_j,\underline{Z}] \rightarrow C[v'',y',\underline{Z}]$$

ce qui donne l'interprétation.

3. Enoncé des résultats

THEOREME 5

1) Les systèmes PC_n s'interprètent dans les OFR_n, munis de VIF.

2) Les systèmes HA_n s'interprètent dans les OF_n, munis de VI.

3) Les systèmes SA_n s'interprètent dans les OFB_n.

THEOREME 6

1) Les fonctions récursives prouvables de HA_n sont exactement les fonctions de OF_n.

2) Les fonctions récursives prouvables de SA_n sont exactement les fonctions de OFB_n.

SECTION 5 : INTERPRETATION DE LA THESE DE CHURCH

1. Enoncé de la thèse de Church

Kreisel 1968

Il y a de nombreuses façons d'énoncer la thèse de Church (voir [ ]) nous nous bornerons à la formulation

$$(CT) \qquad \forall x \exists y \ A[x,y] \to \exists e \forall x \exists y \ (T_1(e,x,y) \wedge A[x,U(y)])$$

Au cas où le système contiendrait des variables pour les énoncés, si on prend pour A une variable d'ordre (0,0), on déduit de (CT) une forme quantifiée universellement sur A.

L'axiome (F) contredit formellement (CT), et donc il est inutile d'ajouter (CT) à un système classique, ou même aux SA_n.

Pour voir que (F) contredit (CT), on peut faire la raisonnement simple suivant, du à Gödel :

Soit R(x) un prédicat récursivement énumérable non récursif, tel que $\neg(\exists e \forall x \exists y \ (T_1(e,x,y) \wedge ((y=o \wedge R(x)) \vee (y=1 \wedge \neg R(x)))$ soit prouvable. (Par exemple $R(x) = \exists y T_1(x,x,y)$)

Comme $\neg\neg(R(x) \vee \neg R(x))$ est prouvable, $\forall x \neg\neg \exists y \ (y=o \wedge R(x)) \vee (y=1 \wedge \neg R$ est prouvable; par F, on obtient

$\neg\neg \forall x \exists y (y=o \wedge R) \vee (y=1 \wedge \neg R)$, et donc par (CT)

$\neg\neg \exists e \forall x \exists y (T_1(e,x,y) \wedge ((y=o \wedge R) \vee (y=1 \wedge \neg R)))$, ce qui est contradictoire.

Une formulation strictement plus forte serait la suivante

$$(CT_n) \qquad \forall x \exists y \ A[x,y] \to \exists e \forall x \exists y \ (T'_n(e,x,y) \wedge A[x,U'_n(y)])$$

où T'_n et U'_n sont les prédicats T' et U' construits en I.3.3., correspondant au système OFA_n.

(CT_n) signifie donc que toute fonction est dans OFA_n.

<u>Lemme 1</u>

Si Cal_n est l'énoncé "tous les termes clos de OFA_n ont une forme normale", alors dans HA_1, $(CT_n) \to \neg Cal_n$.

<u>Démonstration</u>

Supposons Cal_n. Par (CT_n), on obtient f de type $(o,o \to o)$ dans OFA_n tel que $T'_n(e,y,f(e,y))$ pour tous e et y. En particulier $T'_n(e,e,f(e,e))$. Soit a le terme $GD(\lambda xS(U'_n(fxx)))$; soit $\bar{m}$ la forme normale de a. Alors $T'_n(m,m,fmm)$, et $U'_n(fmm)=(\lambda xS(U'_n(fxx)))(m)=S(U'_n(fmm))$, ce qui est absurde.

<u>THEOREME 7</u>

Dans HA_p $(p > n)$, on peut prouver $\neg(CT_n)$.

<u>Démonstration</u>

En effet, HA_n est alors finiment axiomatisable dans HA_p, et nous pouvons donc prouver Cal_n par réflexion dans HA_p; une application du lemme 1 nous montre que, pour un certain A, $\neg(CT_n)$ est prouvable.

Il nous reste donc à examiner le cas p=n, c'est à dire à montrer que $HA_n + (CT_n)$ n'est pas contradictoire, modulo la non-contradiction de HA_n. Il nous suffit d'étendre l'interprétation fonctionnelle.

<u>2. Interprétation de (CT_n)</u>

Supposons que nous ayons interprété HA_n dans OFA_n; l'interprétation d'un axiome (CT_n) sera, si nous supposons T'_n et U'_n symboles primitifs d'une extension par définition :

$$A'\left[x,f(x),X(x),Y,\underline{Z}\right] \to T'_n(e,x',y(x')) \wedge A'\left[x',U'_n(y(x')),X'(x'),Y',\underline{Z}\right]$$

le problème étant de trouver e,y,X' en fonction de f et X, et x,Y, en fonction de f,X,x',Y'.

On pose x=x',Y=Y', X'=X, e=GD(f),y=RED(f). La vérification est immédiate.

3. Enoncé des résultats

THEOREME 8

1) Pour chaque $HA_n^{(i)}$, on peut prouver dans HA_n $Cons(HA_n^{(i)} + (CT_n))$, et donc aussi les formes plus faibles $Cons(HA_n^{(i)} + (CT_{n+p+1}))$ et $Cons(HA_n^{(i)} + (CT))$.

2) $HA_n + CT_n$ (et aussi $HA_n + (CT_{n+p+1})$, $HA_n + (CT)$) s'interprètent dans OFA_n.

THEOREME 9

1) Les fonctions récursives prouvables de $HA_n + (CT_n)$ sont exactement les fonctions de OFA_n.

2) Les fonctions récursives-prouvables de HA_n et de $HA_n + (CT_n)$ sont identiques (extensionnellement).

SECTION 6 : INTERPRETATION DU PRINCIPE DE MARKOV

Le principe de Markov est l'énoncé suivant

$$\exists z^o\ (Az^o \vee \neg Az^o)\ \wedge\ \neg\neg\exists z^o Az^o \ \rightarrow\ \exists z^o Az^o \qquad \text{(MPR)}$$

Il peut être grossièrement paraphrasé comme suit : supposons que nous disposions d'un algorithme nous permettant de décider pour chaque n, si An, ou si $\neg$An, et que nous disposions aussi de la certitude (classique) de l'existence d'un n tel que An; alors un algorithme pour trouver effectivement un n tel que An existe, par exemple, essayer n=o; si $\neg$Ao, essayer 1, etc...

Cependant (MPR) n'est en général pas dérivable dans les systèmes intuitionnistes; par contre, son interprétation fonctionnelle est valide.

Si l'interprétation de Az est

$$\exists x\ \forall y\ A'[x,y,z] \qquad \text{(on oublie la suite } \underline{Z}\text{)}$$

l'interprétation de $\forall z\ (Az \vee \neg Az)$ est :

(1) $\exists X_o \exists Y_o \exists T_o\ \forall y \forall x \forall z(\ (A'[X_o z,y,z] \wedge T_o z)\quad (\neg A'[x,Y_o xz,z] \wedge \neg T_o z)\ )$

celle de $\neg\neg\exists zAz$ est

(2) $\exists X_1 \exists Z_1 \forall Y\quad A'[\ X_1 Y, Y(X_1 Y, Z_1 Y), Z_1 Y]$

et celle de $\exists zAz$ est enfin

(3) $\exists X_2 \exists Z_2 \forall y'\ A'[X_2, y', Z_2]$

Il nous faut trouver X_2 et Z_2 en fonction de X_o, Y_o, T_o, X_1, Z_1 et x,y,z, et Y en fonction de X_o, Y_o, T_o, X_1, Z_1, et y', tels que

$$(\ A'[X_o z,y,z] \wedge T_o z\ ) \vee\ (\neg A'[x,Y_o xz,z] \wedge \neg T_o z)\ \wedge\ A'[\ X_1 Y, Y(X_1 Y, Z_1 Y), Z_1 Y] \rightarrow$$
$$\rightarrow\ A'[\ X_2, y', Z_2]$$

On pose

$Z_2 = Z_1(Y_o) = z$

$X_2 = X_o(Z_2) = X_o(Z_1(Y_o))$

$x = X_1(Y_o)$

$y = y'$

$Y = Y_o$

La vérification est alors immédiate, car il s'agit d'un exemple de tautologie.

SECTION 7 : NO COUNTEREXAMPLE INTERPRETATION

Soit A un énoncé de HA_n^c; on suppose A arithmétique, et en forme prénexe, puisque HA_n^c est un système classique.

Soit $\exists x_1 \ldots \exists x_n \; A'(x_1,\ldots,x_n,f_1,\ldots,f_m)$ la forme de Herbrand de A, où $f_1,\ldots,f_m$ sont des nouvelles lettres de fonction.

On sait que, dans le calcul des prédicats classique,

$A \rightarrow B$, où B est la forme de Herbrand de A, est prouvable.

Supposons avoir adjoint à l'interprétation fonctionnelle celle des f_i, par des lvar arbitraires.

Alors, si A est prouvable classiquement, B l'est aussi, et donc (en regardant ce qui reste de la $\neg\neg$-interprétation dans ce cas) $\neg\neg B$ est prouvable dans HA_n.

Donc $\neg\neg B$ est interprétable, et comme l'interprétation de $\neg\neg B$ est la même que celle de B, on obtient

$A'(t_1,\ldots,t_n,f_1,\ldots,f_m)$, où les t_i ne dépendent que des f_j. Après lambda abstraction, il vient

$$A'(T_1(f_1,\ldots,f_m),\ldots,T_n(f_1,\ldots,f_m),f_1,\ldots,f_m) \qquad (1)$$

Ainsi, nous avons prouvé le

THEOREME 10 (Kreisel)

de la forme d'Herbrand

Si $A'(x_1,\ldots,x_n,f_1,\ldots,f_m)$ est la partie sans quantificateur d'un énoncé arithmétique prouvable dans HA_n^c, on peut trouver des fcl closes $T_1,\ldots,T_n$, telles que

$$VI \quad A'(T_1f_1\ldots f_m,\ldots,T_nf_1\ldots f_m,f_1,\ldots,f_m)$$

avec les T_i dans OF_n .

REMARQUE

Le résultat ci-dessus est encore vrai si A est construit à partir de symboles supplémentaires dénotant des opérations primitives récursives dans une extension par définition.

L'interprétation du théorème 10 est la suivante :

dire que A est faux signifie qu'il existe des fonctions de Skolem $f_1,\ldots,f_m$ telles que $\forall x_1 \ldots \forall x_n \neg A'(x_1,\ldots,x_n,f_1,\ldots,f_m)$; dire maintenant que A est vrai, soit A n'est pas faux, veut dire qu'on peut trouver des"fonctions"de Skolem $T_1,\ldots,T_n$, qui, à tout contre exemple possible $(f_1,\ldots,f_m)$ à A, associent une suite $(x_1,\ldots,x_n)$ qui montre la fausseté du contre-exemple, c'est à dire telle que (1) soit vrai.

Le théorème assure que si A est de plus prouvable, les T_i peuvent être choisies dans OF_n, et "vérité" remplacé par VI.

Une autre manière d'énoncer le théorème 10 est de dire qu'il s'agit là d'une généralisation du théorème de Herbrand pour les théories arithmétiques; le théorème de Herbrand, énoncé dans notre langage dirait que $t_1,\ldots,t_n$ sont des termes construits à l'aide de $f_1,\ldots,f_m$ (au sens du calcul des prédicats) et de D, appliqué à des énoncés atomiques, tel que $VIF \models A[t_1,\ldots,t_n,f_1,\ldots,f_m]$. (Il est d'ailleurs à remarquer, qu'en l'absence de récursion, les seuls termes $t_1,\ldots,t_n$ que l'on puisse former sont précisément de cette forme).

ANNEXE : INTERPRETATION A L'AIDE DES VARIANTES

Les variantes de (G 3) et (G 4) se révèlent être équivalentes à ces dernières; cependant l'introduction de ces variantes n'est pas complètement inutile, puisqu'il nous permet alors d'affirmer, au moyen précisément de l'équivalence que (G 10) et (G 11) dont la structure peut paraître problématique, ne sont en fait que la manière la plus naturelle d'étendre l'interprétation aux ordres supérieurs.

Pour montrer l'équivalence, il suffit, en supposant A et B interprétés de la même manière, de montrer la validité de $(A \wedge B) \leftrightarrow (A \wedge B)$ et $(A \vee B) \leftrightarrow (A \vee B)$, à l'aide de l'interprétation habituelle de l'équivalence, la formule de droite étant obtenue par une traduction ** à l'aide de A' et B', celle de gauche par * à l'aide de A' et B'.

1. Equivalence pour la conjonction

$(A \wedge B)^*$ est $\exists x \exists x' \forall y \forall y' \quad A'(x,y) \wedge B'(x',y')$ (on oublie $\underline{Z}$)

$(A \wedge B)^{**}$ est $\exists X \forall Y \quad \oplus yy'(A'(\pi^1 X,y))(B'(\pi^2 X,y'))\, Y$, soit encore

$$\exists x \exists x' \forall Y \quad \oplus yy'(A'(x,y))(B'(x',y'))\, Y$$

Alors, si $Y_0 = \oplus yy'(y)(0')\, Y$, $\quad Y_1 = \oplus yy'(0)(y')\, Y$:

$$A'(x,Y_0) \wedge B'(x',Y_1) \to \oplus yy'(A'(x,y))(B'(x',y'))\, Y \text{ est VIF.}$$

Réciproquement, soit $Y_1 = D(A'(x,y), \pi^2 y, \pi^1 y)$; alors

$$\oplus yy'(A'(x,y))(B'(x',y'))\, Y_1 \to A'(x,y) \wedge B'(x',y') \text{ est VIF.}$$

Ceci montre l'équivalence des deux interprétations de la conjonction.

2. Equivalence pour la disjonction

$(A \vee B)^*$ est $\exists x \exists x' \exists t \forall y \forall y' \; (A'(x,y) \wedge t) \vee (B'(x',y') \wedge \neg t)$

$(A \vee B)^{**}$ est $\exists X \;\forall Y \; (\oplus xx'(A'(x,(\pi^1 Y)x))(B'(x',(\pi^2 Y)x'))\, X)$ soit

$$\exists X \;\forall y \forall y' \; (\oplus xx'(A'(x,yx))(B'(x',y'x'))\, X) \; .$$

Soient $X_o = D(t, \amalg^1 x, \amalg^2 x')$

$Y_o = yx$, $Y_1 = y'x'$

Alors

$$(A'(x,Y_o) \wedge t) \vee (B'(x',Y_1) \wedge \neg t) \rightarrow \oplus xx' \; (A'(x,yx))(B'(x',y'x')) \; X_o$$

est VIF.

Réciproquement, soient

$t_o = \oplus xx' VF \; X.$

$x_o = \oplus xx'(x)(0) \; X$

$x_1 = \oplus xx'(0)(x') \; X$

$Y_o z = y$

$Y_1 z = y'$

Alors

$$\oplus xx'(A'(x,Y_o x))(B'(x',Y_1 x')) \; X \rightarrow (A'(x_o,y) \wedge t_o) \vee (B'(x_1,y') \wedge \neg t_o)$$

est VIF.

<u>REMARQUE</u> dans la définition ** de l'interprétation de la disjonction, que $\pi^1 Y$ et $\pi^2 Y$ dépendent de x et x', n'est pas nécessaire; nous avons donné cette définition sous cette forme uniquement pour la cohérence par rapport à (G 11).

SIXIEME PARTIE :

APPLICATION A LA THEORIE DES ORDRES

SECTION 1 : LES COROLLAIRES EXISTENTIELS

Dans ce qui suit, T désignera un des systèmes de déduction naturelle suivants : PC_n, sPC_n, IPC_n, $sIPC_n$.

1. Formules négatives

Soit $\underline{\alpha}$ une suite finie d'indéterminées dont les ordres ne sont ni 0, ni 1. Ce qui suit est une définition du concept : "A est une formule $\underline{\alpha}$ -négative". Si $\underline{\alpha}$ est une suite vide, on dira que A est négative , au lieu de $\underline{\alpha}$-négative. Nous supposerons tous les énoncés normaux (I.sec.1).

- Si A est atomique, et non de la forme $\beta T_1 \ldots T_n$, où le type de β n'est ni 0 ni 1, et $n \geqslant o$, A est $\underline{\alpha}$ -négative.
- Si A est atomique et n'est pas concerné par la clause précédente, c'est à dire A est $\beta T_1 \ldots T_n$, etc..., nous dirons que A est $\underline{\alpha}$-négative ssi $\beta \not\in \underline{\alpha}$.
- $A \rightarrow B$ est $\underline{\alpha}$-négative ssi B est $\underline{\alpha}$-négative.
- $A \wedge B$ est $\underline{\alpha}$-négative ssi A et B le sont.
- $\forall \alpha A$, où α est d'ordre 0 ou 1 est $\underline{\alpha}$-négative ssi A l'est.
- $\forall \alpha A$, où α n'est ni d'ordre 0, ni d'ordre 1, est $\underline{\alpha}$-négative ssi A est $\underline{\alpha},\beta$ -négative.
- $A \vee B$, $\exists \alpha A$ ne sont pas $\underline{\alpha}$-négatives.

Parmi les énoncés négatifs, il y a donc :
- les négations d'énoncés
- les axiomes (C i) ainsi que la clôture universelle C de leur conjonction
- les prédicats d'extensionalité Ext(α).

Lemme 1

Si A est $\underline{\alpha},\beta$ -négatif, (resp. $\underline{\alpha}$-négatif), $[\beta/T]$ A est $\underline{\alpha}$-négatif (resp. $[\beta/T]$ A est $\underline{\alpha}$-négatif, avec β et T d'ordre 0 ou 1).

Démonstration évidente.

Lemme 2

Soit x une hypothèse dont le type est négatif, a un dégénéré de x, c'est à dire une démontration obtenue à partir de x par une succession d'éliminations; on suppose a normal. Alors, soit le type de a est négatif, soit a est dégénéré minimal d'un b de type $\perp$.

Démonstration

Par induction sur le nombre de dégénrescences minimales utilisées, en considérant la dernière règle, qui, à un b satisfaisant les conditions de la conclusion, associe f b .

Si b est négatif, les cas suivants se produisent

1) fb est b(c); le type de b(c) est alors négatif par définition.

2) fb est $\pi^1 b$; le type de $\pi^1 b$ est négatif par construction.

3) fb est $b\{T\}$; le type de $b\{T\}$ est négatif par le lemme 1.

4) fb est $H^? b$; mais alors la dernière règle utilisée est une $\perp$-élim.

Si b vient par $\perp$-élim, on ne peut pas former de dégénéré normal de b.

Nous dirons qu'un énoncé est <u>légèrement clos</u> si toutes ses variables d'ordre 0 ou 1 sont muettes.

THEOREME 1

Soient A,B,C,$\exists\alpha$D des formules de PC_n, ou sPC_n; on suppose que C est négative; alors si les énoncés suivants sont des théorèmes de PC_n ou sPC_n; $C \to A \vee B$ (1); $C \to \exists\alpha B$ (2), dans le cas de (1), un des deux énoncés suivants est prouvable dans le même calcul :

$C \to A$; $C \to B$; dans le cas de (2), on peut trouver un terme T du langage tel que $C \to D[T]$ soit prouvable dans le calcul.

THEOREME 2

Le théorème 1 est vrai pour IPC_n et $sIPC_n$, sous réserve que les énoncés $A,B,C,\exists\alpha D$ soient légèrement clos.

Démonstration

1) Pour PC_n et sPC_n, considérons la dernière règle d'une déduction de $A \vee B$ ou de $\exists\alpha D$, sous l'hypothèse C; nous pouvons évidemment supposer la déduction normale.

- la dernière règle est une introduction; alors, dans le cas de (1) on a une déduction de A, ou de B sous l'hypothèse C, dans le cas de (2) une déduction de $D[T]$ sous l'hypothèse C; dans les deux cas, on obtient le résultat désiré.

- sinon la déduction est nécessairement un dégénéré d'une variable, correspondant à l'hypothèse C. Deux cas se présentent en accord avec le lemme 2 : + la conclusion est négative, ce qui est absurde, ou + la dernière règle est une $\perp$-élim. . Mais dans ce cas, on peut la remplacer par les $\perp$-élim : $\dfrac{\perp}{A}$ ou $\dfrac{\perp}{A[T]}$ où T est un terme standard de l'ordre de .

2) Pour IPC_n et $sIPC_n$, on procède similairement; mais on prend garde à ce que la fcl qui représente la déduction n'ait pas d'indéterminée libre d'ordre 0 ou 1, ce qui est possible, vu les hypothèses. Après normalisation, la déduction aura toujours la même propriété. La démonstration se fait alors suivant les même lignes, en remarquant qu'une déduction normale qui serait un dégénéré d'un IND_α^τ ab contiendrait nécessairement une ind. libre d'ordre 0 ou 1.

REMARQUE : le raisonnement ci-dessus n'est possible, à strictement parler, qui si on suppose que les seuls objets clos d'ordre 0 sont les $\bar{n}$, ce qui n'est pas vrai quand on dispose de + et .; un moyen de résoudre cette petite difficulté est, par exemple, de remplacer certains (C i) par des règles de réduction sur les opérateurs d'ordre 0, que l'on rajoute ensuite aux OR i, par exemple $a + \bar{0} \vdash a$

$a + Sb /= S(a+b)$; $a \,.\, \bar{o} /= \bar{o}$; $a \,.\, Sb /= (a \,.\, b) + a$.

2. Les corollaires existentiels

THEOREME 3

Dans HA_n (ou HA_n+Extensionalité), les propriétés suivantes sont vraies

1) si $\vdash A \rightarrow B \vee C$, alors $\vdash A \rightarrow B$ ou $\vdash A \rightarrow C$.

2) si $\vdash A \rightarrow B \vee C$, alors $\vdash (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$.

3) si $\vdash A \rightarrow \exists \alpha D$, alors on peut trouver T tel que $A \rightarrow D[T]$

4) si $\vdash A \rightarrow \exists \alpha D$, alors $\vdash \exists \alpha (A \rightarrow D)$

où A est un énoncé négatif; de plus, dans 1) et 3) A,B,C, D sont supposés un peu clos.

Démonstration

1) et 3) sont une conséquence immédiate du théorème 2, vu que la conjonction des axiomes (C i) et Ext sont négatifs.

2) et 4) viennent de 1) et 3) pour des énoncés un peu clos. Sinon, il faut procéder comme suit, par exemple pour 4) qui implique 2):

Soit $\underline{\beta}$ la suite des variables d'ordre distinct de 0 libres dans A et D. Soit $\underline{x}$ la suite des variables d'ordre 0 libres dans ces deux énoncés. Par hypothèse, nous disposons d'une preuve dans HA_n de $\forall \underline{x} \forall \underline{\beta} (A \rightarrow \exists \alpha D)$; cette preuve n'utilise qu'un nombre fini d'axiomes, et soit donc $HA_n^{(i)}$ un sous-système fini dans lequel cet énoncé est démontrable. Pour chaque suite $\underline{t}$ de termes clos d'ordre 0 (numéraux), on peut donc prouver dans $HA_n^{(i)}$ $\forall \underline{\beta} (A [\underline{t}] \rightarrow \exists \alpha D [\underline{t}])$, et donc aussi (les théorèmes précédents s'appliquent aussi aux sous-systèmes finis) $\forall \underline{\beta} \exists \alpha (A [\underline{t}] \rightarrow D[\underline{t}])$. Pour montrer que ce dernier énoncé est prouvable dans $HA_n^{(i)}$ pour tout $\underline{t}$, nous avons besoin :

- de propriétés élémentaires des déductions sans coupures
- du théorème de réduction pour $IPC_n^{(i)}$, formalisable dans HA_n

Nous pouvons donc montrer dans HA_n l'énoncé suivant : "pour toute suite close $\underline{t}$, $\forall \underline{\beta} \exists \alpha (A [\underline{t}] \rightarrow D[\underline{t}])$ est prouvable dans $HA_n^{(i)}$".

Nous utilisons maintenant

Nous utilisons maintenant le schéma de réflexion pour $HA_n^{(i)}$ dans HA_n, et nous obtenons $HA_n \vdash \forall \underline{x} \forall \underline{\beta} \exists \alpha (A \to D)$, ce qui montre 4).

Le cas avec extensionalité est en fait un cas particulier, car si $\underline{\beta}$ est défini comme plus haut, si $A \to \exists \alpha D$ est prouvable dans HA_n + Exten., $A^* \wedge \underline{\mathrm{Ext}(\beta)} \to \exists \alpha D^*$ est aussi prouvable, et on utilise alors la négativité de Ext.

<u>COROLLAIRE</u>

1) Si $B \vee C$ est prouvable dans HA_n (HA_n+Ext), alors B est prouvable, ou C est prouvable. (B et C un peu clos)

2) Si $\exists \alpha B$ est prouvable dans HA_n (HA_n+Ext), alors on peut trouver T tel que $B[T]$ soit prouvable. ($\exists \alpha B$ un peu clos)

SECTION 2 : CLOTURE POUR LA REGLE DE MARKOV

Si (MPR) n'est pas dérivable dans HA_n, la règle dérivée

$$\frac{\forall z\,(A\,z \vee \neg A\,z) \qquad \neg\neg\exists z\,A\,z}{\exists z A\,z} \quad \text{(MR)}$$

est valide, c'est à dire, dès que les prémisses sont démontrables, la conclusion l'est aussi.

1. Cas des énoncés clos

Nous supposons dans ce qui suit $\exists zAz$ clos.

Par V.6. et le théorème de réduction pour OF_n, nous obtenons un n tel que $(A\bar{n})^*$ soit valide.

D'autre part nous avons $\vdash (A\bar{n} \vee \neg A\bar{n})$, d'où par le corollaire du théorème 3, $\vdash A\bar{n}$ ou $\vdash \neg A\bar{n}$.

Si $\vdash A\bar{n}$, nous avons ce que nous cherchions.

Si $\vdash \neg A\bar{n}$, alors $(\neg A\bar{n})^*$ est valide, une contradiction.

2. Cas des énoncés dont les variables d'ordre distinct de 0 sont muettes

Supposons que A s'écrive $Az\underline{y}$, où $\underline{y}$ est une suite de variables d'ordre 0.

Soit $HA_n^{(i)}$ un sous-système fini dans lequel les deux prémisses de (MR) sont dérivables; alors $\forall z(Az\underline{t} \vee \neg Az\underline{t})$ et $\neg\neg\exists zAz\underline{t}$ sont aussi dérivables dans $HA_n^{(i)}$ pour tout $\underline{t}$ clos.

Soit d'autre part $OF_n^{(j)}$ un sous-système fini de OF_n dans lequel $HA_n^{(i)}$ s'interprète.

Le résultat énoncé en (1), pour chaque $\underline{t}$, est démontrable à l'aide des résultats suivants :

le théorème de réductibilité pour $HA_n^{(i)}$

le théorème de réductibilité pour $OF_n^{(j)}$

tous deux démontrables dans un sous-système fini $HA_n^{(k)}$.

Ce qui précède est une preuve informelle du théorème :

"Pour chaque $\underline{t}$, $\exists zAz\underline{t}$ est démontrable dans $HA_n^{(k)}$", la démonstration étant formalisable dans l'arithmétique intuitionniste, et donc dans HA_n. Par réflexion, on obtient

$HA_n \vdash \forall \underline{y} \exists zAz\underline{y}$, ce qui est le résultat cherché.

3. Cas général

Si nous pouvons ramener (MR) pour $\exists zAz$ un peu clos au cas où $\exists zAz$ est clos, en utilisant des méthodes formalisables dans HA_n, nous pourrons utiliser (2), en remplaçant $\exists zAz\underline{y}\beta$ par $\forall \beta \exists zAz\underline{y}\beta$.

Supposons donc $\exists zAz\beta$ un peu clos. Alors $At\beta \vee \neg At\beta$ est dérivable, et donc, soit $At\beta$ soit $\neg At\beta$ est dérivable, c'est à dire que $\forall \beta At\beta$ ou $\forall \beta \neg At\beta$ est dérivable, pour t clos.

Un argument de réflexion nous assure alors que $\forall z(\forall \beta Az\beta \vee \forall \beta \neg Az\beta)$ et donc a fortiori $\forall z(\forall \beta Az\beta \vee \neg \forall \beta Az\beta)$ est dérivable, ce qui ramène le problème de A au problème de $A' = \forall \beta Az\beta$.

En effet, on a alors l'équivalence $\forall \beta \exists zAz\beta \leftrightarrow \exists z \forall \beta Az\beta$. Un des sens de l'équivalence est évident. Pour l'autre, supposons $\forall \beta \exists zAz\beta$, et soit β; alors $\exists zAz\beta$, et soit alors z tel que $Az\beta$; si $\forall \beta \neg Az\beta$, on a une contradiction, d'où $\forall \beta\, Az\beta$ et donc $\exists z \forall \beta Az\beta$.

Remarquons que ce qui précède s'applique aussi au cas où les prémisses sont dérivées à l'aide de l'extensionalité, en utilisant une traduction de l'extensionalité et le fait que Ext est négative.

4. Résultat

THEOREME 4

HA_n (HA_n+Ext) sont closes par rapport à MR.

COROLLAIRE

Si HA_n^c désigne le système classique correspondant à HA_n, les mêmes numéros de fonctions récursives partielles peuvent être montrés être des indices de fonctions totales dans les deux systèmes.

Démonstration du corollaire

Soit T_1 le prédicat de Kleene. Par $\neg\neg$-traduction dans une extension par définition contenant T_1, on obtient $HA_n^c \vdash \forall x \neg\neg \exists y T_1(e,x,y)$, si e est récursif-prouvable dans HA_n^c , d'où par (MR), on a

$\vdash \forall x \exists y T_1(e,x,y)$.

REMARQUE

La stabilité par (MR) ne s'étend pas au cas où les prémisses de la règle sont démontrées à l'aide d'une hypothèse négative. Par contre des transformations évidentes sur les prémisses donnent la stabilité de la règle pour une hypothèse supplémentaire décidable, c'est à dire un B tel que $\vdash B \vee \neg B$.

SECTION 3 : PROUVABILITE DES ENONCES RECURSIFS PRIMITIFS

THEOREME 5

Soit $T(x_1,\ldots,x_n)$ un énoncé récursif primitif. Alors T est prouvable dans HA_p ssi on peut trouver B et t dans OF_p tels que

$$VIF \models B[t,\bar{o}] \rightarrow T$$
$$VIF \models B[\bar{o},z]$$
$$VIF \models B[x,Sz] \rightarrow B[Sx,z]$$

On peut supposer que B ne dépend que de $x_1,\ldots,x_n,x$ et z, et que t ne dépend que de $x_1,\ldots,x_n$. De plus, par les résultats de IV.Annexe, on peut aussi supposer B,t dans F_p.

Démonstration

Dans un sens, c'est le théorème 6 de la quatrième partie. L'autre sens de l'équivalence est obtenu en remarquant que VI est suffisant pour l'interprétation fonctionnelle de HA_p, et que, dans une extension par définition contenant T, l'interprétation fonctionnelle de T ne change pas.

Le théorème 5 peut **avoir** des applications, non pas tant en permettant de trouver de nouveaux théorèmes de HA_p, mais surtout, sous réserve de posséder quelques informations plus substantielle sur ce qui est possible, et ce qui n'est pas possible dans VIF, de trouver des énoncés qui ne sont pas démontrables dans HA_p. Il semble d'autre part plausible, qu'une formulation analogue à VIF, exprimée dans HRO (lui-même exprimé dans le lambda-calcul) permette de caractériser la vérité des formules purement universelles.

REFERENCES

Barendregt,H.P.,

1971 Some extensional term models for combinatory logic and lambda-calculi. Thèse.

Gentzen,G.

1969 The collected works of Gerhard Gentzen, Editor Szabo. (North Holland, Amsterdam)

Girard,J.Y.

1970 Une extension de l'interprétation de Gödel à l'analyse, et son application à l'élimination des coupures dans l'analyse et dans la théorie des types. (Proc.2nd.Scand.Log.Symp., North Holland,Amsterdam) editor Fenstad

1971 Quelques résultats sur les interprétations fonctionnelles. (A paraître dans Proc.Cambridge Summer School,North Holland, Amsterdam) editors Gandy & Mathias

Gödel,K.

1958 Uber eine bisher noch nicht Erweiterung des finiten Standpunktes. Dialectica 12

Hindley,J.R.

1969 The principal type-scheme of an object in combinatory logic. Trans.Am.Math.Soc. vol. 146.

Howard,W.A.

1969 The formulae-as-types notion of construction. (Non publié)

Howard,W.A. & Kreisel,G.

1966 Transfinite induction and Bar induction of type 0 and 1 and the role of continuity in intuitionistic mathematics. J.S.L. 31.

Jervell,H.R.,

1970 A normalform in first order arithmétic. Proc.2nd.Scand. Log.Symp., North Holland, Amsterdam, editor Fenstad.

Kleene,S.C.

1952 Introduction to metamathematics. North Holland, Amsterdam

Kreisel,G.

1959 Interpretation of classical analysis by means of constructive functionals of finite type. Constructivity in Mathematics, North Holland, Amsterdam.

1968 Church's thesis : a kind of reducibility axiom for constructive mathematics. Intuitionism and proof theory, North Holland, Amsterdam, editors Myhill, Kino & Vesley.

1970 A survey of proof theory II. Proc.2nd.Scand.Log.Symp., North Holland, Amsterdam, editor Fenstad.

Kreisel,G. & Troelstra,A.S.

1970 Formal systems for some branches of intuitionistic analysis. Annals of Mathematical Logic, Vol.1, nº3. North Holland,Amsterdam

Kreisel,G. & Levy,A.

1968 Reflection principles and their use for establishing the complexity of axiom systems. Zeitschrift math.Logik und Grundlagen der Mathematik 14.

Martin-Löf,P.

1970 Hauptsatz for the theory of species. Proc. 2nd.Scand.Log. Symp., North Holland, Amsterdam, editor Fenstad.

1970 A Hauptsatz for the theory of iterated inductive definition Proc.2nd.Scand.Log.Symp., North Holland,Amsterdam, editor Fenstad.

1970 B A construction of the provable well-orderings of the theory of species. (non publié)

1970 C Hauptsatz for the theory of types. (Non publié)

1971 A theory of types (Non publié)

Prawitz,D.,

1965 Natural deduction, Almqvist & Wiksell, Stockholm.

1968 Some results for intuitionistic logic with second order quantification rules. Intuitionism and proof theory, North Holland, Amsterdam, editors, Myhill,Kino,& Vesley.

1970 Ideas and results of proof theory. Proc.2nd.Scand.Log.Symp. North Holland, Amsterdam, éditor Fenstad.

Shoenfield,J.R.,

1967 Mathematical Logic, Addison Wesley,

Spector,C.,

1962 Provably recursive functionals of analysis : a consistency proof by an extension of principles formulated in current intuitionistic mathematics. Recursive function Theory, Proc.Symp.Pure Math.,vol V. A.M.S., Providence,R.I.

Tait,W.W.,

1966 A non constructive proof of Gentzen's Hauptsatz for second order predicate calculus. Bull.Am.Math.Soc. 72.

1967 Intentional interpretation of functionals of finite type. J.S.L. 32.

1970 Normal form theorem for Bar recursive functions of finite type. Proc. 2nd. Scand. Log. Symp. , North Holland, Amsterdam, editor Fenstad.

Takahashi,M.,

1967 A proof of cut-élimination theorem in simple type theory. Journ.Math.Soc.Jap. 19.

Takeuti,G.,

1953 On a generalized logical calculus. Jap.Journ.Math. 23.

1967 Consistency proofs of subsystems of classical analysis. Ann.of Math. 86.

Troelstra, A.S.,

1968 Principles of Intuitionism. Springer-Verlag.

1970 Notions of realizability. Proc.2nd.Scand.Log.Symp., North-Holland, Amsterdam, editor Fenstad.

1971 Notes on intuitionistic second order arithmetic, à paraître dans Proc.Cambridge Summer School, North Holland, Amsterdam, editors Gandy & Mathias.

Yasugi, M.,

1963 Intuitionistic analysis and Gödel's interpretation. Jour.Math.Soc.Jap. 15 .

ERRATA :

Le "no counter example interpretation" a été introduit par KREISEL en 1952 dans l'article "On the interpretation of non-finitist proofs, I and II, Journal of Symbolic Logic, vol. 16 (1951) et vol. 17 (1952)"

et non pas en 1959 comme nous l'avions affirmé par erreur.