Le théorème de Gödel ou une soirée avec M. Homais

Jean-Yves Girard

L'autre soir au Club, je rencontre Homais près du guéridon ; il me déclare tout de go qu'il ne se représente pas à la mairie d'Yonville.
Homais : Je ne crois plus à la politique et d'ailleurs comme l'a dit Régis Debray, le théorème de Gödel détruit l'idée-même de système.
Moi : Quelle horreur ! C'est quoi au juste ce théorème de Claudel ?
H *(condescendant)* : Gödel, mon cher, pas Claudel..., vous n'avez donc pas lu *Gödel-Escher-Bach* ?
M : Escher, ah oui... *Planète* vers 1963. Et alors quoi ?
H : Et bien voilà ce théorème est péremptoire, il dit qu'un système ne peut pas se justifier lui-même.
M : Un système comment ?
H *(pédant)* : Un système ma-thé-ma-tique, mon cher, une théorie for-melle.
M : Ouf, j'aime mieux ça, on ne craint pas pour son système pileux... excusez cette plaisanterie facile, je veux dire pour son système philosophique !
H : Dé-so-lé mon cher, tous les systèmes, philosophiques, artistiques, politiques... en fait Gödel a démontré que la pensée ne peut se penser soi-même, que notre intelligence est limitée...
M *(dans ma barbe)* : Parle pour toi, vieux ... *(à voix haute)* : On peut quand même améliorer un système, même Windows 95 a un service qui s'occupe des bogues... Pourquoi ne pas faire la même chose avec la philosophie, l'art... ?
H *(triomphant)* : Mais le système amélioré sera aussi imparfait, puisque le théorème de Gödel s'applique à tous les systèmes, et d'ailleurs les versions corrigées de Windows sont tout aussi boguées : vous voyez, il n'y a pas d'espoir.
M : Mais si vous abandonnez la politique, qu'allez vous faire ?
H : De la numérologie. Ça vous étonne, mais pensez un instant que si aucune théorie n'est possible, tout devient possible, d'où la magie, mon cher. Et le premier des magiciens c'est Gödel : il a démontré son théorème avec des nombres magiques. Au fond logicien = magicien, j'attends le *matin des logiciens.*
M : Magie, numérologie, ça fait un peu Paco Rabanne...
H : J'appelle ça de l'*IA*, de l'in-tel-li-gence artificielle.
M : Vous en avez donc besoin ?
H *(pincé)* : Mon ami, sachez que toute propriété a un nombre de Gödel, et qu'il suffit donc de calculer, comme à « Des chiffres et des lettres » pour avoir une réponse à toute question. Bien sûr on utilise un ordinateur pour aller plus vite. *(Coups dans le guéridon.)*
M : Mais vous venez de dire qu'aucun système n'est parfait, votre ordinateur numérologique c'est-y-pas un système ?
H *(marque un temps, puis)* : Vous rendez-vous compte que les mathématiciens ne savent toujours pas diviser par 0. Pour moi ça vaut 7 même si ça fait rire ces

Messieurs… mieux vaut une réponse boîteuse que pas de réponse du tout ! Et puis 7 ça signifie…
M : Bonjour la logique !
H : C'est de la logique non-monotone, c'est à dire non-déductive : $4 : 0 = 7$ mais on n'en déduit pas que $7 \times 0 = 4$.
M : En sorte, votre logique est une espèce de voiture sans moteur.
H *(ricanant)* : Qu'importe ! Si le tableau de bord est en ronce de noyer…
M : Donc si je vous résume, rien ne marche théoriquement, mais dans la pratique on peut faire ce qu'on veut… Quelle idée d'abandonner la politique quand vous aviez un avenir tout tracé à l'Education !
Le guéridon s'agite ; Homais y pose un ordinateur relié à un stéthoscope ; le guéridon se joint à la conversation.
Guéridon : A force de raconter des ♠♠♠ *(mot allemand)*, vous m'avez réveillé.
H *(terrorisé)* : Mon… Monsieur…
G : Gödel, Kurt Gödel, 1906-1978, c'est moi qui ai démontré les deux théorèmes d'incomplétude en 1931, et j'ai rarement entendu un tel tissu de ♠♠♠ positivistes, vous n'en avez raté aucune.
H : Vous le tombeur des théories… vous qui avez montré les limitations de la pensée humaine…
G : Sérions les problèmes : j'ai montré certaines limitations des processus formels et ces limitations s'appliquent à toute approche déductive. Ainsi, elles vous empêchent de mener à bien votre projet d'IA.
H : Je me contente de donner des réponses, hors de tout système formel ; et d'abord on est en République !
M : On pourrait répondre toujours « oui » : c'est simple et on ne vexe personne.
G (*embarrassé)* : Je n'avais pas pensé à une solution aussi radicale, car mon théorème ne s'applique que si l'on répond correctement à un certain nombre de questions de base, ce qui est le cas des systèmes formels courants.
H (*triomphant)* : Très bien, on va répondre correctement aux questions de base, puis on complétera mécaniquement : on se donne un système formel $\mathcal{T}$, et quand A n'est pas démontrable dans $\mathcal{T}$, on rajoute sa négation $\neg A$. Notre logique est basée sur l'idée que ne pas savoir, c'est savoir que non.
M : À un passage piétons, l'ampoule rouge ne s'allume plus ; vous traversez donc ?
G : Messieurs… C'est justement ce principe que mon premier théorème d'incomplétude réfute. Comment savoir, quand une recherche formelle n'en finit plus, qu'elle ne va pas donner de réponse plus tard, dans une heure, dans un an, dans un siècle ? C'est simple et irréfragable : il n'y a aucun moyen de savoir.
M : Monsieur Saint Thomas, vous exagérez ! On ne saurait donc que ce qu'on a vérifié *de visu*, sans pouvoir prédire.
G : On peut parfois prévoir, mais au cas par cas, et ça demande de l'intelligence. Mais toute recette systématique fera forcément des erreurs.
H *(bougon)* : Je vois que vous vous opposez au progrès technologique. Revenons aux systèmes et à l'intelligence humaine. Vous avouerez que les grrrandes idées en prennent un coup avec votre deuxième théorème.
G : Pour autant que ces théories se présentent formalisme précis, ce qui n'est jamais le cas hors des mathématiques…
M : Les mathématiciens que je connais ne sont pas si précis que ça et d'ailleurs ils écrivent en Anglais, qui n'est pas un langage formel.
G : C'est vrai, mais la formalisation totale des mathématiques est une possibi-

lité de principe... devenue réalité grâce à l'ordinateur.
H *(il sursaute)* : Je ne comprends plus rien du tout, vous m'avez cloué le bec sur l'IA, et maintenant vous revenez sur vos dires.
G : Que non pas ! On dispose de logiciels capables d'écrire complètement une démonstration formelle à partir du langage « humain ». Mais ils n'inventent pas : la seule intelligence ici est celle du démonstrateur et aussi celle du concepteur du logiciel.
H : En IA, on est quand même plus avancé : H. Simon a fabriqué un logiciel qui a retrouvé tout seul une des lois de Kepler.
G : Kepler m'a dit que le plus dur et de loin, ce n'était pas de trouver la loi à partir des données numériques, mais de penser à analyser ces données-là et pas d'autres. Il aimerait bien que l'ordinateur retrouve aussi la quatrième loi, abandonnée, celle qui relie les planètes et les polyèdres réguliers.
H : Kepler n'apprécie donc pas le travail de Simon ?
G : Non il croit même qu'il a retrouvé la loi avant sa machine.
H : D'accord. Donc, l'incomplétude serait liée à la précision du langage ?
G : Et c'est pour ça qu'on ne voit guère comment l'appliquer à la politique, à la peinture, à la poësie. Je vous rappelle que le grand Spinoza voulait faire une *Ethique* purement formelle : la première page ressemble à des mathématiques bourrées d'erreurs, quant à la suite, n'en parlons pas.
H : Mais vous avez associé des nombres aux énoncés, quand vous avez eu ce projet d'une philosophie formelle conçue comme une sorte d'arithmétique ?
G : Erreur, c'est Leibniz qui a eu cette idée.
H : Que vous avez reprise.
G (*soupir*) : Pas vraiment, Leibniz tirait plutôt dans la direction de la Kabbale, et d'ailleurs comme beaucoup de commentateurs, vous croyez que mes nombres ont une signification. Désolé, ils n'en ont aucune ; c'est une simple énumération sans propriété remarquable. Mon premier théorème d'incomplétude n'est qu'une propriété des énumérations déjà remarquée par Cantor au XIX^e siècle. C'est une forme développée du paradoxe du Menteur, ou du Crétois.
H : Votre deuxième théorème d'incomplétude dit qu'une théorie ne peut pas parler d'elle-même, qu'on doit faire un saut à un niveau « méta ».
G : Le second théorème dit que la formule qui énonce la cohérence d'une théorie $\mathcal{T}$ n'est pas démontrable dans $\mathcal{T}$ elle-même... ce qui sous-entend que c'est une formule de $\mathcal{T}$, autrement dit que $\mathcal{T}$ peut parler d'elle-même. C'est d'ailleurs Hilbert qui a découvert, vers 1900, que les mathématiques pouvaient parler d'elles-mêmes. Les nombres de Gödel qui vous impressionnent tant ne sont qu'une manière d'expliciter cette internalisation, cette réflexion.
H : Bon, bon... on peut parler de soi-même, mais on ne peut pas se connaître soi-même, on ne peut pas être son propre « méta ». Admettez que cette idée vaut bien au-delà de votre étroit cadre formel !
G *(malicieux)* : D'autant plus que la formule de cohérence est de peu d'intérêt et qu'il a fallu attendre les années 1970 pour trouver des exemples d'incomplétude plus intéressants. Hors mathématiques, c'est plus facile : « on ne peut pas revisser ses lunettes en les gardant sur le nez » nous dit le second théorème ; ou encore « le cadre du tableau n'est pas le tableau »... Mais il ne faudrait pas oublier que les lunettes sont faites pour voir, pas pour être revissées...
M : Quant à ceux qui déplacent le problème de la toile au cadre, c'est sans doute plus de l'incompétence que de l'incomplétude !
H : Ne persiflez par l'art moderne mon ami. Chaque école annonce la suivante

qui elle-même en préfigure une autre, dans un tourbillon...

G : Système, puis méta-système, puis méta-méta-système etc. Alors les lunettes de rechange sont des méta-lunettes... Ce mot grec qui veut dire « à côté, après » a pris une signification perverse. Il cache plus qu'il n'explique.

H : Mais la réalité préexistante au formalisme, c'est ça aussi le « méta »!

G : C'est le point de vue réaliste de Tarski, dominant de nos jours : un monde externe stable, dont nous sommes à la fois partie et observateur. Une formule est donc vraie ou fausse (notion absolue, réalisme oblige), et démontrable, réfutable, ou ni l'une ni l'autre (notion relative à une théorie $\mathcal{T}$). Mon premier théorème donne un énoncé vrai mais non démontrable dans $\mathcal{T}$, le second théorème donne un énoncé plus particulier : la cohérence de $\mathcal{T}$.

H : Vous êtes quand même passé à côté du théorème de Tarski, celui qui dit que la vérité n'est pas définissable dans $\mathcal{T}$.

G *(petit rire)* : Si on veut. En fait, quand j'ai commencé mon travail, il allait de soi que vérité et prouvabilité étaient identiques. J'ai donc défini formellement la vérité au moyen de la prouvabilité, et réutilisé le vieil argument de Cantor pour trouver une contradiction dans $\mathcal{T}$. Alors seulement, j'ai compris que j'avais en fait démontré la contradiction de l'hypothèse « vrai=prouvable », d'où mon premier théorème. Tarski a « retrouvé » cette version primitive de mon théorème quelques années après, ça n'a pas dû trop le fatiguer.

H : Vous êtes bien dur contre Tarski.

G : La principale force du tarskisme c'est sa platitude, une platitude qui correspond au rationalisme occidental. Pourtant, on a beau parler de réalité mathématique, on ne manipule jamais que des systèmes : la seule référence devrait donc être interne. Au fond, la complétude et l'incomplétude sont des propriétés internes, ne référant à un aucun monde extérieur préexistant. Mais tout cela demande une réflexion profonde qui sera celle du siècle prochain.

M : Qui pourrait ainsi corriger le positivisme de la logique du XX^e siècle.

G : Espérons-le. D'ailleurs tout n'est pas à jeter dans la logique du XX^e siècle. Prenons Hilbert : son programme, que mon théorème réfute, était un programme de justification interne des mathématiques, par des démonstrations de cohérence. On peut le voir comme un programme réductionniste inspiré par un scientisme très germanique, mais on peut aussi le voir comme une tentative d'échapper au réalisme, à la vérité. La cohérence formelle est une forme d'immanence, malheureusement, c'est l'immanence du pauvre.

H : D'accord, d'accord... et la limitation de l'intelligence humaine ?

M : M. Gödel vous dit que le théorème limite les systèmes formels ; donc vous voyez votre intelligence comme un système formel, comme une machine ?

H *(pompeux)* : En effet, j'ai l'impression que tout ce que je fais devrait être fait par une machine, qui pourrait d'ailleurs parler aussi bien à ma place.

G : D'où je suis, j'ai du mal à dire si vous existez ou si vous êtes la création virtuelle d'un GAT (Générateur Automatique de Truismes). L'intelligence n'existe pas sans l'erreur, voire l'obstination dans l'erreur ; mais qui prendrait le risque de doter un ordinateur de ce type de psychologie ? Quant au théorème d'incomplétude, il n'a sûrement pas prévu les théories coléreuses...

H : Alors, il ne dit rien ce théorème ?

G : Il énonce une impossibilité primaire parmi bien d'autres.

M : Si j'ai bien compris, il n'y a pas moyen de lire le « Grand Livre de la Vérité » tenu par M. Métatarski, pas plus que le « Grand Livre des Positions Initiales » pour prévoir la roulette.

G : La mécanique quantique va jusqu'à nier l'existence de ce Livre des Positions : au-delà d'un certain degré de précision, la notion-même de position perd son sens. Il est possible que le Livre de la Vérité n'ait pas plus de réalité.
H : Finalement, votre truc sert seulement à casser la baraque aux autres ?
G : C'est vrai, ça n'indique pas la voie, ça montre seulement où ne pas aller : ça ne vous suffit donc pas ?
Excédé, Homais coupe son ordinateur brutalement (ce qui n'est pas conseillé).
H : Vous savez quoi ? Je crois que ce n'était pas Gödel ; si les guéridons se mettent à mentir maintenant !

LES PARADOXES LOGIQUES

Le plus vieux paradoxe connu est celui du Crétois : « Les Crétois sont menteurs ». Ce n'est pas vraiment un paradoxe, car le Crétois, bien que menteur a pu, pour une fois, dire la vérité, ou encore il y a un autre Crétois qui n'est pas menteur. On n'obtient un vrai paradoxe qu'avec un seul Crétois et un seul énoncé : « Je mens » (sous-entendu : ce que je dis est un mensonge). Le paradoxe du menteur n'est pas un paradoxe mathématique, mais il est à la base de la *diagonalisation*, à l'œuvre dans les paradoxes de Cantor, de Russell et dans le premier théorème d'incomplétude.
Cantor a démontré qu'on ne peut pas énumérer tous les ensembles d'entiers : en effet, prenons une telle énumération X_n ($m \in X_n$ veut donc dire que l'entier m appartient au n^e ensemble) et considérons l'ensemble $Y = \{m; m \notin X_m\}$ des entiers qui n'appartiennent pas à l'ensemble de même numéro ; cet ensemble Y doit être égal à un des X_n, disons X_N, mais $N \in X_N \leftrightarrow N \in Y \leftrightarrow N \notin X_N$. La diagonalisation, c'est faire $m = n$ dans $m \in X_n$.
On retrouve la diagonalisation dans le paradoxe de Russell (1902) : soit A l'ensemble des ensembles qui ne s'appartiennent pas, $A = \{x; x \notin x\}$, alors A s'appartient si et seulement si il n'est pas élément de lui-même, $A \in A \leftrightarrow A \notin A$. Ce paradoxe est le point de départ de la crise des fondements (voir p. 6).
Il existe de nombreuses paraphrases du résultat de Russell : par exemple, on ne peut faire un catalogue des catalogues qui ne se mentionnent pas eux-mêmes.
Dans le même ordre d'idées, le paradoxe de Richard (1905) considère : « le plus petit entier qu'on ne peut pas définir en moins de cent lettres », qui définit un entier en moins de cent lettres. Il ne s'agit pas d'un paradoxe mathématique, car on serait bien embarrassé pour définir le mot « définir » ; mais un peu de l'esprit du paradoxe de Richard passe dans le théorème d'incomplétude. Dans le même genre, le paradoxe de Queneau considère le premier entier non-intéressant, pour remarquer qu'il est intéressant... à ce titre.
Le premier théorème d'incomplétude, c'est le paradoxe de Cantor appliqué à l'énumération des théorèmes (énoncés prouvables) de $\mathcal{T}$ (voir p. 7). De nombreuses tentatives ont été faites pour passer outre, il suffisait de torturer un peu la logique, pensait-on... De fait, le premier théorème est plus robuste que le second, car il ne suppose pas vraiment que $\mathcal{T}$ soit un système logique. Par exemple, le théorème nous dit qu'il n'y a pas d'algorithme pour détecter les « boucles », i.e. la non-terminaison des calculs : l'existence d'un tel algorithme est équivalente à celle d'une algorithmique sans boucle (si on peut les détecter, on peut les éliminer). Soit f_n une énumération des algorithmes qui définissent des fonctions des entiers dans les entiers ; $g(n) = f_n(n) + 1$ est alors un algorithme total dont la considération conduit à une contradiction : si $g = f_N$,

alors $f_N(N) = g_N(N) = f_N(N) + 1$. Ce paradoxe nous montre l'absurdité de l'hypothèse « pas de boucle », car en réalité $f_N(N)$ se calcule en $f_N(N) + 1$, qui se calcule en $f_N(N)+2$... et donc il n'y pas d'algorithme testeur de boucle. En d'autres termes, l'absence de résultat n'est en aucune façon assimilable à un résultat, la connaissance ne commute pas à la négation, ou encore « ne pas savoir » et « savoir que non » sont ne peuvent absolument pas être identifiés.
Il n'y a pas de moyen de contourner l'incomplétude, qui n'est même pas une limitation logique, puisque propriété générale des énumérations. C'est un résultat qui déplait, comme une tache sur la logique. Il faut remettre les pendules à l'heure : qui aimerait un monde complet, confucéen, où tout ait été trouvé, où les parents, les supérieurs hiérarchiques, les prêtres,... ont toujours raison ?

LA CRISE DES FONDEMENTS

C'est Leibniz qui eut, développant une idée de Raymond Lulle, l'idée d'un *Calculus ratiocinator* qui représenterait les propriétés par des nombres et permettrait de résoudre toute question par un calcul arithmétique.
À la fin du XIX^e siècle, Cantor introduisit des entités nouvelles, les *ensembles*, d'abord spécialisés dans les questions fines d'analyse (séries de Fourier), puis systématisés au moyen d'un principe unique, le *schéma de compréhension*, qui dit que toute propriété P définit un ensemble, l'ensemble des x tels que $P[x]$, noté $\{x; P[x]\}$. Cette théorie *naïve* des ensembles a une immense qualité : en ramenant toutes les constructions mathématiques (entiers, nombres réels etc.) aux ensembles, elle énonce une unité de principe des diverses parties (analyse, algèbre) des mathématiques, puisqu'on peut (en principe) tout traduire dans un langage unique.
Hélas, Burali-Forti y trouva une contradiction en 1898, simplifiée par Russell en 1902. Pour les mathématiques, le danger était limité, car circonscrit à un domaine nouveau et très marginal ; de plus, vers 1910, Zermelo découvrit la « bonne » version de la théorie des ensembles, encore en usage aujourd'hui. C'est pourquoi l'immense majorité des mathématiciens ignora totalement cette crise, qui fut par contre dramatisée par Hilbert et Brouwer.
Hilbert, chevalier blanc des mathématiques, voulait éliminer les paradoxes au moyen d'une justification interne des mathématiques : on prouverait, par des méthodes mathématiques, que les mathématiques ne sont pas contradictoires. Ça semble douteux de prime abord, mais Hilbert était tout sauf idiot : on ferait la démonstration en utilisant de l'arithmétique très élémentaire, qui n'a pas besoin de justification. Cette formulation du programme de Hilbert est réfutée par le second théorème d'incomplétude : si $\mathcal{T}_0$ est le système d'arithmétique « élémentaire », alors la formule qui énonce la cohérence formelle de $\mathcal{T}_0$ n'est pas démontrable dans $\mathcal{T}_0$. Si l'arithmétique « élementaire » ne se justifie pas elle-même, on ne voit pas comment elle pourrait justifier plus qu'elle !
Une version moins connue du programme de Hilbert, c'est l'élimination de l'infini : si un énoncé A du genre « réfutable » est prouvable en mathématiques (à l'époque ça voulait moralement dire « si A est vrai »), alors, on peut déjà le prouver par les méthodes limitées de $\mathcal{T}_0$. Le premier théorème d'incomplétude réfute cette forme du programme, et plus généralement le projet de Leibniz, dont le prgramme de Hilbert n'est qu'une variante : si les mathématiques élémentaires de $\mathcal{T}_0$ suffisent, on peut « ratiociner » en essayant de démontrer dans

$\mathcal{T}_0$.
Brouwer proposa une voie très originale : changer radicalement les règles de la logique. C'est ainsi que l'*intuitionnisme* refuse le raisonnement par l'absurde (ou de façon équivalente, le principe du tiers-exclu « $A \vee \neg A$ »). Son explication du monde est non-réaliste, avec une tendance au subjectivisme. Brouwer et Hilbert se retrouvent dans le refus du réalisme : Brouwer ne voyait dans les mathématiques qu'une activité de l'esprit, alors que Hilbert n'y voyait que des propriétés formelles du langage hors de toute référence externe (ou du moins avec une référence externe minimale). A part ça, ils étaient sur les positions les plus opposées qui soient : Brouwer était plutôt mystique, alors que Hilbert était un scientiste pur et dur. Avec le temps, et malgré l'échec de leurs programmes respectifs, on trouve quand même beaucoup plus à glaner autour de ces deux figures contestables que dans les allées de la réalité bétonnées par Tarski.

LES THEOREMES D'INCOMPLETUDE

Les nombres de Gödel sont tout simplement une énumération des expressions formelles dans un langage donné. Il suffit donc d'adopter —disons— un ordre lexicographique entre ces expressions pour pouvoir attribuer un nombre de Gödel $\ulcorner A \urcorner$ à toute expression. Ceci relève évidemment de la partie « positive » du programme de Hilbert : pour réaliser le programme, il est nécessaire de pouvoir coder les artefacts logiques : formules, démonstrations, par des entiers, et, effectivement, Gödel fut le premier à le faire. On fixe donc un système formel $\mathcal{T}$ dans lequel on peut faire un peu (un tout petit peu suffit) d'arithmétique. On supposera la cohérence (ou non-contradiction) de $\mathcal{T}$ (si $\mathcal{T}$ n'est pas cohérente, alors tout y devient prouvable ; il est donc facile de voir que cette hypothèse est strictement nécessaire dans ce qui suit.).
On considère ensuite l'énoncé à un paramètre $B[n]$ « La formule de numéro n dans laquelle on a donné la valeur n au paramètre, soit $A_n[n]$, n'est pas démontrable ». B est une formule à un paramètre, et a donc un numéro de Gödel N ; si on donne la valeur N au paramètre n, on voit que $B[N]$ veut dire littéralement « $B[N]$ n'est pas démontrable », soit « je ne suis pas démontrable ». Si démontrable = vrai, alors on a vraiment le paradoxe du menteur « je ne suis pas vraie », c'est donc que démonstrabilité et vérité divergent. En fait, la formule de Gödel est vraie, sans être prouvable, pourvu bien sûr que $\mathcal{T}$ soit cohérente. Elle détruit la forme Leibnizienne du programme de Hilbert, le *calculus ratiocinator*. C'est la première forme de l'incomplétude.
Nouveau jeu de miroir : on vient en fait de démontrer quelque chose, la formule de Gödel, puisqu'on sait qu'elle est vraie, mais on ne l'a démontrée que sous l'hypothèse de la cohérence de $\mathcal{T}$. Tout cela se formalise parfaitement et donne dans $\mathcal{T}$ une démonstration de l'implication $\mathrm{Coh}_{\mathcal{T}} \Rightarrow B_N[N]$. Comme on sait que $B_N[N]$ n'est pas démontrable dans $\mathcal{T}$, sa cohérence formelle (non-contradiction logique) ne l'est pas non plus, toujours sous l'hypothèse de la cohérence de $\mathcal{T}$, bien sûr. C'est la deuxième forme d'incomplétude, de loin la plus connue.
Mais que veut dire complétude ? Traditionnellement, il s'agit de l'adéquation entre un langage et une interprétation, et cette adéquation dépend des énoncés logiques considérés. Ainsi, un énoncé de la forme « il existe n tel que $f(n) = 0$ » (dit encore énoncé *vérifiable*, car il suffit d'essayer successivement les valeurs $n = 0, 1, 3, \ldots$) vrai est démontrable : c'est là l'esprit, sinon la lettre, du théorème de complétude de ... Gödel de 1930. Si on appelle *réfutable* une négation

d'énoncé vérifiable, i.e. un énoncé de la forme « pour tout entier n $f(n) \neq 0$ », ou qui se ramène à cette forme (c'est le cas du théorème de Fermat, de la cohérence, de la formule de Gödel $B[N]$, ...), alors on ne peut pas prouver (dans une théorie cohérente évidemment) d'énoncé réfutable faux (car si A réfutable est faux, sa négation $\neg A$, vérifiable et vraie, est démontrable par complétude, ...). C'est d'ailleurs pourquoi la formule de Gödel $B[N]$ est vraie (si elle était fausse, alors elle serait démontrable, donc vraie !). L'incomplétude s'applique donc dès que les formules sont réfutables. Cela dit, cette incomplétude de principe se manifeste rarement dans des zônes intéressantes des mathématiques, au point que la plupart des mathématiciens n'en ont jamais vu aucune manifestation.

Un sens plus interne à la complétude serait « il ne manque rien ». Pourquoi ne manque-t-il rien à la logique pure, alors qu'il manque forcément quelque chose à l'arithmétique ? Peut-on parler de manque sans présupposer la totalité ? Ce sont des questions importantes pour le siècle à venir.