Bologna, 4 novembre 2026

TENONS ET MORTAISES

RELECTURE LOGIQUE DE PA

JEAN-YVES GIRARD

1 – Logique et menuiserie

- **La Logique traite de ce qui va de soi : « C'est logique ».**

  $\neg\neg A \neq A$: « Une proposition qu'on ne peut pas r(é)fu(t)er. »

- **Et non pas une *casuistique* régulée par le « pas vu pas pris ».**

  Axiomes : tombés du Ciel, ukases *a priori* incompatibles.

  Systèmes : opaques censés être *consistants* (cohérence du pauvre).

  Sémantique : paraphrase *ad hoc*, sorte de *Yes man*.

- ***Syntaxe transcendantale :* tenons et mortaises.**

  Vis et clous : (axiomes) disparaissent ; pas de problème de compatibilité.

  Colle : systèmes remplacés par des « auberges » ouvertes.

- **Années 1930 : ni clous ni vis ni colle !**

  BHK : preuves comme fonctions (*usage*).

  Herbrand : $\forall\exists \neq \exists\forall$. Tests d'*usine* : $\parr\otimes \neq \otimes\parr$.

  Gentzen : sous-formule, traite A seule, hors système.

- **Message brouillé par le *fondamentalisme*.**

2 – Le fondamentalisme

- **Programme de Hilbert (~ 1925) : « démonstrations » de consistance.**
- **Réfuté par l'*incomplétude* mais encore prégnant dans ma jeunesse.**
- **Gentzen : un quantificateur = une exponentielle ordinale ω^α.**
  ϵ_0 ne convainc que les croyants ; boutade d'André Weil.
- **L'incomplétude, résultat mal aimé : « réfutations » complotistes.**
  Correspond à l'absence de *sous-formules* contrôlables.
- **Paraphrase *sémantique*.**
  Tarski : A est vrai quand (méta)-A est (méta)-vrai.
  Planche pourrie : La Palice rencontre Ponzi.
  Brouillée : les démonstrations sont vraies, pas les propositions.
- **Gros sabots fondamentalistes : tout serait *in fine* « classique ».**
  Échec du programme réhabilite la finesse.
- ***Linéarité* dans certaines zones du raisonnement.**
  Contredit le classique.

3 – L'INDUCTION OU RÉCURRENCE

- **Schéma d'axiomes :**

$$\frac{A[1] \qquad A[x] \Rightarrow A[x+1]}{\forall n\ A[n]}$$

- **Récupérable en logique du *second ordre* grâce à Dedekind**

$$x \in \mathbb{N} \ := \ \forall X(X(1) \Rightarrow (\forall y(X(y) \Rightarrow X(y+1)) \Rightarrow X(x)))$$
$$\forall n A[n] \ := \ \forall x(x \in \mathbb{N} \Rightarrow A[x])$$
$$\exists n A[n] \ := \ \exists x(x \in \mathbb{N} \wedge A[x])$$

- **Les Σ^0_1 (sans $\forall n$) complets.**

  Gödel (1931) : Les Σ^0_1 vrais sont prouvables.

  Petits axiomes groupés en un seul Π^0_1 ; $\Pi^0_1 \Rightarrow \Sigma^0_1$ reste Σ^0_1.

- **Hors Σ^0_1, incomplétude.**

  Énoncé de Gödel : Π^0_1 vrai mais pas prouvable.

  Π^0_2 ($\forall m \exists n$) : on n'a jamais toutes les fonctions $n = f(m)$.

4 – Les individus

- **Honte de la logique : l'*égalité* comme prédicat lambda.**

  Axiomatique sans élimination des coupures.

  Leibniz : $x = y \;:=\; \forall X(X(x) \Rightarrow X(y))$ **Ringard !**

  Fautif : $2 \neq 1$ **devient incomplet.**

  Hypocrite : les propriétés des individus sélectionnées par le système.

- **Individus comme propositions, égalité comme équivalence (linéaire)** $\equiv$**.**

  Classique : $A \equiv B \;\vee\; B \equiv C \;\vee\; C \equiv A$

- **Entiers notion naturelle, *dixit* Kronecker :**

  « Dieu a fait les nombres entiers, tout le reste est l'œuvre de l'Homme. »

  Pas une raison pour les traiter religieusement.

- $1 \;:=\; \top, x + y \;:=\; x \otimes y$

  Tous distincts : e.g. $1 \neq 2, 2 \neq 3, 1 \neq 3$**.**

  Trois propositions deux à deux contradictoires.

  Contredit le tiers exclu.

5 – LES ENTIERS

- $n := ⅁ \otimes \ldots \otimes ⅁$, **prouvable.**

  $n > 0$ **:** **pas d'élément neutre pour** $\otimes$**.**

  $0 := ⅁ \parr ⅁$ **:** **sort du cadre.**

- $1 := ⅁, x + y := x \otimes y$

  $m \leq n := m \multimap n$

  Égalité comme équivalence ***linéaire*** **:** $m \leq n \;:=\; m \leq n \,\&\, n \leq m$

- ***Normatif/aléthique*** **: démonstrations** ***correctes/visibles*****.**

  $\varpi([\![⅁, ⅁, \ldots, ⅁]\!]) \;:=\; 2 - \sharp(⅁)$

  $\varpi([\![⅁, ⅁, \ldots, ⅁, ⅂, \ldots, ⅂]\!]) \;:=\; -\sharp(⅁)$ **si au moins un** $⅂$**.**

- **Si** $m \neq n$**,** $m = n$ **réfutable.**

  Absurdité **définie comme** $!(⅁ \parr ⅂) \otimes ⅁$**.**

  $m \equiv n \;\Rightarrow\; !(⅁ \parr ⅂) \otimes ⅁$**.**

  $2 \neq 1$ **utilise** $[\![⅁]\!] + [\![⅁, ⅁]\!] + [\![⅁, ⅂]\!]$**.**

  Visible : **poids** $1 + 0 + -1 = 0$**.**

6 – PA

- **Giuseppe Peano (1858–1932).**
- **1889 : création de PA (arithmétique de Peano).**
- **Située hors logique ; abus de**

  Vis et clous : une kyrielle d'axiomes.
  Colle : un système, i.e., une chapelle sectaire.
- **Nombreuses variantes, toutes *axiomatiques* (HA).**

  Aucune purement logique.
- **Définir *logiquement* les entiers et**

  Prouver la kyrielle d'axiomes.
  Syntaxe transcendantale : hors système.
- **Modifications par rapport à PA.**

  Mineures : du point de vue axiomatique.
  On commence à 1 : le successeur devient $n + 1$.
  Égalité remplacée par $\leq$.

7 – Les petits clous

- **Axiomes de l'égalité dont :**

$$x = x$$
$$x = y \wedge x' = y' \;\Rightarrow\; x + y = x' + y'$$
$$x = y \wedge x' = y' \;\Rightarrow\; x \cdot y = x' \cdot y'$$
$$x = y \wedge y = z \;\Rightarrow\; x = z$$
$$x \cdot (y + 1) = (x \cdot y) + x$$

- **L'égalité est au mieux logicalisée façon Leibniz.**

$$x = y \;:=\; \forall X (X(x) \Rightarrow X(y))$$

Individus tombés du Ciel qui auraient des propriétés.

Comme les chiens ont des puces (celles du système ?).

Épicycles ptolémaïques.

- **Second ordre : marteau pour écraser une mouche.**

$2 \neq 1$ **devient** ***incomplet***.

$x \neq y \;:=\; \exists X (X(x) \wedge \neg X(y))$ **permet de** ***cacher*** **des coupures.**

8 – Deux grosses vis

- **Axiomes (3) et (4) de Peano : les entiers tous distincts.**

$$\neg(m + 1 \leq 1) \qquad \textbf{(3)}$$

$$m + 2 \leq n + 1 \;\Rightarrow\; m + 1 \leq n \qquad \textbf{(4)}$$

- **Manque le produit : remplacer** $n := \urcorner \otimes \ldots \otimes \urcorner$ **par**

  $m(X) := X \otimes \ldots \otimes X$**, d'où** $(m \cdot n)(X) := n(m(X))$

  $m \leq n := m(\urcorner) \leq n(\urcorner)$

- ***Vérité :*** **appliquée aux propositions pas à leur preuves.**

  L'existence d'une démonstration visible n'induit pas de table de vérité.

- ***Incomplétude :*** **appliquée aux systèmes pas à leurs propositions.**

  Peano : flou artistique quant à la récurrence ; paradoxe de Queneau.

  Induction : les A **auxquels elle s'applique ?**

  Liste fondamentalement incomplète.

- **Disparition de cette colle qui *diluait* les responsabilités.**

9 – L'INTERSECTION

- **Types intersection (Torino) ; sans statut logique.**

  Usine : Critère de correction

  $$A \otimes (B \parr C) = (A \otimes B) \parr C \ \cap \ (A \otimes C) \parr B$$

  Mais $A \otimes (B \parr C) \not\equiv (A \otimes B) \parr C \ \& \ (A \otimes C) \parr B$

- **Quantification** $\forall X\, A$ **; produit infini ?**

  Sémantique : $\forall X\, A = \Pi_X A[X]$ **; grotesque.**

  Usine : trois tests pour $\forall X$**.**

  $$X_1 = \nexists, X_2 = \nexists \otimes \nexists, X_3 = \nexists \parr \nexists$$

  ST : $\forall X\, A = A[X_1] \cap A[X_2] \cap A[X_3]$

- ***Locatif*** **contre** ***spirituel*****.**

  Locatif : les X_i **tous au même endroit..**

  Non déductif : doit rester à sa place.

  Spirituel : synthétique, logique.

- **Locatif déductif :** ***abomination*****.**